

Lógica Computacional

Aula Teórica 5: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara

Departamento de Informática

28 de Fevereiro de 2011

Análise de exemplos

Estratégia

Quer-se provar ou refutar uma afirmação de consequência semântica. Como fazer?

- 1 Verifica-se primeiro se é falsa: alguma valoração não satisfaz o consequente mas satisfaz o antecedente. Se se encontrar tal valoração tem-se um contra-exemplo.
- 2 Se não se encontra um contra-exemplo faz-se a prova.

$\{p \rightarrow q, r \rightarrow s, r \vee s\} \models p \vee q$?

Considere-se V tal que $V(p) = 0 = V(q) = V(r)$ e $V(s) = 1$.

Então $V \models p \rightarrow q$, $V \models r \rightarrow s$ e $V \models r \vee s$, ou seja,
 $V \models \{p \rightarrow q, r \rightarrow s, r \vee s\}$.

No entanto, $V \not\models p \vee q$, logo $\{p \rightarrow q, r \rightarrow s, r \vee s\} \not\models p \vee q$.

Análise de exemplos

$\{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \delta, \gamma \rightarrow \varphi\} \models \psi \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)?$

Considera-se por hipótese que para algum V se tem que

- 1 $V \models \{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \delta, \gamma \rightarrow \varphi\}$, mas que
- 2 $V \not\models \psi \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)$. De 1 obtém-se:
- 3 $V \models (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \delta$ e
- 4 $V \models \gamma \rightarrow \varphi$. De 2 obtém-se:
- 5 $V \models \psi$, mas $V \not\models \gamma \rightarrow \delta$, ou seja
- 6 $V \models \gamma$, mas
- 7 $V \not\models \delta$. De 4 e de 6 obtém-se:
- 8 $V \models \varphi$. De 3, 5 e de 8 obtém-se:
- 9 $V \models \delta$, o que está em contradição com 7. Logo,
 $\{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \delta, \gamma \rightarrow \varphi\} \models \psi \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)$.

Consequência semântica vs. validade

Proposição

$$\{\varphi\} \models \psi \text{ se e só se } \models \varphi \rightarrow \psi$$

Prova

Mostra-se primeiro que se $\{\varphi\} \models \psi$ então $\models \varphi \rightarrow \psi$.

Por hipótese, $\{\varphi\} \models \psi$, ou seja, para qualquer V tem-se que se $V \models \varphi$ então $V \models \psi$; logo, por definição, $\models \varphi \rightarrow \psi$.

Mostra-se que $\models \varphi \rightarrow \psi$ implica $\{\varphi\} \models \psi$ de forma semelhante.

Consequência semântica vs. validade

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$ se e só se $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$

Prova

Prova-se o sentido “só se” (o recíproco é semelhante). Por hipótese, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$, ou seja, sempre que dado V é tal que $V \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ também $V \models \psi$.

Se $V \not\models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, o resultado sai vacuosamente

Se $V \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, então para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tem-se que $V \models \varphi_i$; logo, $V \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Como por hipótese $V \models \psi$, então $V \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$, como se queria mostrar.

Algumas leis da lógica proposicional

Axiomas importantes

- ① $\{\perp\} \models \varphi$
- ② $\{\varphi \wedge \psi\} \models \varphi$ e $\{\varphi \wedge \psi\} \models \psi$
- ③ $\{\varphi\} \models \varphi \vee \psi$ e $\{\psi\} \models \varphi \vee \psi$

Prova

- ① $\{\perp\} \models \varphi$ vacuosamente, pois $\{\perp\}$ é um conjunto contraditório
- ② por hipótese, seja V tal que $V \models \{\varphi \wedge \psi\}$, ou seja, $V \models \varphi$ e $V \models \psi$; então $\{\varphi \wedge \psi\} \models \varphi$ e $\{\varphi \wedge \psi\} \models \psi$
- ③ por hipótese, seja V tal que $V \models \{\varphi\}$; logo $V \models \varphi$ e tem-se também que $V \models \varphi$ ou $V \models \psi$; então $\{\varphi\} \models \varphi \vee \psi$ (o outro caso prova-se de forma semelhante)

Definição alternativa de consequência semântica

Observações

- A consequência semântica é uma relação $\models \subseteq 2^{F_P} \times F_P$
- Pode-se considerar uma definição alternativa, em que $\models$ é uma relação binária entre fórmulas: $\models_1 \subseteq F_P \times F_P$
- Considere ambas as relações definidas da mesma forma: sempre que dada valoração satisfaz o primeiro elemento do par na relação (um conjunto de fórmulas ou uma fórmula) também satisfaz o segundo.

Definição alternativa de consequência semântica

Proposição: coincidência das definições

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$ se e só se $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \models_1 \psi$

Prova

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$ se e só se
 $\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ se e só se
 $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\} \models \psi$ se e só se
 $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \models_1 \psi$

Chama-se então a ambas as relações “consequência semântica” e usa-se apenas o símbolo $\models$.

A consequência semântica é uma pré-ordem

Trivialmente, a consequência semântica é reflexiva.

Transitividade da consequência semântica

Se $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \gamma$ então $\varphi \models \gamma$

Prova

Por hipótese, $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \gamma$. Consideram-se dois casos: para dado V , ou $V \models \varphi$ ou $V \not\models \varphi$.

Suponha-se que $V \models \varphi$; como por hipótese $\varphi \models \psi$, também $V \models \psi$; como por hipótese $\psi \models \gamma$, também $V \models \gamma$. Logo, sempre que $V \models \varphi$ também $V \models \gamma$, ou seja, $\varphi \models \gamma$.

Suponha-se agora que $V \not\models \varphi$. Então, $V \models \varphi \rightarrow \gamma$, logo $\varphi \models \gamma$.

A ideia

Todas as fórmulas são diferentes?

- Há fórmulas sintaticamente diferentes que significam a mesma coisa (capturam a mesma asserção).
- Exemplo: “gosto de lógica” é equivalente a “não é verdade que não gosto de lógica”.
- Sintaxe não é tudo: há várias formas de dizer a mesma coisa.
- Intuitivamente, se dada valoração arbitrária satisfaz uma fórmula se e só se satisfaz outra fórmula, então as fórmulas são equivalentes.

A definição

Equivalência lógica

Duas fórmulas $\varphi, \psi \in F_P$ dizem-se *logicamente equivalentes*, o que se denota por $\varphi \equiv \psi$, se se tem que $\varphi \models \psi$ se e só se $\psi \models \varphi$.

Proposição

A equivalência lógica é uma relação de equivalência.

Prova

Tem que se mostrar que é reflexiva, simétrica e transitiva. Como já mostrámos que é uma pré-ordem, basta provar que é simétrica. Note-se que a simetria sai por definição.

A consequência semântica é uma ordem parcial

- Um pré-ordem anti-simétrica diz-se uma ordem parcial
- A anti-simetria usa a igualdade (sintática); se se considerar em vez a igualdade semântica (equivalência lógica), tem-se uma “anti-simetria” semântica

Prova

Mostrou-se que a consequência semântica é uma pré-ordem.

Por definição de equivalência lógica, se $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$ então $\varphi \equiv \psi$; logo, a consequência semântica é anti-simétrica.

Axiomas importantes

Algumas leis da lógica proposicional

- Dupla negação: $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
- Absurdo: $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \perp$
- Leis de De Morgan:
 $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- Distributividade:
 - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \delta) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \delta)$
 - $\varphi \vee (\psi \wedge \delta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \delta)$
 - $(\varphi \wedge \psi) \vee \delta \equiv (\varphi \vee \delta) \wedge (\psi \vee \delta)$
 - $\varphi \wedge (\psi \vee \delta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \delta)$
 - $(\varphi \vee \psi) \wedge \delta \equiv (\varphi \wedge \delta) \vee (\psi \wedge \delta)$
- Contra-recíproco: $\varphi \equiv \psi$ se e só se $\neg\psi \equiv \neg\varphi$
- Monoides comutativos idempotentes:
 - $(F_P, \vee, \perp)$, sendo $\top$ o elemento absorvente.
 - $(F_P, \wedge, \top)$, sendo $\perp$ o elemento absorvente.

Provas

$$\varphi \wedge \neg \varphi \equiv \perp$$

Viu-se já que $\varphi \wedge \neg \varphi$ é contraditória, *i.e.*, nenhuma valoração a satisfaz; este é também o caso de $\perp$, logo, vacuosamente, para qualquer valoração V se tem que $V \models \varphi \wedge \neg \varphi$ se e só se $V \models \perp$.

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$$

Tem que se mostrar que, para dado V se tem que $V \models \neg(\varphi \wedge \psi)$ se e só se $V \models \neg \varphi \vee \neg \psi$.

Mostra-se primeiro que sempre que $V \models \neg(\varphi \wedge \psi)$ também $V \models \neg \varphi \vee \neg \psi$. Considera-se por hipótese que $V \models \neg(\varphi \wedge \psi)$; então $V \not\models \varphi \wedge \psi$, ou seja, ou $V \not\models \varphi$ ou $V \not\models \psi$, *i.e.*, por definição, $V \models \neg \varphi \vee \neg \psi$.

Mostra-se o recíproco de forma semelhante.

Lei do contra-recíproco

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

Prova-se o sentido $\{\varphi \rightarrow \psi\} \models \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (o recíproco é semelhante).

Por hipótese, considera-se dado V tal que $V \models \varphi \rightarrow \psi$. Tem-se então que $V \models \varphi$ ou $V \not\models \varphi$.

Se $V \models \varphi$ então $V \models \psi$, logo $V \not\models \psi$ e como $V \not\models \psi$, também $V \models \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$.

Se $V \not\models \varphi$ então sai logo que $V \models \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$.

“Iguais por iguais”

Intuição

- Um mecanismo fundamental do raciocínio lógico (ou mesmo algébrico) é o de substituir “iguais por iguais”.
- Exemplos:
 - como $1 + 1 = 2$, então $1 + 1 + 1 = 3$ é equivalente a $2 + 1 = 3$;
 - se para $p, q, r \in P$ se tem que $V(p) = V(q)$, então $p \vee r \equiv q \vee r$.
- Como usar este facto intuitivo na lógica?

Teorema da Substitutividade

Suponha-se que $\varphi \equiv \psi$, assumamos que γ é uma fórmula que contém φ como subfórmula e que γ' é obtido de γ substituindo ocorrências de φ por ψ . Então $\gamma \equiv \gamma'$.

“Iguais por iguais”

Prova do teorema por indução na estrutura de γ

- Casos base:
 - $\gamma = p$, para algum $p \in P$. A única subfórmula é o próprio γ , logo $\varphi = \gamma$ e $\psi = \gamma'$. Como por hipótese $\varphi \equiv \psi$, e a equivalência é reflexiva, conclui-se por transitividade que $\gamma \equiv \gamma'$ (ou seja $\gamma \equiv \varphi \equiv \psi \equiv \gamma'$).
 - O caso $\gamma = \perp$ sai de igual forma.
- Caso $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ (os restantes são semelhantes).
Por hipótese de indução, para $i \in \{1, 2\}$ tem-se que $\gamma_i \equiv \gamma'_i$ se este último é obtido de γ_i substituindo ocorrências de φ por ψ . Como por hipótese φ é subfórmula de γ , há 3 casos a considerar: $\varphi = \gamma$ ou $\varphi \in \text{SBF}(\gamma_i)$ (com $i \in \{1, 2\}$). O primeiro prova-se de forma semelhante aos casos base; considera-se então, sem perda de generalidade, que $\varphi \in \text{SBF}(\gamma_1)$; logo, como a equivalência é preservada pelos operadores da lógica, $\gamma' = \gamma'_1 \vee \gamma_2$, e conclui-se que $\gamma \equiv \gamma'$.

A equivalência lógica é uma congruência

Teorema: os operadores da lógica preservam a equivalência

Seja $*$ $\in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Se $\varphi \equiv \psi$ então $\varphi * \gamma \equiv \psi * \gamma$ e $\gamma * \varphi \equiv \gamma * \psi$.

Prova

Vai-se mostrar o caso $\varphi \vee \gamma \equiv \psi \vee \gamma$. O recíproco sai por comutatividade (e os casos restantes são semelhantes).

Por hipótese $\varphi \equiv \psi$; mostra-se primeiro que $\{\varphi \vee \gamma\} \models \psi \vee \gamma$ (a prova do recíproco é semelhante). Seja V tal que $V \models \varphi \vee \gamma$; então, $V \models \varphi$ ou $V \models \gamma$.

Se $V \models \varphi$, como $\varphi \equiv \psi$ também $V \models \psi$, logo $V \models \psi \vee \gamma$.

Se $V \models \gamma$ então $V \models \psi$ ou $V \models \gamma$, logo $V \models \psi \vee \gamma$.

A equivalência lógica é uma congruência

Teorema

A relação binária $\equiv$ sobre fórmulas da lógica proposicional, é uma congruência.

Prova

É uma relação de equivalência, preservada pelos operadores da lógica, e substitutiva.