

Lógica Computacional

Aula Teórica 19: Dedução Natural em Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

5 de Maio de 2010

Relembrar definição de substituição

 $\varphi\{t/x\}$

Denota a fórmula que se obtém de φ substituindo t nas ocorrências livres de x , sendo t livre para x em φ .

O problema: captura de variáveis livres

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \exists y y > x$ e $t \stackrel{\text{def}}{=} y + 1$. Então, $\varphi\{t/x\} = \exists y y > y + 1$.

O problema é que t não é livre para x em φ .

Introdução do Quantificador Existencial

Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo goza de certa propriedade, então existe algum indivíduo do universo que goza dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi\{t/x\}}{\exists x \varphi} (\exists_I)$$

Exemplo: $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash \exists x Q(x)$

$$\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))}{P(a) \rightarrow Q(a)} (\forall_E) \quad P(a)}{Q(a)} (\rightarrow_E) \quad \frac{Q(a)}{\exists x Q(x)} (\exists_I)$$

Eliminação do Quantificador Universal

Regra de eliminação

Se todos os indivíduos de dado universo gozam de certa propriedade, então cada um em particular goza também dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \forall x \varphi}{\varphi\{t/x\}} (\forall E)$$

Note-se que t tem que ser livre para x em φ .

É fácil eliminar o universal

Eliminação do Quantificador Universal

Contra-Exemplo: $\{\forall x \exists y y > x\} \not\vdash \exists y y > y + 1$

$$\exists y y > y + 1 = (\exists y y > x)\{y + 1/x\}$$

mas $y + 1$ NÃO é livre para x em $\exists y y > x$.

Exemplo: $\{\forall x \varphi\} \vdash \exists x \varphi$

Seja $y \in X$ tal que $y \notin V(\forall x \varphi)$. Logo, y é livre para x em φ .
Então,

$$\frac{\frac{\forall x \varphi^1}{\varphi\{y/x\}} (\forall_E)}{\exists x \varphi} (\exists_I)$$

Introdução do Quantificador Universal

Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi\{y/x\}}{\forall x \varphi} (\forall_I)$$

Onde:

- ① y não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$;
- ② se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ .

É fundamental garantir que o indivíduo é de facto arbitrário

Primeira condição

Variável que designa o indivíduo arbitrário não pode ocorrer livre nas hipóteses abertas da árvore de dedução.

Contra-Exemplo

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} x > 3$; logo $\varphi\{y/x\} = y > 3$. Como y não é livre para x em φ , tem-se que $\{y > 3\} \not\vdash \forall x x > 3$.

É fundamental garantir que o indivíduo é de facto arbitrário

Segunda condição

Se a variável que designa o indivíduo arbitrário não é a variável a abstrair, não pode ocorrer livre no corpo do quantificador.

Contra-Exemplo

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} x + 1 > y$; logo $\varphi\{y/x\} = y + 1 > y$. Como y não é livre para x em φ , tem-se que $\{y + 1 > y\} \not\models \forall x x + 1 > y$.

Cuidado a introduzir o universal

Combinação das regras do universal

Exemplo: $\{\forall x (\varphi \wedge \psi)\} \vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$

Seja $y \in X$ tal que $y \notin \text{VL}(\forall x (\varphi \wedge \psi))$. Logo, y é livre para x em φ e em ψ . Então,

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall x (\varphi \wedge \psi)^1}{(\varphi \wedge \psi)\{y/x\} = \varphi\{y/x\} \wedge \psi\{y/x\}} (\forall_E) \\
 \frac{\varphi\{y/x\}}{\forall x \varphi} (\forall_I) \quad \frac{\vdots}{\psi\{y/x\}} (\wedge_{E_e}) \\
 \frac{\forall x \varphi \quad \frac{\psi\{y/x\}}{\forall x \psi} (\forall_I)}{\forall x \varphi \wedge \forall x \psi} (\wedge_I)
 \end{array}$$

Quantificador Existencial

Regra de eliminação

Se se prova que existe um indivíduo que verifica a propriedade φ e que assumindo que um indivíduo arbitrário verifica a propriedades φ se prova a propriedade ψ , então prova-se a propriedade ψ .

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \exists x \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array} \quad (\varphi\{y/x\})^m}{\psi} \quad (\exists E, m)$$

- ❶ y não ocorre livre nem em ψ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $\varphi\{y/x\}$;
- ❷ se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ ;
- ❸ a marca m fecha só as hipóteses $\varphi\{y/x\}$ em $\mathcal{D}_2$.

Contra-exemplo para a segunda parte da primeira condição

$$\{P(a), Q(x)\} \not\vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

A árvore seguinte NÃO é uma prova.

$$\frac{\frac{P(a)^1}{\exists x P(x)} (\exists_I) \quad \frac{\frac{P(x)^3 \quad Q(x)^2}{P(x) \wedge Q(x)} (\wedge_I) \quad \frac{\quad}{\exists x (P(x) \wedge Q(x))} (\exists_I)}{\exists x (P(x) \wedge Q(x))} (\exists_E, 3)$$

Note-se que $P(x) = P(x)\{x/x\}$.

O problema é que a variável x ocorre livre na hipótese aberta $Q(x)$.

Contra-exemplo para a primeira parte da primeira condição

$$\{\exists x \text{ Par}(x), \forall x (\text{Par}(x) \rightarrow \text{Par}(x^2))\} \not\vdash \forall x \text{ Par}(x^2)$$

A árvore seguinte NÃO é uma prova.

$$\frac{\frac{\frac{(\exists x \text{ Par}(x))^1}{\text{Par}(x^2)} (\exists E, 3) \quad \frac{\frac{\text{Par}(x)^3}{\text{Par}(x) \rightarrow \text{Par}(x^2)} (\rightarrow E) \quad \frac{(\forall x (\text{Par}(x) \rightarrow \text{Par}(x^2)))^2}{\text{Par}(x) \rightarrow \text{Par}(x^2)} (\forall E)}{\forall x \text{ Par}(x^2)} (\forall I)}{}$$

Note-se que $\text{Par}(x) = \text{Par}(x)\{x/x\}$.

O problema é que a variável x ocorre livre no nó $\text{Par}(x^2)$.

Contra-exemplo para a segunda condição

$$\{\exists x (Par(x) \wedge y = 3)\} \not\vdash Par(y) \wedge y = 3$$

A árvore seguinte NÃO é uma prova.

$$\frac{(\exists x (Par(x) \wedge y = 3))^1 \quad (Par(y) \wedge y = 3)^2}{Par(y) \wedge y = 3} (\exists_E, 2)$$

Note-se que $Par(y) = Par(x)\{y/x\}$.

O problema é que a variável y é diferente de x mas ocorre livre em $Par(x) \wedge y = 3$.

Eliminação do Existencial

$\{\exists x \neg \varphi\} \vdash \neg \forall x \varphi$

Seja y livre para x em φ tal que $y \notin \text{VL}(\varphi)$. Então,
 $y \notin \text{VL}(\exists x \neg \varphi) \cup \text{VL}(\forall x \varphi)$. Tem-se então a seguinte prova.

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\exists x \neg \varphi)^1}{\frac{\frac{(\forall x \varphi)^2}{\varphi\{y/x\}} (\forall_E) \quad (\neg \varphi)\{y/x\} = (\neg \varphi\{y/x\})^3}{\perp} (\rightarrow_E)} \\
 \frac{\perp}{\neg \forall x \varphi} (\rightarrow_I, 2) \quad (\exists_E, 3)
 \end{array}$$

All together now

$$\{\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)), \forall x \exists y P(x, y)\} \vdash \forall x \exists y (P(x, y) \wedge P(y, x))$$

$$\frac{\frac{\frac{(\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)))^1}{\forall y (P(u, y) \rightarrow P(y, u))} (\forall_E)}{P(u, v) \rightarrow P(v, u)} (\forall_E) \quad P(u, v)^3}{\frac{P(u, v) \wedge P(v, u)}{P(v, u)} (\wedge_I)} (\forall_E)$$

$$\frac{\frac{(\forall x \exists y P(x, y))^2}{\exists y P(u, y)} (\forall_E) \quad \frac{P(u, v) \wedge P(v, u)}{\exists y (P(u, y) \wedge P(y, u))} (\exists_I)}{\exists y (P(u, y) \wedge P(y, u))} (\exists_E, 3 (C_1, C_2, C_3))$$

$$\frac{\exists y (P(u, y) \wedge P(y, u))}{\forall x \exists y (P(x, y) \wedge P(y, x))} (\forall_I (C_4, C_5))$$

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \text{VL}(\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))) \quad C_4 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \text{VL}(\forall x \exists y (P(x, y) \wedge P(y, x)))$$

$$C_2 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \text{VL}(\exists y (P(u, y) \wedge P(y, u))) \quad C_5 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \text{VL}(\exists y (P(u, y) \wedge P(y, u)))$$

$$C_3 \stackrel{\text{def}}{=} v \notin \text{VL}(P(u, y))$$