

Lógica Computacional

Aula Teórica 18: Dedução Natural em Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

2 de Maio de 2011

O que se pretende e como obter?

Um sistema dedutivo

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios (ou de fórmulas) simplesmente por manipulação sintáctica dos símbolos que ocorrem nas fórmulas (sem recorrer à semântica).

Meio: sistema dedutivo

Uma extensão ao Sistema da Lógica Proposicional: às regras dos conectivos proposicionais juntam-se regras de introdução e eliminação para cada quantificador.

Provas

Uma prova é uma sequência de fórmulas, sendo

- as primeiras as hipóteses (pode ser o conjunto vazio);
- cada uma das que não é uma hipótese foi obtida por aplicação de uma regra, eventualmente usando fórmulas anteriores (na sequência) como hipóteses dessa regra;
- a última fórmula da sequência é a conclusão desejada.

Notação

Sendo $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ um conjunto de hipóteses (com $n \geq 0$) e ϕ uma conclusão a provar, escreve-se

$$\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \phi$$

se a partir das hipóteses $\phi_1, \dots, \phi_n$ se consegue construir uma prova para ϕ .

Resultados

Terminologia

- Se se prova $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \phi$ então ϕ diz-se consequência do conjunto de hipóteses;
- Se se prova $\emptyset \vdash \phi$ então ϕ diz-se *teorema* do sistema dedutivo (e escreve-se $\vdash \phi$).

Correcção e Completude. Um sistema de prova deve ser:

- *Correcto*: só permite derivar provas para fórmulas válidas e para consequências semânticas

$$\Phi \vdash \phi \text{ implica } \Phi \models \phi$$

- *Completo*: permite derivar provas para todas as fórmulas válidas e para todas as consequências semânticas

$$\Phi \models \phi \text{ implica } \Phi \vdash \phi$$

O que é uma prova?

Provas como árvores etiquetadas

- Uma prova ou inferência é apresentada em árvore, dita de dedução ou derivação.
- Cada árvore é construída a partir de árvores singulares (ou folhas) utilizando-se as regras de inferência.
- Obtém-se um novo nível da árvore por aplicação de uma regra de inferência. Cada conectivo tem duas regras associadas (de introdução e de eliminação desse conectivo), excepto o falso ($\perp$) que pode apenas ser eliminado.
- A etiquetas dos nós são fórmulas.
 - As fórmulas nas folhas são as hipóteses, e têm associadas marcas (números inteiros); A hipóteses distintas devem-se associar marcas distintas.
 - A fórmula na raiz é a conclusão da prova. Diz-se que a árvore é uma derivação dessa fórmula.

Quantificador Universal: é fácil eliminar

Regra de eliminação

Se todos os indivíduos de dado universo gozam de certa propriedade, então cada um em particular goza também dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \forall x \varphi}{\varphi\{t/x\}} (\forall_E)$$

Exemplo: $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$

$$\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))}{P(a) \rightarrow Q(a)} (\forall_E) \quad P(a)}{Q(a)} (\rightarrow_E)$$

Quantificador Existencial: é fácil introduzir

Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo goza de certa propriedade, então existe algum indivíduo do universo que goza dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi\{t/x\}}{\exists x \varphi} (\exists_I)$$

Exemplo: $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash \exists x Q(x)$

$$\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))}{P(a) \rightarrow Q(a)} (\forall_E) \quad P(a)}{Q(a)} (\rightarrow_E) \quad \frac{Q(a)}{\exists x Q(x)} (\exists_I)$$

Quantificador Universal: como introduzir?

Fácil se a fórmula só tem variáveis mudas

$$\frac{\frac{\frac{\forall y (P(y) \rightarrow Q(y))}{P(x) \rightarrow Q(x)} (\forall_E) \quad \frac{\frac{\forall y P(y)}{P(x)} (\forall_E)}{P(x)} (\rightarrow_E)}{Q(x)} (\rightarrow_E)}{\forall x Q(x)} (\forall_I)$$

Provou-se $\{\forall y (P(y) \rightarrow Q(y)), \forall y P(y)\} \vdash \forall x Q(x)$.

A variável x representa uma entidade arbitrária porque não ocorre nas hipóteses.

Prova-se da mesma maneira que

$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x P(x)\} \vdash \forall x Q(x)$, porque x não ocorre *livre* nas hipóteses.

Quantificador Universal: como introduzir?

E se há variáveis livres nas hipóteses abertas?

$$\frac{\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))}{P(x) \rightarrow Q(x)} (\forall_E) \quad P(x)^2}{Q(x)} (\rightarrow_E)}{\forall x Q(x)} (\forall_I)$$

Esta árvore *não* é uma prova: a variável x na hipótese $P(x)$ representa uma entidade concreta (mas desconhecida), pelo que não pode ser abstraída.

Do conhecimento que um valor particular tem certa propriedade não se pode concluir que todos os valores a têm.

Quantificador Universal: como introduzir?

E se há variáveis livres nas hipóteses fechadas?

O seu âmbito fica restricto.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg P(x)^3}{\exists x \neg P(x)} (\exists_I) \quad \neg \exists x \neg P(x)^2 \\
 \hline
 \neg \exists x \neg P(x) \quad (\rightarrow_E) \\
 \frac{\perp}{P(x)} (\perp, 3) \\
 \hline
 \frac{P(x)}{\forall x P(x)} (\forall_I) \quad \neg (\forall x P(x))^1 \\
 \hline
 \neg (\forall x P(x)) \quad (\rightarrow_E) \\
 \frac{\perp}{\exists x \neg P(x)} (\perp, 2)
 \end{array}$$

Provou-se $\{\neg(\forall x P(x))\} \vdash \exists x \neg P(x)$ mostrando-se em provas por absurdo propriedades de algum x (desconhecido).

Quantificador Universal: como introduzir?

$$\{\forall x \forall y P(x, y)\} \vdash \forall y \forall x P(y, x)$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x \forall y P(x, y)^1}{\forall y P(z, y)} (\forall_E)}{P(z, x)} (\forall_E)}{\forall x P(z, x)} (\forall_I)}{\forall y \forall x P(y, x)} (\forall_I, \text{ pois } (\forall x P(z, x))\{y/z\} = \forall x P(y, x))$$

Variável a abstrair não pode ocorrer livre

$$\frac{\frac{\frac{\forall y y \geq y}{y \geq y} (\forall_E)}{\forall x x \geq y} (\forall_I)}{\exists y \forall x x \geq y} (\exists_I)$$

Esta árvore *não* é uma prova: $(x \geq y)\{y/x\} = y \geq y$, mas y não é livre em $x \geq y$.

Quantificador Universal

Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi\{y/x\}}{\forall x \varphi} (\forall_I)$$

Onde:

- 1 y não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$;
- 2 se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ .

Quantificador Existencial: como eliminar?

$$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q), \exists x P(x)\} \vdash Q$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q)^1}{P(y) \rightarrow Q} (\forall_E)}{Q} \quad \frac{P(y)^2}{Q} (\rightarrow_E)}{Q} (\exists_E, 2)$$

Ideia

Se se sabe que quando um indivíduo tem a propriedade φ se pode concluir a propriedade ψ , e se sabe que algum indivíduo tem certa propriedade φ , pode-se concluir a propriedade ψ .

Requisitos

- ① O indivíduo concreto que se assume ter a propriedade φ deve ser genérico: não pode estar (livre) nas hipóteses abertas.
- ② a propriedade a concluir não depende do indivíduo.

Quantificador Existencial

Regra de eliminação

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \exists x \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} (\varphi\{y/x\})^m \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array}}{\psi} \quad (\exists_E, m)$$

Onde:

- ❶ y não ocorre livre nem em ψ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $\varphi\{y/x\}$;
- ❷ se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ ;
- ❸ a marca m apenas fecha (eventualmente) hipóteses $\varphi\{y/x\}$ em $\mathcal{D}_2$.