

Lógica Computacional

Aula Teórica 7: Dedução Natural em Lógica Proposicional

António Ravara

Departamento de Informática

14 de Março de 2011

O que se pretende e como obter?

Um sistema dedutivo

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios (ou de fórmulas) simplesmente por manipulação sintáctica dos símbolos que ocorrem nas fórmulas (sem recorrer à semântica).

Meio: sistema dedutivo

Estabelece-se um conjunto de regras (ditas de prova ou de inferência) que permitam inferir novas fórmulas a partir de fórmulas dadas ou previamente obtidas. As regras que não recorrem a hipóteses (outras fórmulas previamente provadas) chamam-se axiomas

Que regras e para quê?

Provas

Uma prova é uma sequência de fórmulas, sendo

- as primeiras as hipóteses (pode ser o conjunto vazio);
- cada uma das que não é uma hipótese foi obtida por aplicação de uma regra, eventualmente usando fórmulas anteriores (na sequência) como hipóteses dessa regra;
- a última fórmula da sequência é a conclusão desejada.

Notação

Sendo $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ um conjunto de hipóteses (com $n \geq 0$) e ϕ uma conclusão a provar, escreve-se

$$\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \phi$$

se a partir das hipóteses $\phi_1, \dots, \phi_n$ se consegue construir uma prova para ϕ .

Que regras e para quê?

Notar

Terminologia

- Se se prova $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \phi$ então ϕ diz-se consequência do conjunto de hipóteses;
- Se se prova $\emptyset \vdash \phi$ então ϕ diz-se teorema do sistema dedutivo (e escreve-se $\vdash \phi$).

Propriedades de um sistema de prova

- *Correcção*: só permite derivar provas de tautologias e consequências semânticas
 - Se $\vdash \phi$ então $\models \phi$
 - Se $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \phi$ então $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi$
- *Completeness*: permite derivar provas de todas as tautologias e todas as consequências semânticas
 - Se $\models \phi$ então $\vdash \phi$
 - Se $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi$ então $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \phi$

A ideia

Provas como árvores etiquetadas

- Uma prova ou inferência é apresentada em árvore, dita de dedução ou derivação.
- Cada árvore é construída a partir de árvores singulares (ou folhas) utilizando-se as regras de inferência.
- Obtém-se um novo nível da árvore por aplicação de uma regra de inferência. Cada conectivo tem duas regras associadas (de introdução e de eliminação desse conectivo), excepto o falso ($\perp$) que pode apenas ser eliminado.
- A etiquetas dos nós são fórmulas.
 - As fórmulas nas folhas são as hipóteses, e têm associadas marcas (números inteiros); A hipóteses distintas devem-se associar marcas distintas.
 - A fórmula na raiz é a conclusão da prova. Diz-se que a árvore é uma derivação dessa fórmula.

Análise do conectivo $\perp$

Considera-se por hipótese $\neg\varphi$ e deriva-se o absurdo. Logo, a hipótese era falsa — provou-se φ .

Regra do absurdo

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\varphi} (\perp, m)$$

Só se pode eliminar o absurdo (não há regra de introdução — senão o sistema de prova não era correcto).

Análise do conectivo $\wedge$

- Introdução: para concluir $\varphi \wedge \psi$ é preciso ter provado cada um deles
- Eliminação: se se provou $\varphi \wedge \psi$ pode-se concluir qualquer um deles

Regras da conjunção

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_I)$$

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_{E_d})$$

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge_{E_e})$$

Análise do conectivo $\rightarrow$

- Introdução: se fixando por hipótese φ se consegue derivar ψ , então provou-se que $\varphi \rightarrow \psi$
- Eliminação: se se provou φ e $\varphi \rightarrow \psi$, pode-se concluir ψ

Regras da implicação

$$\frac{\begin{array}{c} \varphi^m \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I, m)$$

$$\frac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi & \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} (\rightarrow E)$$

Análise do conectivo $\vee$

Tendo-se provado φ (ou ψ), tem-se $\varphi \vee \psi$

Regras da disjunção: introdução

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_{I_d})$$

$$\frac{\mathcal{D} \quad \psi}{\varphi \vee \psi} (\vee_{I_e})$$

Análise do conectivo $\vee$

Tendo-se provado $\varphi_1 \vee \varphi_2$, para concluir algo daí (e.g., ψ) tem que se raciocinar por casos: se fixando por hipótese cada um deles (φ_1 e φ_2) se consegue sempre derivar ψ , então pode-se concluir ψ

Regras da disjunção: eliminação

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}_1 & [\varphi_1]^m & [\varphi_2]^n \\
 \varphi_1 \vee \varphi_2 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\
 & \psi & \psi \\
 \hline
 & \psi & (\vee_E, m, n)
 \end{array}$$

$$\{\neg p \rightarrow q\} \vdash \neg q \rightarrow p$$

$$\frac{\frac{(\neg p \rightarrow q)^1 \quad (\neg p)^2}{q} (\rightarrow_E) \quad (\neg q)^3}{\frac{\frac{\perp}{p} (\perp, 2)}{\neg q \rightarrow p} (\rightarrow_I, 3)} (\rightarrow_E)$$

$\vdash p \vee \neg p$

$$\begin{array}{c}
 \frac{p^1}{p \vee \neg p} (\vee_{I_d}) \quad \neg(p \vee \neg p)^2 \quad (\rightarrow_E) \\
 \hline
 \frac{\frac{\perp}{\neg p} (\rightarrow_I, 1)}{p \vee \neg p} (\vee_{I_e}) \quad \neg(p \vee \neg p)^2 \quad (\rightarrow_E) \\
 \hline
 \frac{\perp}{p \vee \neg p} (\perp, 2)
 \end{array}$$