Lógica Computacional

Aula Teórica 21: Forma Normal de Skolem

António Ravara

Departamento de Informática

12 de Maio de 2011

Forma Normal de Skolem

Ideia

A fórmula está na FNCP e os quantificadores são todos universais.

Exemplos

- $Q(x) \vee P(x, y)$;
- $\forall x\, f(x) = y$;
- $\forall x\, P(x, f(x))$;
- $\forall x\, (f(x) = y \wedge (Q(x) \vee P(x, f(x))))$.

Contra-Exemplos

- $\exists y\, P(x, y)$;
- $\forall x\, \exists y\, f(x) = y$;
- $\neg \forall x\, (f(x) = y \wedge P(x, f(x)))$.

Forma Normal de Skolem

Definição

Uma fórmula φ da linguagem de primeira ordem está na Forma Normal de Skolem ou FNS (e escreve-se FNS(φ)), se

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$$

sendo ψ uma fórmula de primeira ordem sem quantificadores tal que FNC(ψ).

Função de Skolem

Procedimento de conversão

Dada uma fórmula φ da linguagem de primeira ordem, obtém-se a partir dela uma fórmula ψ na Forma Normal de Skolem da seguinte forma:

- Obtém-se primeiro uma fórmula $\phi \equiv \varphi$ tal que FNCP(ϕ);
- Se ϕ tem $k > 0$ quantificadores existenciais, então $s^k(\phi)$ está na FNS, sendo s a seguinte função (de Skolem).
  - $s(\exists x\, Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, \psi) = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\, \psi\{a/x\}$, sendo a uma constante que não ocorre em ψ;
  - $s(\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i\, Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n\, \psi) =$ $\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1}\, Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n\, \psi\{f(x_1, \ldots, x_{i-1})/x_i\}$, sendo f uma função de aridade $i-1$ que não ocorre em ψ.

Função de Skolem

Exemplo de conversão

Seja $\varphi = \neg(\forall x\, \exists y\, P(x,y,z) \vee \exists x\, \forall y\, \neg Q(x,y,z))$.

Como φ não está na FNCP, faz-se primeiro a conversão.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi & \equiv & \neg\forall x\, \exists y\, P(x,y,z) \wedge \neg\exists x\, \forall y\, \neg Q(x,y,z) \\
& \equiv & \exists x\, \neg\exists y\, P(x,y,z) \wedge \forall x\, \neg\forall y\, \neg Q(x,y,z) \\
& \equiv & \exists x\, \forall y\, \neg P(x,y,z) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg\neg Q(x,y,z) \\
& \equiv & \exists x\, \forall y\, \neg P(x,y,z) \wedge \forall u\, \exists v\, Q(u,v,z) \\
& \equiv & \exists x\, \forall y\, (\neg P(x,y,z) \wedge \forall u\, \exists v\, Q(u,v,z)) \\
& \equiv & \exists x\, \forall y\, (\forall u\, \exists v\, Q(u,v,z) \wedge \neg P(x,y,z)) \\
& \equiv & \exists x\, \forall y\, \forall u\, \exists v\, (Q(u,v,z) \wedge \neg P(x,y,z)) = \phi
\end{array}$$

Função de Skolem

Exemplo de conversão

Seja $\varphi = \neg(\forall x\, \exists y\, P(x, y, z) \vee \exists x\, \forall y\, \neg Q(x, y, z))$. Calculou-se já $\phi \equiv \varphi$ tal que FNCP(ϕ). Faz-se agora a sua Skolemização: pretende-se encontrar uma fórmula $\psi = s^2(\phi)$.

$$\begin{aligned} s(s(\phi)) &= s(s(\exists x\, \forall y\, \forall u\, \exists v\, (Q(u, v, z) \wedge \neg P(x, y, z)))) \\ &= s(\forall y\, \forall u\, \exists v\, (Q(u, v, z) \wedge \neg P(a, y, z))) \\ &= \forall y\, \forall u\, (Q(u, f(y, u), z) \wedge \neg P(a, y, z))) = \psi \end{aligned}$$

Note-se que as fórmulas φ e ψ não são equivalentes. No entanto, uma é possível se e só se a outra o é.

Resultado

Lema da Satisfação

Para qualquer fórmula de primeira ordem φ tal que FNCP(φ), existe uma fórmula de primeira ordem ψ tal que:

1. $\psi = s^k(\varphi)$, sendo k o número de quantificadores existenciais de φ;
2. FNS(ψ); e
3. φ é possível se e só se ψ é possível.

Prova do Lema de Skolem

Mostra-se por indução natural em k

Caso base: $k = 1$.

Considera-se primeiro que $\varphi \equiv \exists x\, \phi$ com FNS(ϕ).

Para alguma constante u que não ocorre em ϕ tem-se $s(\exists x\, \phi) = \phi\{u/x\}$. Por definição, φ é possível se e só se para alguma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ e atribuição ρ se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \phi$, ou seja, se e só se existe $u \in U$ tal que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \phi$, *i.e.*, se e só se $\phi\{u/x\}$ é possível.

Prova do Lema de Skolem

Mostra-se por indução natural em k

Caso base: $k = 1$.

Considera-se agora que $\varphi \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \exists x \, \phi$ com FNS(ϕ).

Para alguma função n-ária f que não ocorre em ϕ tem-se $s(\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \exists x \, \phi) = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \phi\{f(x_1, \ldots, x_n)/x\}$. Logo, por definição, φ é possível se e só se para alguma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ e atribuição ρ se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \exists x \, \phi$, ou seja, para quaisquer $u_1, \ldots, u_n \in U$ e algum $u \in U$ tem-se $\mathcal{M}, \rho[x_1 := u_1] \cdots [x_n := u_n][x := u] \Vdash \phi$.

Sabe-se que se $t \in T_\Sigma^X$ tal que t é livre para x em φ e $[\![t]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = u$ então $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi\{t/x\}$. Fazendo $\rho' = \rho[x_1 := u_1] \cdots [x_n := u_n]$ e $t = f(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $[\![t]\!]^{\rho'}_{\mathcal{M}} = u$, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x_1 := u_1] \cdots [x_n := u_n][x := u] \Vdash \phi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \phi\{f(x_1, \ldots, x_n)/x\}$.

Lema da Satisfação

Prova

Mostra-se por indução natural em k. Passo: $k = l + 1$.

Então, $\psi = s^k(\varphi) = s(s^l(\varphi))$. Seja $\phi = s^l(\varphi)$ tal que FNS(ϕ).

Por hipótese de indução, ϕ é possível se e só se φ é possível. Procedendo como para os casos base, conclui-se que ψ é possível se e só se φ é possível (pois a equivalência é transitiva).