

Lógica Computacional

Aula Teórica 16: Lemas de Substituição em Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

14 de Abril de 2011

Lema das variáveis livres

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre uma assinatura Σ , duas atribuições $\rho, \rho' \in ATR_{\mathcal{M}}^X$, e sejam $t \in T_{\Sigma}^X$ e $\varphi \in F_{\Sigma}^X$.

Lema

- $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho} = \llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho'}$, se $\rho(x) = \rho'(x)$ para cada $x \in V(t)$.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho' \Vdash \varphi$, se $\rho(x) = \rho'(x)$ para cada $x \in VL(\varphi)$.

Corolário

Seja t um termo fechado e φ uma fórmula fechada

- $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho} = \llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho'}$.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho' \Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M} \Vdash \neg\varphi$.

Congruência α

Motivação

A identidade das variáveis mudas não é importante:

- qualquer identificador serve;
- pode-se trocar o identificador sem alterar o sentido da fórmula.

Lema

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ , uma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ e seja $y \notin \text{VL}(\varphi)$ livre para x em φ .

- $\forall x \varphi \equiv \forall y \varphi\{y/x\}$.
- $\exists x \varphi \equiv \exists y \varphi\{y/x\}$.

Fecho de variáveis em fórmulas

Motivação

Se a satisfação de uma fórmula não depende da atribuição considerada, as variáveis podem ser todas mudas.

Lema

- $\mathcal{M} \models \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \models \text{Fch}(\varphi)$, sendo $\text{Fch}(\varphi)$ o fecho universal de φ .

Variável por variável

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ , uma atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$, duas variáveis $x, y \in X$ e um valor $u \in U$.

Lema

- Dado $t \in T_{\Sigma}^X$, se $y \notin V(t) \setminus \{x\}$ então

$$\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=u]} = \llbracket t\{y/x\} \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho[y:=u]}$$

- Dada $\varphi \in F_{\Sigma}^X$, se y é livre para x em φ e $y \notin VL(\varphi) \setminus \{x\}$ então

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \models \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho[y := u] \models \varphi\{y/x\}$$

Variável por termo

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ , uma atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$, uma variável $x \in X$ e um valor $u \in U$.

Lema

- Dado $t \in T_{\Sigma}^X$, se $r \in T_{\Sigma}^X$ tal que $\llbracket r \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho} = u$ então

$$\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=u]} = \llbracket t\{r/x\} \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho}$$

- Dada $\varphi \in F_{\Sigma}^X$, se $t \in T_{\Sigma}^X$ tal que t é livre para x em φ e $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho} = u$ então

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \models \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \models \varphi\{t/x\}$$

Variável por termo

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ , uma atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ e uma variável $x \in X$.

Corolário

Dada $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ e sendo $t \in T_{\Sigma}^X$ livre para x em φ , tem-se que:

- $\{\varphi\{t/x\}\} \models \exists x \varphi$
- $\{\forall x \varphi\} \models \varphi\{t/x\}$

Corolário

Se para cada $u \in U$ existe um termo fechado $t \in T_{\Sigma}^X$ tal que $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M}} = u$ então, para dada φ , tem-se que

$$\mathcal{M}, \rho \models \forall x \varphi \text{ se e só se, para cada } u \in U, \mathcal{M}, \rho \models \varphi\{t/x\}$$