

Lógica Computacional

Aula Teórica 17: Leis da Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

28 de Abril de 2011

Interacção entre quantificadores e conectivos proposicionais

Algumas leis

- $\{\forall x \varphi\} \models \exists x \varphi$, sendo $x \in \text{VL}(\varphi)$
- $\{\forall x \varphi \vee \forall x \psi\} \models \forall x (\varphi \vee \psi)$
- $\{\exists x (\varphi \wedge \psi)\} \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$
- $\{\forall x (\varphi \rightarrow \psi)\} \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$
- $\{\exists y \forall x \varphi\} \models \forall x \exists y \varphi$

Recíprocos não são verdadeiros

As fórmulas em cada item não são equivalentes.

Uma prova

$$\{\forall x \varphi \vee \forall x \psi\} \models \forall x (\varphi \vee \psi)$$

Por hipótese, para dada estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ e dada atribuição $\rho : X \rightarrow U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$, ou seja,

$$\mathcal{M}, \rho \models \forall x \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \rho \models \forall x \psi \quad (1)$$

Considerando um valor arbitrário $u \in U$, por 1 obtém-se

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \models \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \rho[x := u] \models \psi \quad (2)$$

Então, de 2 conclui-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \models \varphi \vee \psi$; logo tem-se também que $\mathcal{M}, \rho \models \forall x (\varphi \vee \psi)$, como se queria mostrar.

Um contra-exemplo

$$\{\forall x (\varphi \vee \psi)\} \not\models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$$

Seja $\varphi = P(x)$ e $\psi = Q(x)$.

Considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sendo $I(P) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(P)(n) = 1$ se n é par, e $I(Q) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(Q)(n) = 1$ se n é ímpar.

Como todo o natural ou é par ou é ímpar, tem-se que $\mathcal{M} \models \forall x (\varphi \vee \psi)$, mas não se tem que todo o natural é par ou todo o natural é ímpar, logo $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$.

Outra prova

$$\{\exists y \forall x \varphi\} \models \forall x \exists y \varphi$$

Por hipótese, para dada estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ e dada atribuição $\rho : X \rightarrow U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \models \exists y \forall x \varphi$, ou seja, para um dado $v \in U$,

$$\mathcal{M}, \rho[y := v] \models \forall x \varphi \quad (3)$$

Considerando um valor arbitrário $u \in U$, por 3 obtém-se

$$\mathcal{M}, \rho[y := v][x := u] \models \varphi \quad (4)$$

Como $\rho[y := v][x := u] = \rho[x := u][y := v]$, de 4 conclui-se que para qualquer $u \in U$ e para um dado $v \in U$ se tem $\mathcal{M}, \rho[x := u][y := v] \models \varphi$; logo tem-se também que $\mathcal{M}, \rho \models \forall x \exists y \varphi$, como se queria mostrar.

Outro contra-exemplo

$$\{\forall x \exists y \varphi\} \not\models \exists y \forall x \varphi$$

Seja $\varphi = P(x) \rightarrow Q(x, y)$.

Considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sendo $I(P) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(P)(n) = 1$ se n é quadrado perfeito, e $I(Q) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(Q)(n, m) = 1$ se m é a raiz de n .

Como todo o quadrado perfeito tem uma raiz, $\mathcal{M} \models \forall x \exists y \varphi$, mas não se tem que existe uma única raiz para todo o quadrado perfeito, logo $\mathcal{M} \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Leis de De Morgan

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \neg \varphi$$

Prova-se o sentido “só se” da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x \varphi$, ou seja, não se tem que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi$. Então, para algum $u \in U$, não se tem que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$, i.e., $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \neg \varphi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \neg \varphi$, como se queria mostrar.

Leis de De Morgan

$$\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \models \neg \exists x \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \models \forall x \neg \varphi$$

Prova-se o sentido “só se” da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \models \neg \exists x \varphi$, ou seja, não se tem que $\mathcal{M}, \rho \models \exists x \varphi$. Então, para nenhum $u \in U$, se tem que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \models \varphi$, i.e., qualquer que seja o valor u considerado, $\mathcal{M}, \rho[x := u] \models \neg \varphi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \models \forall x \neg \varphi$, como se queria mostrar.

Quantificadores como abreviatura

$$\exists x \varphi = \neg \forall x \neg \varphi$$

Quer-se mostrar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x \neg \varphi$ então $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \varphi$, e logo não é necessário ter o quantificador existencial como primitivo.

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \forall x \neg \varphi$ e como $\forall x \neg \varphi \equiv \neg \exists x \varphi$, pelo Teorema da Substitutividade, também $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \neg \exists x \varphi$. Uma vez que $\neg \neg \varphi \equiv \varphi$, conclui-se então que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \varphi$, como se queria mostrar.

$$\forall x \varphi = \neg \exists x \neg \varphi$$

A prova é semelhante.

Leis de distribuição

$$\forall x \varphi \wedge \forall x \psi \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

Prova-se o sentido “se” da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x (\varphi \wedge \psi)$, ou seja, qualquer que seja o valor $u \in U$ considerado, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \wedge \psi$. Para todo o u tem-se, por definição, que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$; logo, tem-se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \psi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$, como se queria mostrar.

Leis de distribuição

$$\exists x \varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x (\varphi \vee \psi)$$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \varphi \vee \exists x \psi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x (\varphi \vee \psi)$$

Prova-se o sentido “se” da equivalência (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x (\varphi \vee \psi)$, ou seja, para algum valor $u \in U$, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \vee \psi$. Para esse u tem-se, por definição, que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$; logo, ou se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \varphi$ ou se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \psi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x \varphi \vee \exists x \psi$, como se queria mostrar.

Leis de âmbito de quantificadores

Algumas leis

- $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$
- $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$
- Considere que $x \notin \text{VL}(\psi)$.
 - $\forall x \varphi \wedge \psi \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$
 - $\forall x \varphi \vee \psi \equiv \forall x (\varphi \vee \psi)$
 - $\exists x \varphi \wedge \psi \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi)$
 - $\exists x \varphi \vee \psi \equiv \exists x (\varphi \vee \psi)$
 - $\forall x (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \forall x \varphi$
 - $\exists x (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \exists x \varphi$
 - $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x \varphi \rightarrow \psi$
 - $\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \forall x \varphi \rightarrow \psi$

Provas

Lema

Se $x \notin \text{VL}(\varphi)$ então para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in \text{ATR}_{\mathcal{M}}^X$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$.

Prova

Por indução na estrutura de φ , usando alguns lemas anteriores.

Se $x \notin \text{VL}(\psi)$ então $\forall x \varphi \wedge \psi \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$

Tem que se provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in \text{ATR}_{\mathcal{M}}^X$ se tem que, se $x \notin \text{VL}(\psi)$ então

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi \wedge \psi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

Prova-se o sentido “se” da equivalência, usando o sentido “só se” do lema (o recíproco tem prova semelhante).

Prova

Lema

Se $x \notin \text{VL}(\varphi)$ então para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e para qualquer $\rho \in \text{ATR}_{\mathcal{M}}^X$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$.

Seja $x \notin \text{VL}(\psi)$. Para quaisquer $\mathcal{M}, \rho$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi \wedge \psi$ se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x (\varphi \wedge \psi)$

Por Hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x (\varphi \wedge \psi)$, ou seja, qualquer que seja o valor $u \in U$ considerado, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \wedge \psi$. Logo, para todo o u tem-se, por definição, que

- ① $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$, e
- ② $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$.

Por 1 tem-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi$, e por 2 e pelo lema acima, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$, logo $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \varphi \wedge \psi$, como se queria mostrar.

Mais provas

As provas usam o Teorema da Substitutividade.

$$\forall x (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \forall x \varphi, \text{ se } x \notin \text{VL}(\psi)$$

$$\begin{aligned} \forall x (\psi \rightarrow \varphi) &\equiv \forall x (\neg \psi \vee \varphi) && (\text{pois } \psi \rightarrow \varphi \equiv \neg \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \forall x (\varphi \vee \neg \psi) && (\text{pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \forall x \varphi \vee \neg \psi && (\text{pois } \forall x (\varphi \vee \psi) \equiv \forall x \varphi \vee \psi) \\ &\equiv \neg \psi \vee \forall x \varphi && (\text{pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \psi \rightarrow \forall x \varphi && (\text{pois } \neg \psi \vee \varphi \equiv \psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x \varphi \rightarrow \psi, \text{ se } x \notin \text{VL}(\psi)$$

$$\begin{aligned} \forall x (\varphi \rightarrow \psi) &\equiv \forall x (\neg \varphi \vee \psi) && (\text{pois } \psi \rightarrow \varphi \equiv \neg \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \forall x \neg \varphi \vee \psi && (\text{pois } \forall x (\varphi \vee \psi) \equiv \forall x \varphi \vee \psi) \\ &\equiv \neg \exists x \varphi \vee \psi && (\text{pois } \forall x \neg \varphi \equiv \neg \exists x \varphi) \\ &\equiv \exists x \varphi \rightarrow \psi && (\text{pois } \neg \varphi \vee \psi \equiv \varphi \rightarrow \psi) \end{aligned}$$