

Lógica Computacional

Aula Teórica 14: Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

7 de Abril de 2011

Ocorrências de variáveis em fórmulas

Validade depende do modelo?

- Funções e predicados têm que ser “interpretados” (ter associado “valor” em algum domínio/modelo)
Exemplo: A relação *I* do exemplo da aula anterior não pode ser reflexiva (ninguém é irmão de si mesmo).
- Há fórmulas que são sempre verdadeiras, independentemente do modelo: $P(c) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(c)$

Tipos de ocorrências de variáveis

- *Mudas*, ou no âmbito de um quantificador:
 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ ou $\forall z(P(z) \rightarrow Q(z))$ (são equivalentes)
- *Livres*, como *y* em $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x, y))$
ou *x* e *y* em $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x, y)$

Variáveis em termos

Definição

O conjunto das variáveis num termo $t \in T_{\Sigma}^X$, denotado por $V(t)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $V(c) = \emptyset$, para cada $c \in SF_0$;
- $V(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$;
- se $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^X$ e $f \in SF_n$, com $n > 0$, então
 $V(f(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$.

Um termo sem variáveis diz-se *fechado*; caso contrário diz-se *aberto*.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de termos.

Variáveis livres e mudas

Variáveis livres

O conjunto das variáveis *livres* numa fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^X$, denotado por $VL(\varphi)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $VL(\varphi) = \emptyset$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^X$ e $P(t_1, \dots, t_n) \in F_{\Sigma}^X$ para cada $P \in SP_n$, com $n > 0$, então $VL(P(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n VL(t_i)$;
- se $\varphi, \psi \in F_{\Sigma}^X$ então
 $VL(\varphi \vee \psi) = VL(\varphi \wedge \psi) = VL(\varphi \rightarrow \psi) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$;
- se $x \in X$ e $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ então
 $VL(\forall x \varphi) = VL(\exists x \varphi) = VL(\varphi) \setminus \{x\}$.

Uma fórmula sem variáveis *livres* diz-se *fechada*; caso contrário diz-se *aberta*.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Variáveis livres e mudas

Variáveis mudas

O conjunto das variáveis *mudas* numa fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^X$, denotado por $VM(\varphi)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $VM(\varphi) = \emptyset$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^X$ e $P(t_1, \dots, t_n) \in F_{\Sigma}^X$ para cada $P \in SP_n$, com $n > 0$, então $VM(P(t_1, \dots, t_n)) = \emptyset$;
- se $\varphi, \psi \in F_{\Sigma}^X$ então
 $VM(\varphi \vee \psi) = VM(\varphi \wedge \psi) = VM(\varphi \rightarrow \psi) = VM(\varphi) \cup VM(\psi)$;
- se $x \in X$ e $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ então
 $VM(\forall x \varphi) = VM(\exists x \varphi) = VM(\varphi) \cup \{x\}$.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Variáveis livres e mudas

Variáveis numa fórmula

O conjunto das variáveis duma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^X$, denotado por $V(\varphi)$, é o conjunto $V(\varphi) = VL(\varphi) \cup VM(\varphi)$.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Fecho universal de fórmula

Seja $\varphi \in F_{\Sigma}^X$. Se $VL(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$, então a fórmula

$$\forall x_1 (\dots (\forall x_n \varphi) \dots)$$

diz-se o *fecho universal* de φ .

Se $n = 0$ então φ é o seu próprio fecho universal.

Variáveis livres e mudas

Exemplos

- Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$;
 $VL(\varphi) = \emptyset$, $VM(\varphi) = \{x\} = V(\varphi)$
- Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow R(x, y))$;
 $VL(\varphi) = \{y\}$, $VM(\varphi) = \{x\}$ e $V(\varphi) = \{x, y\}$
- Seja $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow R(x, y)) \vee Q(x)$;
 $VL(\varphi) = \{x, y\}$, $VM(\varphi) = \{x\}$ e $V(\varphi) = \{x, y\}$

O que se pretende?

Motivação

- Uma fórmula como $\forall xP(x)$ captura o facto de a propriedade P ser verdadeira para todos os elementos de dado universo.
- Então, substituindo a variável por um termo qualquer, a propriedade é verdadeira.

Ou seja, se se tem $\forall xP(x)$ também se deve ter $P(t)$, para qualquer termo $t \in T_{\Sigma}^X$, pois os termos designam elementos do universo em questão.

A fórmula $\forall xP(x) \rightarrow P(t)$, sendo $t \in T_{\Sigma}^X$, é válida.

- Só se podem substituir variáveis livres: $\forall xP(x)$ não é equivalente a $P(3)$.

Termos por variáveis

Substituição em termo

Dados termos $s, t \in T_{\Sigma}^X$, o termo $s\{t/x\}$, que se obtém substituindo x por t em s é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $c\{t/x\} = c$, para cada $c \in SF_0$;
- $x\{t/x\} = t$, para cada $x \in X$;
- $y\{t/x\} = y$, para cada $y \in X \setminus \{x\}$;
- se $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^X$ e $f \in SF_n$, com $n > 0$, então

$$f(t_1, \dots, t_n)\{t/x\} = f(t_1\{t/x\}, \dots, t_n\{t/x\})$$

Exemplo: $f(x)\{3/x\} = f(3)$; se $f(x) = x + 1$ então
 $f(x)\{3/x\} = 3 + 1$

Termos por variáveis

Substituição em fórmula

Dadas $\varphi, \psi \in F_{\Sigma}^X$ e $x \in X$ e $t \in T_{\Sigma}^X$, a fórmula $\varphi\{t/x\}$, que se obtém substituindo x por t em φ é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $\varphi\{t/x\} = \varphi$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma}^X$ e $P \in SP_n$, com $n > 0$, então

$$P(t_1, \dots, t_n)\{t/x\} = P(t_1\{t/x\}, \dots, t_n\{t/x\})$$

- $(\varphi * \psi)\{t/x\} = \varphi\{t/x\} * \psi\{t/x\}$, para cada $*$ $\in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$;
- $(\forall x \varphi)\{t/x\} = \forall x \varphi$ e $(\exists x \varphi)\{t/x\} = \exists x \varphi$;
- $(\forall y \varphi)\{t/x\} = \forall y \varphi\{t/x\}$ e $(\exists y \varphi)\{t/x\} = \exists y \varphi\{t/x\}$, sendo $y \in X \setminus \{x\}$.

Termos por variáveis

Exemplos

Considere as variáveis x, y, z e a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com

- $r, s \in SF_1$;
- $P \in SP_1$ e $Q \in SP_2$.

Sejam $\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x, s(y)))$ e $\psi = P(z) \wedge \exists zQ(r(z), x)$,
 $t = r(y)$ e $t' = s(z)$.

- $s(x)\{t/x\} = s(r(y))$;
- $\varphi\{t/y\} = \forall xP(x) \rightarrow Q(x, s(r(y)))$;
- $\varphi\{t/x\} = \varphi$;
- $\psi\{t/z\} = P(r(y)) \wedge \exists zQ(r(z), x)$;
- $\psi\{t'/x\} = P(z) \wedge \exists zQ(r(z), s(z))$.

Termos por variáveis

Captura de variáveis livres

A definição anterior de substituição permite alterar o “sentido” das fórmulas.

- $\exists x P(f(x, y))$ tem significado diferente de $\exists x P(f(x, x))$, mas

$$(\exists x P(f(x, y)))\{x/y\} = \exists x P(f(x, x))$$

- Em $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$ não se deve substituir o y por um termo que contenha x .

$$(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y)))\{s(x)/y\} = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x, s(x)))$$

Em geral, deve-se evitar que uma substituição torne uma variável livre noutra que fica muda.

Termos por variáveis

Termo livre para variável numa fórmula

Dadas $\varphi, \psi \in F_{\Sigma}^X$ e $x \in X$ e $t \in T_{\Sigma}^X$, o termo t diz-se *livre para x em φ* , se

- φ é uma fórmula atômica (predicado ou $\perp$);
- $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ com $*$ $\in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ e t livre para x em φ_1 e φ_2 ;
- $\varphi = \forall x \psi$ ou $\varphi = \exists x \psi$;
- $\varphi = \forall y \psi$ ou $\varphi = \exists y \psi$, sendo $y \in X \setminus \{x\}$, $y \notin V(t)$ e t livre para x em ψ .

Observações

- Sempre que t seja livre para x em φ a substituição de x por t em φ não “captura” variáveis de t (distintas de x).
- Sempre que se referirem substituições, estas consideram apenas termos livre para variável na fórmula em questão.

Termo livre para variável numa fórmula

Exemplos

Seja $\varphi = \exists y M(x, y)$.

- Se $t = s(y)$ então t não é livre para x em φ .

Como $y \in VM(\varphi)$ a substituição de x por t em φ leva à captura da variável de t (o y).

- Se $t = s(x)$ ou mesmo $t = s(z)$ então t é livre para x em φ .

Porque $\{x, z\} \cap VM(\varphi) = \emptyset$.

- Os termos $s(x)$, $s(y)$ e $s(z)$ são livre para y em φ .

Porque $y \in VM(\varphi)$.

Termo livre para variável numa fórmula

Lema

- Se φ é uma fórmula fechada, então para qualquer termo t e variável x tem-se que $\varphi\{t/x\} = \varphi$.
- O termo x é livre para x em qualquer fórmula.
- Se para dado termo t se tem que $V(t) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável em qualquer fórmula.
- Se para dada fórmula φ se tem que $x \in VM(\varphi)$ e $x \notin VL(\varphi)$, então qualquer termo é livre para x em φ .
- Se para dado termo t e dada fórmula φ se tem que $x \in VL(\varphi)$ e $V(t) \cap VM(\varphi) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável em φ .