

Lógica Computacional

Aula Teórica 4: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara

Departamento de Informática

24 de Fevereiro de 2011

Análise por via semântica

Existe algum V que satisfaça $(p \wedge q) \rightarrow \perp$?

Por definição $V \models \varphi \rightarrow \psi$ se sempre que $V \models \varphi$ também $V \models \psi$.

Como para nenhum V se tem que $V \models \perp$, então de igual forma para nenhum V se pode ter $V \models p \wedge q$, ou seja, não se pode ter $V(p) = 1 = V(q)$.

No entanto, se $V \not\models p \wedge q$ então $V \models (p \wedge q) \rightarrow \perp$.

Conclui-se que todo o V tal que ou $V(p) \neq 1$ ou $V(q) \neq 1$ satisfaz $(p \wedge q) \rightarrow \perp$.

Como se encontraram valorações que não satisfazem a fórmula e outras que a satisfazem, a fórmula é possível.

Análise por via semântica

Existe algum V que satisfaça $(p \vee \neg p) \rightarrow \perp$?

Por definição $V \models \varphi \rightarrow \psi$ se sempre que $V \models \varphi$ também $V \models \psi$.

Como para nenhum V se tem que $V \models \perp$, então de igual forma para nenhum V se pode ter $(p \vee \neg p)$.

Mas só se tem que $V \not\models p \vee \neg p$ se $V \not\models p$ e $V \not\models \neg p$, o que é impossível porque V é uma função e $V(p) = 1$ (logo $V \models p$) ou $V(p) = 0$ (logo $V \models \neg p$), portanto todo o V satisfaz $p \vee \neg p$.

Conclui-se que nenhum V satisfaz $(p \vee \neg p) \rightarrow \perp$, que é então uma fórmula contraditória.

Existe algum V que satisfaça $\perp \rightarrow (p \wedge q)$?

Por definição $V \models \varphi \rightarrow \psi$ se sempre que $V \models \varphi$ também $V \models \psi$.

Como para nenhum V se tem que $V \models \perp$, conclui-se que todo o V satisfaz $\perp \rightarrow (p \wedge q)$, que é então uma fórmula válida.

Análise por via semântica

Um caso mais elaborado

Quer-se provar que $\models ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$. É necessário mostrar para qualquer V , que sempre que $V \models (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi$ também $V \models \psi$. Há duas estratégias possíveis: a prova directa ou por absurdo.

Prova directa

Considera-se então por hipótese que $V \models (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi$, ou seja:

- 1 que $V \models \varphi \rightarrow \psi$;
- 2 e que $V \models \varphi$.

Por 1 tem-se que sempre que $V \models \varphi$ também $V \models \psi$, e como por 2 se tem que $V \models \varphi$, então tem-se que $V \models \psi$.

Conclui-se que todo o V satisfaz $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$.

Análise por via semântica

Prova por absurdo

Considera-se então que $\not\models ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$, ou seja, que existe algum V que não satisfaz $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$.

Necessariamente, $V \models (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi$ mas $V \not\models \psi$, ou seja:

- ① $V \models \varphi \rightarrow \psi$; e
- ② $V \models \varphi$;
- ③ mas $V \not\models \psi$.

Por 1 tem-se que sempre que $V \models \varphi$ também $V \models \psi$, e como por 2 se tem que $V \models \varphi$, então tem-se que $V \models \psi$.

Mas esta ultima conclusão está em contradição com 3, logo a hipótese inicial é falsa.

Conclui-se que todo o V satisfaz $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$.

As tabelas de verdade coincidem com a semântica definida?

Intuição

- A satisfação de uma fórmula $\varphi \in F_P$ por dada valoração V depende apenas do valor que V atribui a cada $p \in \text{SMB}(\varphi)$.
- Dadas duas valorações V_1 e V_2 que atribuem os mesmos valores aos símbolos proposicionais de φ , ou ambas satisfazem φ ou nenhuma o satisfaz.
- Logo, a análise exaustiva das possíveis valorações para os símbolos de dada fórmula, permite decidir a natureza da fórmula.

Proposição

Sejam V_1 e V_2 valorações sobre P . Para qualquer $\varphi \in F_P$, se $V_1(p) = V_2(p)$ para cada $p \in \text{SMB}(\varphi)$, então $V_1 \models \varphi$ se e só se $V_2 \models \varphi$.

Prova da proposição

Por indução estrutural (indução na definição indutiva de fórmula)

- Casos base:
 - 1 se $\varphi = p$, com $p \in P$, então como por hipótese $V_1(p) = V_2(p)$, tem-se imediatamente que $V_1 \Vdash p$ se e só se $V_2 \Vdash p$;
 - 2 se $\varphi = \perp$, como nenhuma valoração satisfaz $\perp$, também se tem imediatamente que $V_1 \Vdash \perp$ se e só se $V_2 \Vdash \perp$.
- Passos de indução: note-se que se $\psi \in \text{SBF}(\varphi)$ então $\text{SMB}(\psi) \subseteq \text{SMB}(\varphi)$.
 - 1 Seja $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$; mostra-se primeiro que se $V_1 \Vdash \varphi$ então $V_2 \Vdash \varphi$. Por definição, $V_1 \Vdash \varphi$ se $V_1 \Vdash \varphi_1$ ou $V_1 \Vdash \varphi_2$. Assume-se que $V_1 \Vdash \varphi_1$ (o outro caso é semelhante); por hipótese de indução, tem-se também $V_2 \Vdash \varphi_1$, logo por definição, $V_2 \Vdash \varphi$, como se queria mostrar. O recíproco é idêntico.
 - 2 Seja $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ou $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$; as provas destes casos são semelhantes à prova do caso anterior.

Consequência semântica

Intuição

- Quer-se efectuar raciocínio entre asserções, de forma a retirar conclusões válidas a partir de hipóteses.
- Exemplo: se o metro se atrasar e não houver táxis na estação, o Pedro chega tarde. O Pedro não chegou tarde, mas o metro atrasou-se. Logo, havia táxis na estação.
- Formalização:
 - Hipótese 1: se p e não q então r , i.e., $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$.
 - Hipótese 2: não r e p , i.e., $\neg r \wedge p$.
 - Tese: q .
- Como provar?

Consequência semântica

Definição

Sejam $\Phi \subseteq F_P$ e $\varphi \in F_P$. Diz-se que φ é *consequência semântica* de Φ , o que se denota por $\Phi \models \varphi$, se para cada estrutura de interpretação V sobre P , se $V \models \Phi$ então $V \models \varphi$.

Exemplo

Quer-se provar que é válido o raciocínio “Se o metro se atrasar e não houver táxis na estação, o Pedro chega tarde. O Pedro não chegou tarde, mas o metro atrasou-se. Logo, havia táxis na estação.”

Em lógica proposicional, trata-se de provar que $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$.

Consequência semântica

Exemplo

Quer-se mostrar que $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$. Por definição, para todo o V tal que $V \models \{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\}$ também $V \models q$.

Por hipótese, $V \models (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ e $V \models \neg r \wedge p$, ou seja:

- ① sempre que $V \models p \wedge \neg q$ também $V \models r$; e $V \models \neg r \wedge p$; *i.e.*,
- ② sempre que $V \models p$ e $V \models \neg q$ também $V \models r$;
- ③ $V \models \neg r$ e
- ④ $V \models p$.

Por 2 e 3 conclui-se que $V \not\models p \wedge \neg q$, ou seja, $V \not\models p$ ou $V \not\models \neg q$. Como 4 contradiz $V \not\models p$, tem-se que $V \not\models \neg q$, *i.e.*, $V \models q$, como se queria mostrar.

Consequência semântica: o caso da contradição

Conjuntos contraditórios permitem qualquer conclusão

Um conjunto de fórmulas Φ permite concluir uma fórmula φ se sempre que dada valoração V sobre P é tal que $V \models \Phi$ também $V \models \varphi$.

Logo, se nenhuma valoração V satisfaz Φ , vacuosamente $V \models \varphi$.

Exemplo: $\{p, \neg p\} \models \perp$

Não existe nenhum V que satisfaça simultaneamente p e $\neg p$ (porque V é uma função).

Logo, para qualquer V tal que $V \models \{p, \neg p\}$ também $V \models \perp$, portanto $\{p, \neg p\} \models \perp$