

Lógica Computacional

Aula Teórica 6: Semântica da Lógica Proposicional

António Ravara

Departamento de Informática

3 de Março de 2011

Expressividade

Os conectivos são independentes?

- Definiu-se a Lógica Proposicional com os símbolos proposicionais, o Falso ($\perp$), a disjunção ($\vee$), a conjunção ($\wedge$) e a implicação ($\rightarrow$)
- Outros operadores importantes (Verdade $\top$, negação $\neg$ e equivalência $\leftrightarrow$) não são primitivos: foram definidos como abreviaturas
- Eram precisos todos os primitivos para se expressar as ideias básicas da lógica proposicional?
- Se se conseguir definir alguns como abreviaturas dos outros (mostrando que a semântica original e a da abreviatura são equivalentes), então pode-se prescindir deles como primitivos.
- Existirá um único conjunto mínimo?

Implicação como abreviatura

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

Prova

Mostra-se primeiro que se para qualquer V se tem que $V \models \varphi \rightarrow \psi$ então $V \models \neg \varphi \vee \psi$.

Por hipótese, sempre que $V \models \varphi$ também $V \models \psi$.

Considera-se primeiro o caso em que $V \models \neg \varphi$; por definição, também se tem que $V \models \neg \varphi \vee \psi$.

Se $V \models \varphi$ então por hipótese, $V \models \psi$ e por definição, também se tem que $V \models \neg \varphi \vee \psi$.

Mostra-se agora que se para qualquer V se tem que $V \models \neg \varphi \vee \psi$ então $V \models \varphi \rightarrow \psi$.

Por hipótese, $V \models \neg \varphi \vee \psi$, ou seja, ou $V \models \neg \varphi$ ou $V \models \psi$.

Considera-se primeiro o caso em que $V \models \neg \varphi$; vacuosamente, também se tem que $V \models \varphi \rightarrow \psi$.

Se $V \models \psi$ então por definição, também se tem que $V \models \varphi \rightarrow \psi$.

Disjunção como abreviatura

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Prova

Mostra-se o resultado usando o Teorema da substitutividade, o axioma da dupla negação e uma das leis de De Morgan.

$$\begin{aligned}\varphi \vee \psi &\equiv \neg(\neg(\varphi \vee \psi)) && \text{(pois } \gamma \equiv \neg\neg\gamma\text{)} \\ &\equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) && \text{(pela distribuição da negação)}\end{aligned}$$

Conjunção como abreviatura

Mostra-se da mesma forma que acima que

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

São todos os conectivos necessários como primitivos?

Conjunção

O conectivo de conjunção pode ser definido como abreviatura se se tiver disjunção e negação.

$$\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{abv}}{\equiv} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

Disjunção

O conectivo de disjunção pode ser definido como abreviatura se se tiver conjunção e negação.

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Conclusão

Com negação (primitiva ou não), basta ter ou disjunção ou conjunção.

Escolhas possíveis

São todos os conectivos necessários como primitivos?

O que temos como primitivo

- Falso: $\perp$
- Disjunção e conjunção: $\vee, \wedge$
- Implicação: $\rightarrow$

O que definimos como abreviatura

- Negação: $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \rightarrow \perp$
- Equivalência: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Conjunção ou disjunção: basta um deles

Pode-se ter menos conectivos, pois a conjunção (respectivamente a disjunção) pode ser definida à custa da negação e da disjunção (respectivamente a conjunção).

São todos os conectivos necessários como primitivos?

Basta ter como primitivos

- Falso: $\perp$
- Implicação: $\rightarrow$

O que sai como abreviatura

- Negação: $\neg\varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \rightarrow \perp$
- Verdade: $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\perp$
- Disjunção: $\varphi \vee \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg\varphi \rightarrow \psi$
- Conjunção: $\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- Equivalência: $\varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

São todos os conectivos necessários como primitivos?

Note-se que

Sem *falso* ($\perp$) temos que ter negação primitiva (não se consegue definir como abreviatura).

O falso sai como abreviatura se se tiver disjunção ou conjunção:

$$\perp \stackrel{\text{abv}}{=} \varphi \wedge \neg \varphi$$

Implicação

O conectivo de implicação pode ser definido como abreviatura se se tiver disjunção e negação (primitiva): $\varphi \rightarrow \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg \varphi \vee \psi$

Basta ter como primitivos

- Negação: $\neg$
- Disjunção: $\vee$ (ou conjunção, $\wedge$)

E como/quando juntar conectivos?

Note-se que

- Para provas por indução, convém ter o mínimo de conectivos.

O conjunto mais conveniente é $\{\perp, \rightarrow\}$, porque $\perp$ é um operador constante, logo caso base.

- Para resolver exercícios, é útil ter o máximo de conectivos definidos, para evitar ter que expandir abreviaturas (usam-se directamente as definições).

Semântica da negação e equivalência

Satisfação

- Da negação: $V \models \neg\varphi$, se não se tem que $V \models \varphi$
- Da equivalência: $V \models \varphi \leftrightarrow \psi$, se $V \models \varphi$ se e só se $V \models \psi$

Tabelas de verdade

p	$\neg p$	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1