Lógica Computacional

Aula Teórica 15: Semântica da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

11 de Abril de 2010

Estrutura de interpretação sobre assinatura

Definição

Considere-se uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$.
Uma *estrutura de interpretação sobre* Σ é um par $\mathcal{M} = (U, I)$ sendo:

- U um conjunto não vazio, designado por *universo* ou *domínio* da estrutura;
- I uma *função*, designada *de interpretação*, que a cada símbolo de Σ associa uma aplicação do seguinte modo:
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in SF_n$, tem-se $I(f) : U^n \to U$;
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $P \in SP_n$, tem-se $I(P) : U^n \to \{0, 1\}$.

Exemplos

Os naturais

Considere-se a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, onde

- $SF_0 = \{Zero\}$, $SF_1 = \{Suc, Quad\}$ e $SF_i = \emptyset$, para $i \geq 2$;
- $SP_1 = \{Q\}$, $SP_2 = \{M\}$ e $SP_i = \emptyset$, para $i = 0$ ou $i \geq 3$.

A estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sobre Σ é definida por:

- $I(Zero) = 0$,
- $I(Suc) : \ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ é tal que $I(Suc)(n) = n + 1$,
- $I(Quad) : \ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ é tal que $I(Quad)(n) = n * n$,
- $I(Q) : \ \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ é tal que $I(Q)(n) = 1$, se n é um quadrado perfeito, e $I(Q)(n) = 0$ caso contrário,
- $I(M) : \ \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ é tal que $I(M)(n, m) = 1$, se $n > m$, e $I(M)(n, m) = 0$ caso contrário.

Definições

Atribuição de X em $\mathcal{M}$

- Dada uma estrutura de interpretação sobre uma assinatura Σ, uma *atribuição* de X em $\mathcal{M}$ é uma aplicação

$$\rho : \ X \to U$$

  que associa a cada variável de X um elemento do universo U.
- O conjunto de todas as atribuições de X em $\mathcal{M}$ designa-se por $ATR^X_{\mathcal{M}}$.

Atribuição x-equivalente

- Dadas duas atribuições ρ, ρ' de X em $\mathcal{M}$, diz-se que ρ é *x-equivalente* a ρ', se $\rho(y) = \rho'(y)$, para cada $y \in X \setminus \{x\}$.
- Seja $\rho[x := u]$ a atribuição x-equivalente a ρ que atribui o valor u à variável x.

Função de interpretação de termos

Definição

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ e uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$.

A *interpretação dos termos em* $\mathcal{M}$ *com* ρ é uma função

$$[\![\cdot]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} : \; T^X_{\Sigma} \rightarrow U$$

definida indutivamente pelas seguintes regras:

- $[\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = \rho(x)$, para $x \in X$;
- $[\![c]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(c)$, para $c \in SF_0$;
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(f)([\![t_1]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}})$, para $f \in SF_n, \; t_1, \ldots, t_n \in T^X_{\Sigma}$ e $n > 0$.

Exemplos

Ainda sobre os naturais

Considerando a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ do exemplo anterior, e assumindo $x, y \in X$ e a atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tal que $\rho(x) = 1$ e $\rho(y) = 2$, tem-se que

- $[\![Zero]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(Zero) = 0$;
- $[\![Suc(x)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(Suc)([\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = \rho(x) + 1 = 1 + 1 = 2$;
- $[\![Quad(y)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = I(Quad)([\![y]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = \rho(y) * \rho(y) = 2 * 2 = 4$.

Satisfação de fórmula

Definição

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ e uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$.

A *relação de satisfação de* $\varphi \in F^X_\Sigma$ *por* $\mathcal{M}$ *com* ρ, denotada por $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$, é definida indutivamente pelas seguintes regras:

- não se tem que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \bot$ (*i.e.*, $\mathcal{M}, \rho \nVdash \bot$);
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash P$ se $I(P) = 1$, para cada $P \in SP_0$;
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)$ se $I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket^\rho_{\mathcal{M}}, \ldots, \llbracket t_n \rrbracket^\rho_{\mathcal{M}}) = 1$, para cada $P \in SP_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $n > 0$;
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \vee \psi$ se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$;
  $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \wedge \psi$ se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$;
  $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ se sempre que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ também $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$;
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, \varphi$ se para todo o $u \in U$ se tem $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$;
  $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \varphi$ se para algum o $u \in U$ se tem $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$.

Modelo de fórmula

Por vezes as variáveis não desempenham um papel relevante.

Definição

Uma estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ diz-se um *modelo* de uma fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$, o qe se denota por $\mathcal{M} \Vdash \varphi$, se para cada $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$.

Observações

- Os conceitos anteriores estendem-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$.
- $\mathcal{M} \Vdash \neg\varphi$ se e só se $\mathcal{M} \nVdash \varphi$.

Exemplos

De novo sobre os naturais

Considerando a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ do exemplo anterior, e assumindo $x, y \in X$ e a atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tal que $\rho(x) = 1$ e $\rho(y) = 2$, tem-se que

- $\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(Zero)$ pois como 0 é um quadrado perfeito, $I(Q)([\![Zero]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = I(Q)(I(Zero)) = I(Q)(0) = 1$;
- $\mathcal{M}, \rho \nVdash M(x, y)$ pois como 1 não é maior que 2, $I(M)([\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}, [\![y]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = I(M)(\rho(x), \rho(y)) = 1 > 2 = 0$;
- $\mathcal{M}, \rho \nVdash Q(Suc(x)) \wedge M(Quad(Suc(y)), Suc(x))$ pois como 2 não é um quadrado perfeito, $\mathcal{M}, \rho \nVdash Q(Suc(x))$, uma vez que $I(Q)([\![Suc(x)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = I(Q)(I(Suc)([\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}})) = I(Q)(I(Suc)(\rho(x)) = I(Q)(1+1) = I(Q)(2) = 0$.

Exemplos

De novo sobre os naturais

Considerando ainda a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ do exemplo anterior, e assumindo de novo $x, y \in X$ e a atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tal que $\rho(x) = 1$ e $\rho(y) = 2$, tem-se que

- $\mathcal{M}, \rho \nVdash \forall x\, Q(x)$ pois como nem todos os naturais são quadrados perfeitos, tomando por exemplo 5 para valor de x tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := 5] \nVdash Q(x)$, porque $I(Q)([\![x]\!]^{\rho[x:=5]}_{\mathcal{M}}) = I(Q)(\rho[x := 5](x)) = I(Q)(5) = 0$;
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(Zero) \wedge \exists x\, M(x, Zero)$ pois já vimos que $\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(Zero)$ e $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, M(x, Zero)$ uma vez que $\mathcal{M}, \rho[x := 4] \Vdash M(x, Zero)$ porque

$$
\begin{aligned}
I(M)([\![x]\!]^{\rho[x:=4]}_{\mathcal{M}}, [\![Zero]\!]^{\rho[x:=4]}_{\mathcal{M}}) &= \\
I(M)(\rho[x := 4](x), I(Zero)) &= \\
&4 > 0 = 1
\end{aligned}
$$

Exemplos

Continuando com os naturais

Considerando sempre a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$, mostra-se agora que $\mathcal{M} \Vdash \forall x\, Q(Quad(x))$.

Para qualquer $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, Q(Quad(x))$, uma vez que para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ se tem que

$$
\begin{aligned}
I(Q)([\![Quad(x)]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}}) &= I(Q)(I(Quad)([\![x]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}})) \\
&= I(Q)(\rho[x := n](x) * \rho[x := n](x)) \\
&= I(Q)(n * n) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Fórmulas contraditórias, possíveis e válidas

Definições

Uma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$ diz-se:

- *possível*, se existe uma estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ e uma atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^{X}$ tal que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$;
- *contraditória*, se não é possível;
- *valida*, o que se denota por $\models \varphi$, se qualquer que seja a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ se tem que $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.

Os conceitos estendem-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Consequência semântica e equivalência de fórmulas

Definições

- Sendo $\Phi \subseteq F_\Sigma^X$, a fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se *consequência semântica* do conjunto de fórmulas Φ, o que se denota por $\Phi \models \varphi$, se para toda a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ e para cada atribuição $\rho \in ATR_\mathcal{M}^X$ se tem que se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \Phi$ então $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$;
- As fórmulas $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ dizem-se *logicamente equivalentes*, o que se denota por $\varphi \equiv \psi$, se para toda a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ e para cada atribuição $\rho \in ATR_\mathcal{M}^X$ se tem que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$.

Os conceitos estendem-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.