

Lógica Computacional

Aula Teórica 2: Sintaxe da Lógica Proposicional

António Ravara

Departamento de Informática

17 de Fevereiro de 2011

Lógica proposicional

Objecto

- Ocupa-se do estudo do comportamento dos conectivos lógicos (negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência) e das regras que os manipulam.
- Linguagem das *asserções* ou *proposições*: afirmações que são ou verdadeiras ou falsas.
- Linguagem construída a partir de símbolos proposicionais (asserções básicas) e conectivos lógicos (ligam asserções).

Asserções

Exemplos

- Básicas:
 - hoje chove;
 - todo o natural par $n > 2$ é a soma de dois primos.
- Compostas:
 - estudo hoje ou amanhã;
 - jogo hoje e amanhã;
 - se tenho aulas então vou à Faculdade;
 - n é par se e só se $\text{mod}(n, 2) = 0$.
- Não são asserções:
 - passe-me o sal, se faz favor;
 - quanto mais depressa, mais devagar.

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Objectivo

- Obter a linguagem formal das fórmulas proposicionais.
- A partir de um alfabeto (conjunto de símbolos, representando asserções) define-se como construir palavras (sequências finitas de símbolos, ditas *fórmulas*).

Alfabeto proposicional sobre um conjunto P

Seja P um conjunto numerável (de símbolos proposicionais).

O *alfabeto proposicional sobre P* , denotado Alf_P , é constituído:

- por cada um dos elementos de P ;
- pelo símbolo $\perp$ (falso, ou absurdo);
- pelos conectivos disjunção, $\vee$, conjunção, $\wedge$ e implicação, $\rightarrow$;
- pelos parênteses esquerdo e direito, (e).

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Linguagem proposicional induzida por Alf_P

A *linguagem proposicional induzida por Alf_P* , denotada F_P , é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

- $\perp \in F_P$;
- se $p \in P$ então $p \in F_P$;
- se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_P$, $(\varphi \wedge \psi) \in F_P$ e $(\varphi \rightarrow \psi) \in F_P$.

Terminologia

- Os elementos de F_P dizem-se *fórmulas*.
- Os elementos de P e o símbolo $\perp$ dizem-se fórmulas *atómicas*.

Tradução da linguagem natural para lógica proposicional

Intuição

- Os símbolos proposicionais representam asserções básicas (afirmações verdadeiras ou falsas).
- O conectivo disjunção representa alternativa. Uma frase que comece por “ou” e tenha um número par de ocorrências dessa palavra procura não ser ambígua.
- O conectivo conjunção indica que a frase só é verdade se cada uma das partes o for. A fórmula $p \wedge q$ traduz as frases “ p e q ”, “tanto p como q ”, “ p tal como q ”, etc,...
- O conectivo implicação representa consequência. A fórmula $p \rightarrow q$ traduz as frases “se p então q ”, “se p , q ”, “ q se p ”, “ p só se q ”, “caso p então q ”, “caso p , q ”, “como p , q ”, etc,...

Tradução da linguagem natural para lógica proposicional

Exemplos

- “gosto de lógica” escreve-se p ;
“gosto de álgebra” escreve-se q ;
- “gosto de lógica e de álgebra” escreve-se $p \wedge q$;
- “ou gosto de lógica ou de álgebra” escreve-se $p \vee q$;
- “gosto de lógica ou de álgebra e de análise” é ambígua, mas
“ou gosto de lógica ou de álgebra e de análise” já não;
nas fórmulas, os parênteses desambigam: $p \vee q \wedge r$ é
ambígua, mas $p \vee (q \wedge r)$ já não.
- Há ambiguidades difíceis de resolver: “o Pedro foi ao médico
e ficou doente” tanto pode querer dizer $p \wedge q$ como $p \rightarrow q$.

Sintaxe da lógica proposicional

Convenção

Para simplificar a notação omitem-se os parênteses mais exteriores das fórmulas.

Exemplos

Sejam $p, q, r \in P$.

- Fórmulas: $p \vee q \in F_P$, $(p \vee q) \rightarrow r \in F_P$, $p \rightarrow (q \wedge r) \in F_P$.
- Não são fórmulas: $pq \notin F_P$, $p \vee \notin F_P$, $\rightarrow q \notin F_P$, porque não foram seguidas as regras para definir fórmulas.

Conceitos auxiliares

Abreviaturas

São úteis novos conectivos para abreviar alguns tipos de fórmulas.

- Negação: $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \rightarrow \perp$;
- Verdade: $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\perp$;
- Equivalência: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Consideramos que o conectivo $\neg$ tem precedência sobre os outros.

Exemplos

- $\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{abv}}{=} ((\varphi \rightarrow \perp) \wedge \psi) \rightarrow \perp$
- $\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \vee \delta) \stackrel{\text{abv}}{=} ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow (\psi \vee \delta)) \wedge ((\psi \vee \delta) \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp))$

Conceitos auxiliares

Subfórmulas de uma fórmula

O conjunto $\text{SBF}(\varphi)$ das subfórmulas de $\varphi \in F_P$ é definido indutivamente pelas seguintes regras:

- $\text{SBF}(\varphi) = \{\varphi\}$, se φ é atómica;
- seja $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \vee \psi$, $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \wedge \psi$ ou $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \rightarrow \psi$;

$$\text{SBF}(\delta) = \{\delta\} \cup \text{SBF}(\varphi) \cup \text{SBF}(\psi).$$

Símbolos proposicionais de uma fórmula

O conjunto $\text{SMB}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{SBF}(\varphi) \cap P$ contém os símbolos proposicionais de uma fórmula $\varphi \in F_P$.

Exemplos

Símbolos proposicionais e subfórmulas de uma fórmula

Sejam $p, q, r \in P$ e $\neg p, (p \vee q) \rightarrow r \in F_P$.

- $SMB(\neg p) = \{p\}$ e $SBF(\neg p) = SBF(p \rightarrow \perp) = \{\neg p\} \cup SBF(p) \cup SBF(\perp) = \{\neg p, p, \perp\}$;
- $SMB((p \vee q) \rightarrow r) = \{p, q, r\}$

$$\begin{aligned} SBF((p \vee q) \rightarrow r) &= \{(p \vee q) \rightarrow r\} \cup SBF(p \vee q) \cup SBF(r) = \\ &= \{(p \vee q) \rightarrow r\} \cup \{p \vee q\} \cup SBF(p) \cup SBF(q) \cup \{r\} = \\ &= \{(p \vee q) \rightarrow r, p \vee q, p, q, r\}. \end{aligned}$$