

Lógica Computacional

Aula Teórica 23: Resolução em Lógica de Primeira Ordem

António Ravara

Departamento de Informática

26 de Maio de 2011

Resolventes de Primeira Ordem

Dada uma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ tal que $FNS(\varphi)$, define-se $Res^*(\varphi)$ de forma idêntica à da Lógica Proposicional.

Para dado literal positivo L , seja $\bar{L} = \neg L$ ou $\overline{\bar{L}} = L$.

Definição

Considerem-se duas cláusulas C_1 e C_2 e duas substituições s_1 e s_2 tal que C_1s_1 e C_2s_2 não partilham variáveis.

Seja $\mathcal{L} = \{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m, L'_1, \dots, L'_n\}$ um conjunto unificável de literais positivos tal que

$\{L_1, \dots, L_m\} \subseteq C_1s_1$ e $\{L'_1, \dots, L'_n\} \subseteq C_2s_2$.

Se $sub = umg(\mathcal{L})$ então

$$R = ((C_1s_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (C_2s_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\}))sub$$

é um resolvente de C_1 e C_2 (ditos seus “pais”).

Exemplo: um resolvente

$$C_1 = \{Q(x, y), P(f(x), y)\} \text{ e}$$

$$C_2 = \{R(x, c), \neg P(f(c), x), \neg P(f(y), h(a))\}$$

Como encontrar um resolvente de C_1 e C_2 ?

- 1 Faz-se conversão- α porque C_1 e C_2 partilham variáveis.

Seja $s_1 = \{u, v/x, y\}$. Então $C_1s_1 = \{Q(u, v), P(f(u), v)\}$.

- 2 Considere-se $\mathcal{L} = \{P(f(u), v), P(f(c), x), P(f(y), h(a))\}$.

$\mathcal{L}$ é unificável, sendo o seu *umg* a sequência de substituições $sub = \{c, h(a), h(a), c/u, v, x, y\}$.

O resolvente de C_1 e C_2 é então

$$((C_1s_1 \setminus \{P(f(u), v)\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg P(f(c), x), \neg P(f(y), h(a))\}))sub = \{Q(u, v), R(x, c)\}sub = \{Q(c, h(a)), R(h(a), c)\}.$$

Exemplo: resolução em primeira ordem

Verifica-se que a seguinte fórmula é contraditória

$$(\neg P(x, f(x)) \vee \neg Q(f(x), x)) \wedge (P(x, y) \vee P(x, f(x))) \wedge (Q(y, x) \vee Q(f(x), x))$$

Considere-se:

- $s_2 = \{u/x\}\{v/y\}$, sendo então $C_2s_2 = \{P(u, v), P(u, f(u))\}$
- $s_3 = \{z/x\}\{w/y\}$, sendo então $C_3s_3 = \{Q(w, z), Q(f(z), z)\}$
- $umg_1 = \{x/z\}\{f(x)/w\}$, sendo então
 $\{Q(w, z), Q(f(z), z), Q(f(x), x)\}umg_1 =$
 $\{Q(w, x), Q(f(x), x)\}\{f(x)/w\} = \{Q(f(x), x)\}$
- $umg_2 = \{x/u\}\{f(x)/v\}$, sendo então
 $\{P(u, v), P(u, f(u)), P(x, f(x))\}umg_2 =$
 $\{P(x, v), P(x, f(x))\}\{f(x)/v\} = \{P(x, f(x))\}$

Resolvendo C_3s_3 com C_1 usando o umg_1 obtém-se o resolvente $\{\neg P(x, f(x))\}$, que resolvido com C_2s_2 usando o umg_2 dá a cláusula vazia. Conclui-se que a fórmula é contraditória.

Correcção da regra do resolvente

Lema

Seja R resolvente de C_1 e de C_2 , e considere as fórmulas ψ resultante de R , φ_1 resultante de C_1 e φ_2 resultante de C_2 . Então $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$.

Proposição: resolvente é consequência das cláusulas

Se φ é uma fórmula que resulta da cláusula C e ψ é uma fórmula que resulta da cláusula C_{sub} , sendo sub uma sequência de substituições. Então $\models \varphi \rightarrow \psi$.

Correcção da resolução

Lema da resolução

Dada uma fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ tal que $\text{FNS}(\varphi)$, tem-se que φ é contraditória se e só se $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$.

Proposição

Dadas fórmulas $\varphi, \psi, \gamma \in F_{\Sigma}^X$ tal que $\text{FNS}(\gamma)$ e $\gamma \equiv \varphi \wedge \neg\psi$, tem-se que $\{\varphi\} \models \psi$ se e só se $\emptyset \in \text{Res}^*(\gamma)$.

Objectivo

Procedimento automático

- Pretende-se encontrar formas de implementar o método de resolução, de forma que seja totalmente automático.
- É necessário encontrar uma ordem de calcular os resolventes das cláusulas de forma a “gerar” $\emptyset$.
- Estratégias “cegas” ou ad-hoc não são (necessariamente) eficientes.

Estratégias de resolução

Resolução Negativa

Se no cálculo de $\text{Res}^*(\varphi)$ cada resolvente é encontrado a partir de uma das cláusulas com apenas literais negados, diz-se que se está a fazer Resolução-N.

Resolução Linear

Se no cálculo de $\text{Res}^*(\varphi)$ cada resolvente é encontrado a partir de uma das cláusulas que é o resolvente do passo anterior, diz-se que se está a fazer Resolução-L.

Proposição

Seja $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ tal que $\text{FNS}(\varphi)$ e considere-se que $\text{Res}^*(\varphi)$ foi obtido por Resolução-N ou por Resolução-L. Tem-se que φ é contraditória se e só se $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$.

Exemplo: $\mathcal{C} = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, D\}, \{\neg C\}, \{\neg D\}\}$

Resolução-N, solução 1

Dedução	Justificação
$\{\neg A, C\}$	Cláusula C_2
$\{\neg C\}$	Cláusula C_4
$\{\neg A\}$	Resolvente de C_2 e C_4
$\{A, B\}$	Cláusula C_1
$\{B\}$	Resolvente de $\{\neg A\}$ e C_1
$\{\neg B, D\}$	Cláusula C_3
$\{\neg D\}$	Cláusula C_5
$\{\neg B\}$	Resolvente de C_3 e C_5
$\emptyset$	Resolvente de $\{B\}$ e $\{\neg B\}$

Pela proposição anterior conclui-se que a fórmula é contraditória.

Exemplo: $\mathcal{C} = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, D\}, \{\neg C\}, \{\neg D\}\}$

Resolução-N, solução 2

Dedução	Justificação
$\{\neg B, D\}$	Cláusula C_3
$\{\neg D\}$	Cláusula C_5
$\{\neg B\}$	Resolvente de C_3 e C_5
$\{\neg A, C\}$	Cláusula C_2
$\{\neg C\}$	Cláusula C_4
$\{\neg A\}$	Resolvente de C_2 e C_4
$\{A, B\}$	Cláusula C_1
$\{B\}$	Resolvente de $\{\neg A\}$ e C_1
$\emptyset$	Resolvente de $\{B\}$ e $\{\neg B\}$

Pela proposição anterior conclui-se que a fórmula é contraditória.

Exemplo: $\mathcal{C} = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, D\}, \{\neg C\}, \{\neg D\}\}$

Resolução-L, solução 1

Dedução	Justificação
$\{\neg A, C\}$	Cláusula C_2
$\{\neg C\}$	Cláusula C_4
$\{\neg A\}$	Resolvente de C_2 e C_4
$\{A, B\}$	Cláusula C_1
$\{B\}$	Resolvente de $\{\neg A\}$ e C_1
$\{\neg B, D\}$	Cláusula C_3
$\{D\}$	Resolvente de $\{B\}$ e C_3
$\{\neg D\}$	Cláusula C_5
$\emptyset$	Resolvente de $\{D\}$ e C_5

Pela proposição anterior conclui-se que a fórmula é contraditória.

Exemplo: $\mathcal{C} = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, D\}, \{\neg C\}, \{\neg D\}\}$

Resolução-L, solução 2

Dedução	Justificação
$\{\neg B, D\}$	Cláusula C_3
$\{\neg D\}$	Cláusula C_5
$\{\neg B\}$	Resolvente de C_3 e C_5
$\{A, B\}$	Cláusula C_1
$\{A\}$	Resolvente de $\{\neg B\}$ e C_1
$\{\neg A, C\}$	Cláusula C_2
$\{C\}$	Resolvente de $\{A\}$ e C_2
$\{\neg C\}$	Cláusula C_4
$\emptyset$	Resolvente de $\{C\}$ e C_4

Pela proposição anterior conclui-se que a fórmula é contraditória.

Pode-se sempre fazer Resolução-LN (seria a melhor estratégia!)?

Exemplo: $\mathcal{C} = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, D\}, \{\neg C\}, \{\neg D\}\}$

Por Resolução-LN não dá

Ou se começa de C_4 ou de C_5 .

- Começando com C_4 obtém-se $\{B\}$, mas não se tem $\{\neg B\}$
Como tem que se pegar em C_3 , falha a estratégia N
- Começando com C_5 obtém-se num passo $\{\neg B\}$, mas não se tem $\{B\}$; como se tem $\{A, B\}$ obtém-se $\{A\}$, mas não se tem $\{\neg A\}$ — falha de novo a estratégia N.

Logo não se pode seguir só a estratégia LN.

Fórmulas de Horn

Definição

Seja $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ tal que $FNS(\varphi)$. Se cada cláusula em φ contém no máximo um literal positivo, então φ diz-se uma fórmula de Horn.

Proposição

Seja $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ tal que $FNS(\varphi)$. Se φ é uma fórmula de Horn então φ é contraditória se e só se $\emptyset$ pode ser derivado de φ por Resolução-LN.

Resolução-SLD

Terminologia

- Cláusulas só com um literal positivo dizem-se *definitivas* (porque “definem”).
- No processo de resolução pode haver várias formas de resolver (“cancelar”) esse literal positivo. Chama-se *função de selecção* a uma estratégia de escolha do literal a cancelar com o positivo.
- A função de selecção deve ser *invariante* para qualquer função de substituição.

Definição

Resolução-SLD (Linear e Definitiva, com Selector) é a Resolução-LN com uma função de selecção.

Exemplo:

$$\mathcal{C} = \{\{\neg A, C\}, \{A, \neg B\}, \{B\}, \{\neg D, \neg C\}, \{D, \neg E\}, \{E\}\}$$

Resolução-SLD, selector "à direita"

Dedução	Justificação
$\{\neg D, \underline{\neg C}\}$	Cláusula C_4
$\{\neg A, C\}$	Cláusula C_1
$\{\neg A, \underline{\neg D}\}$	Resolvente de C_1 e C_4
$\{D, \neg E\}$	Cláusula C_5
$\{\neg E, \underline{\neg A}\}$	Resolvente de $\{\neg A, \neg D\}$ e C_5
$\{A, \neg B\}$	Cláusula C_2
$\{\neg B, \underline{\neg E}\}$	Resolvente de $\{\neg E, \neg A\}$ e C_2
$\{E\}$	Cláusula C_6
$\{\neg B\}$	Resolvente de $\{\neg B, \neg E\}$ e C_6
$\{B\}$	Cláusula C_3
$\emptyset$	Resolvente de $\{\neg B\}$ e C_3