Lógica Computacional

Aula Teórica 3: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara

Departamento de Informática

21 de Fevereiro de 2011

Estrutura de interpretação

Intuição

- A lógica proposicional trata da representação e manipulação de *asserções*.
- Dada uma fórmula da lógica, quer-se determinar o seu valor de verdade (0 — falsa, ou 1 — verdadeira).
- É necessário:
  - atribuir valores aos símbolos proposicionais;
  - avaliar as suas subfórmulas (estritas), interpretando os conectivos (que têm carácter funcional, *i.e.*, interpretação fixa).

Estrutura de interpretação

Definição

Uma *estrutura de interpretação* (ou *valoração*) sobre um conjunto de símbolos proposicionais P é uma *função* $V : P \to \{0, 1\}$.

Intuição

- Se um símbolo proposicional p representa uma asserção verdadeira, então $V(p) = 1$; senão $V(p) = 0$.
- Para cada V considera-se a atribuição de valores aos símbolos de P fixada.

Satisfação de fórmulas

Intuição

- A avaliação de uma fórmula é feita em dada estrutura de interpretação.
- Diz-se que a fórmula é *satisfeita* pela estrutura se é avaliada ao valor 1; senão não é satisfeita.
- A avaliação da fórmula depende da valoração dos seus símbolos proposicionais e dos conectivos lógicos nela presentes.
- A avaliação da fórmula pode variar conforme as valorações, mas a avaliação dos conectivos é fixa (funcional).

Satisfação de fórmulas

Definição

Seja V uma *valoração* sobre um conjunto de símbolos proposicionais P.

A relação de *satisfação* de uma fórmula $\varphi \in F_P$ por uma valoração V, denotada por $V \Vdash \varphi$, é definida indutivamente pelas seguintes regras:

- para cada $p \in P$, tem-se $V \Vdash p$, se $V(p) = 1$;
- não se verifica $V \Vdash \perp$;
- $V \Vdash \varphi \vee \psi$, se $V \Vdash \varphi$ ou $V \Vdash \psi$;
- $V \Vdash \varphi \wedge \psi$, se $V \Vdash \varphi$ e $V \Vdash \psi$;
- $V \Vdash \varphi \rightarrow \psi$, se sempre que $V \Vdash \varphi$ também $V \Vdash \psi$.

Satisfação de fórmulas

Terminologia e notação

- Se $V \Vdash \varphi$ diz-se que φ é *satisfeita* por V, ou que φ é *verdadeira* por V.
- Escreve-se $V \nVdash \varphi$ quando não se verifica $V \Vdash \varphi$;
  diz-se que φ não é satisfeita por V, ou que φ é falsa por V.
- Dado $\Phi \subseteq F_P$, escreve-se $V \Vdash \Phi$, se $V \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$.

Satisfação de fórmulas

Provas

Sejam $p, q \in P$ e $V : P \to \{0, 1\}$ tal que $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$.

- $V \Vdash p \vee q$, pois $V \Vdash p$, logo $V \Vdash p$ ou $V \Vdash q$;
- $V \nVdash p \wedge q$, pois $V \Vdash p \wedge q$ se $V \Vdash p$ e $V \Vdash q$, mas $V \nVdash q$;
- $V \Vdash p \to p$, pois $V \Vdash p$, logo se $V \Vdash p$ então $V \Vdash p$;
- $V \Vdash q \to q$, pois $V \nVdash q$, logo se $V \Vdash q$ então $V \Vdash q$;
- $V \Vdash q \to p$, pois $V \nVdash q$, logo se $V \Vdash q$ então $V \Vdash p$;
- $V \nVdash p \to q$, pois $V \Vdash p$ mas $V \nVdash q$.

Intuição

Uma implicação só não é satisfeita quando o antecedente é verdadeiro mas o consequente falso.

Lema

Satisfazer ou não satisfazer...

- $V \nVdash \varphi$ se e só se $V \Vdash \neg\varphi$
- $V \Vdash \varphi$ se e só se $V \nVdash \neg\varphi$

Prova

Definiu-se $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \to \bot$. Prova-se a primeira afirmação (a segunda é semelhante).

Sentido "só se": Por hipótese $V \nVdash \varphi$. Logo, vacuosamente, sempre que $V \Vdash \varphi$ também $V \Vdash \bot$, ou seja, $V \Vdash \varphi \to \bot$, *i.e.*, $V \Vdash \neg\varphi$.

Sentido "se": Por hipótese $V \Vdash \neg\varphi$, *i.e.*, $V \Vdash \varphi \to \bot$. Como nunca se tem $V \Vdash \bot$, então $V \nVdash \varphi$.

Fórmula possível

Intuição

Há fórmulas que que são satisfeitas por algumas valorações: dizem-se *possíveis*.

Exemplo

Sejam $p, q \in P$, $V_1 : P \to \{0,1\}$ tal que $V_1(p) = 1$ e $V_1(q) = 0$, e $V_2 : P \to \{0,1\}$ tal que $V_2(p) = 0$ e $V_2(q) = 0$.

Tem-se que $V_1 \Vdash p \vee q$, pois $V_1(p) = 1$;

No entanto, $V_2 \nVdash p \vee q$, pois $V_2(p) = 0$ e $V_2(q) = 0$.

Fórmula válida

Intuição

Há fórmulas que são satisfeitas por todas as valorações: dizem-se *válidas* ou *tautologias*.

Exemplo: qualquer V satisfaz $p \vee \neg p$

Prova: $V \Vdash p \vee \neg p$, se $V \Vdash p$ ou se $V \Vdash \neg p$, *i.e.*, se $V(p) = 1$ ou $V(p) = 0$, que tem que se verificar porque V é uma função.

Notar

Se uma fórmula é válida, é possível.

Fórmula contraditória

Intuição

Há fórmulas que não podem ser satisfeitas por nenhuma valoração: dizem-se *contraditórias*.

Exemplo: nenhum V satisfaz $p \wedge \neg p$.

Prova por absurdo: $V \Vdash p \wedge \neg p$, se $V \Vdash p$ e $V \Vdash \neg p$, ou seja, se $V \Vdash p$ e $V \nVdash p$, o que implica $V(p) = 1$ e $V(p) = 0$, que é impossível porque V é uma função.

Fórmula possível, contraditória e válida

Terminologia

A fórmula $\varphi \in F_P$ diz-se:

- *possível*, se existe alguma estrutura de interpretação V sobre P que a satisfaz;
- *válida* (e denota-se $\models \varphi$), se toda a estrutura de interpretação V sobre P a satisfaz;
- *contraditória*, se nenhuma estrutura de interpretação V sobre P a satisfaz;
- uma fórmula proposicional válida diz-se também uma *tautologia*;
- escreve-se $\not\models \varphi$ se φ não é uma tautologia;
- um conjunto de fórmulas $\Phi \subseteq F_P$ diz-se *possível* se existe uma estrutura de interpretação V sobre P que satisfaz todas as fórmulas em Φ; caso contrário diz-se *contraditório*.

Possível, contraditória e válida: inter-relações

Lema

A fórmula que não é:

- válida, pode ser possível ou contraditória;
- contraditória, pode ser possível ou válida;
- possível também não pode ser válida, logo é contraditória.

Lema

A negação de uma fórmula:

- válida, é contraditória;
- contraditória, é válida;
- possível (não válida), é possível.

Primeiro lema

Prova

- Uma fórmula é não válida, se não é verdade que todas as valorações a satisfazem, ou seja, alguma valoração não a satisfaz. Se uma outra valoração a satisfaz, então é possível; se não é contraditória.
- Mostrar que uma fórmula não contraditória é possível ou válida usa raciocínio semelhante.
- Uma fórmula que não é possível, não tem nem uma valoração que a satisfaça. Obviamente não é válida (todas as valorações a tinham que satisfazer), e como nenhuma valoração a satisfaz é, por definição, contraditória.

Segundo lema

Prova

- Seja φ uma fórmula válida, *i.e.*, todas as valorações a satisfazem ($\models \varphi$); então, cada valoração não satisfaz $\neg\varphi$, ou seja, tem-se para qualquer V que$V \nVdash \neg\varphi$; logo, $\neg\varphi$ é contraditória.
- Mostrar que a negação de uma fórmula contraditória é válida usa raciocínio semelhante.
- Uma fórmula possível (não válida) φ tem alguma valoração V_1 que a satisfaz e que uma outra valoração V_2 que não a satisfaz. Como vimos, $V \Vdash \varphi$ se e só se $V \nVdash \neg\varphi$, logo $V_1 \nVdash \neg\varphi$ e $V_2 \Vdash \neg\varphi$, sendo então $\neg\varphi$ possível (não válida).

Tabelas de verdade

Análise de fórmulas

Pode-se determinar a natureza de dada fórmula (possível, contraditória ou válida) analisando todas as possíveis atribuições de valor aos seus símbolos proposicionais.

Construção da tabela de dada fórmula

Nas linhas colocam-se todas as possíveis combinações de valores para os seus símbolos proposicionais; faz-se uma coluna para cada subfórmula.

Tabelas de verdade

Tabelas da disjunção, conjunção e implicação

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
0	0	0	0	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Tabela da negação

p	$\perp$	$\neg p \stackrel{\text{abv}}{=} p \rightarrow \perp$
0	0	1
1	0	0

Tabelas de verdade

Análise de fórmulas

- Se uma fórmula é possível, então alguma linha da sua tabela está a 1.
- Se uma fórmula é contraditória, então todas as linhas da sua tabela estão a 0.
- Se uma fórmula é válida, então todas as linhas da sua tabela estão a 1.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $(p \wedge q) \rightarrow \perp$

p	q	$\perp$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow \perp$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

Fórmula possível

Como a coluna da fórmula (a da direita) tem zeros e uns, há valorações que a satisfazem mas há uma valoração que não a satisfaz.
Na verdade não é necessário apresentar todas as linhas.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $(p \vee \neg p) \rightarrow \perp$

p	$\perp$	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$(p \vee \neg p) \rightarrow \perp$
0	0	1	1	0
1	0	0	1	0

Fórmula contraditória

Como a coluna da fórmula (a da direita) só tem zeros, nenhuma valoração a satisfaz.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $\perp \to (p \land q)$

p	q	$\perp$	$p \land q$	$\perp \to (p \land q)$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

Fórmula válida

Como a coluna da fórmula (a da direita) só tem uns, todas as valorações a satisfazem.