

Lógica Computacional

Aula Teórica 9: Forma Normal Conjuntiva

António Ravara

Departamento de Informática

21 de Março de 2011

Como determinar “eficazmente” a validade de uma fórmula?

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios (ou de fórmulas) semânticamente, mas de forma eficaz e automática.

Meio: algoritmo

Define-se uma função que recebe uma fórmula e devolve a sua natureza (possível, contraditória ou válida).

Abordagens computacionais

Há vários algoritmos, de acordo com formas especiais em que as fórmulas podem estar. Uns são mais eficazes que outros. Vamos ver 3, por ordem crescente de eficácia.

Satisfação de disjunções de literais

Literal

Um *literal* é uma fórmula atômica (diz-se positivo) ou a negação de uma fórmula atômica (diz-se negativo).

Lema

Uma disjunção de literais $\bigvee_{i=1}^n L_i$, com $n \geq 1$ é válida se, e só se, existirem $1 \leq i, j \leq n$ tal que $L_i = \top$ ou $L_j = \neg L_j$.

Prova

Há dois casos para considerar:

- 1 algum literal é $\top$ (em que $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg \perp$), ou
- 2 a disjunção contém um literal e a sua negação.

Note-se que tem que se provar o sentido “só se” e o sentido “se”.

Satisfação de disjunções de literais

Lema

Uma disjunção de literais $\bigvee_{i=1}^n L_i$, com $n \geq 1$ é válida se, e só se, existirem $1 \leq i, j \leq n$ tal que $L_i = \top$ ou $L_i = \neg L_j$.

Prova do sentido “só se”

No primeiro caso, como $\top$ é o elemento absorvente da disjunção, ela é válida (sabendo também que a disjunção é associativa e comutativa, e que a equivalência lógica é uma congruência, aplicam-se repetidamente as leis até se obter apenas $\top$).

O segundo caso reduz-se ao primeiro porque $L \vee \neg L \equiv \top$.

Satisfação de disjunções de literais

Lema

Uma disjunção de literais $\bigvee_{i=1}^n L_i$, com $n \geq 1$ é válida se, e só se, existirem $1 \leq i, j \leq n$ tal que $L_i = \top$ ou $L_j = \neg L_j$.

Prova do sentido “se”

Prova-se por contra-recíproco.

Assume-se que a disjunção não contém $\top$ nem um literal e a sua negação. Quer-se então provar que não é válida.

Considerando a valoração V que atribui 0 a todos os símbolos proposicionais na disjunção que ocorrem como literais e 1 a todos os símbolos proposicionais na disjunção que ocorrem negados. Então V não satisfaz a disjunção, que não é então válida.

Um resultado simples

Lema da negação de literais

Dado um literal L existe um outro literal L' tal que $\neg L \equiv L'$

Prova

Por definição, um literal é uma fórmula atômica (símbolo proposicional ou $\perp$) — um literal positivo — ou a sua negação — um literal negativo.

Consideram-se então os dois casos:

- 1 se L é positivo, então $\neg L$ é negativo e toma-se $L' = \neg L$ (claro que $= \subseteq \equiv$);
- 2 se L é negativo, então $L = \neg L''$, para algum literal positivo L' , e logo $\neg L = \neg \neg L'' \equiv L'$

Forma Normal Conjuntiva

Definição

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ está na Forma Normal Conjuntiva ou FNC (e escreve-se $\text{FNC}(\varphi)$), se é uma conjunção de disjunções de literais.

Satisfação

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ tal que $\text{FNC}(\varphi)$ é:

- válida, se são válidas todas as disjunções;
- contraditória, se é contraditória alguma das disjunções;
- quando nenhum dos casos anteriores se verifica, a fórmula é possível.

Forma Normal Disjuntiva

Definição

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ está na Forma Normal Disjuntiva ou FND (e escreve-se $\text{FND}(\varphi)$), se é uma disjunção de conjunções de literais.

Formas gerais

Note-se que para naturais $n, m \geq 1$, se dada fórmula $\varphi \in F_P$ é tal que:

- $\text{FNC}(\varphi)$, então $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n (\bigvee_{j=1}^m L_{i,j})$
- $\text{FND}(\varphi)$, então $\varphi = \bigvee_{i=1}^n (\bigwedge_{j=1}^m L_{i,j})$

Considera-se a disjunção e a conjunção unárias como um abuso de notação: denotam apenas a fórmula argumento.

Relação entre Formas Normais

Observações

- Pode-se transformar uma forma normal conjuntiva em disjuntiva, e vice-versa.
- Há mais do que uma forma de o fazer

Proposição: relação entre FNC e FND

Sejam $\varphi_1, \psi_1 \in F_P$ tal que $\text{FNC}(\varphi_1)$ e $\text{FND}(\psi_1)$. Então existem $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3 \in F_P$ tal que:

- $\varphi_2 \equiv \neg\varphi_1$ e $\text{FND}(\varphi_2)$, e $\psi_2 \equiv \neg\psi_1$ e $\text{FNC}(\psi_2)$.
- $\varphi_3 \equiv \varphi_1$ e $\text{FND}(\varphi_3)$, e $\psi_3 \equiv \psi_1$ e $\text{FNC}(\psi_3)$.

Relação entre Formas Normais

Proposição: relação entre FNC e FND

Sejam $\varphi_1, \psi_1 \in F_P$ com $\text{FNC}(\varphi_1)$ e $\text{FND}(\psi_1)$. Existem $\varphi_2, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_2 \equiv \neg\varphi_1$ e $\psi_2 \equiv \neg\psi_1$, com $\text{FND}(\varphi_2)$ e $\text{FNC}(\psi_2)$.

Prova axiomática é simples: basta usar as leis de De Morgan

$$\begin{aligned}
 \neg\varphi_1 &= \neg \bigwedge_{i=1}^n (\bigvee_{j=1}^m L_{i,j}) \\
 &\equiv \bigvee_{i=1}^n \neg(\bigvee_{j=1}^m L_{i,j}) \\
 &\equiv \bigvee_{i=1}^n (\bigwedge_{j=1}^m \neg L_{i,j}) \\
 &\equiv \bigvee_{i=1}^n (\bigwedge_{j=1}^m L'_{i,j}) \\
 &= \varphi_2
 \end{aligned}$$

pois para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ encontra-se, pelo lema anterior, um literal $L'_{i,j}$ tal que $\neg L_{i,j} \equiv L'_{i,j}$. Note-se que $\text{FND}(\varphi_2)$.

Para o caso de ψ_2 a prova é semelhante.

Resultados

Proposição: relação entre FNC e FND

Sejam $\varphi_1, \psi_1 \in F_P$ tal que $\text{FNC}(\varphi_1)$ e $\text{FND}(\psi_1)$. Então existem $\varphi_2, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_2 \equiv \varphi_1$ e $\text{FND}(\varphi_2)$, e $\psi_2 \equiv \psi_1$ e $\text{FNC}(\psi_2)$.

Prova

Simple: basta usar as leis de distribuição da conjunção sobre a disjunção (e vice-versa).

Resultados

Lema das Formas Normais

Para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existem fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \varphi_1$ e $\text{FNC}(\varphi_1)$, e $\varphi \equiv \varphi_2$ e $\text{FND}(\varphi_2)$.

Prova

Mostra-se por indução estrutural que para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existe uma fórmula $\psi \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \psi$ e $\text{FNC}(\psi)$. A outra afirmação tem prova semelhante.

Casos base: como símbolos proposicionais e $\perp$ são literais, já estão na FNC.

Passo. Analisa-se por casos a forma de φ .

Se $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \wedge \varphi_2$, por hipótese de indução existem $\psi_1, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e $\text{FNC}(\psi_1)$, e $\varphi_2 \equiv \psi_2$ e $\text{FNC}(\psi_2)$. Logo, $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ e $\text{FNC}(\psi_1 \wedge \psi_2)$ por definição.

Resultados

Lema das Formas Normais

Para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existe uma fórmula $\psi \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \psi$ e $\text{FNC}(\psi)$.

Continuação da prova: caso $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \vee \varphi_2$

Por hipótese de indução existem $\psi_1, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e $\text{FNC}(\psi_1)$, e $\varphi_2 \equiv \psi_2$ e $\text{FNC}(\psi_2)$, logo, $\varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$. Mostra-se que existe $\psi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ tal que $\text{FNC}(\psi)$ e logo $\varphi \equiv \psi$.

Como para naturais $n, m > 1$ se tem que $\psi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i$ e $\psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{j=1}^m \gamma'_j$, sendo os γ s disjunções de literais, tem-se também, pelas leis de distribuição da disjunção sobre a conjunção, que

$$\psi_1 \vee \psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bigwedge_{i=1}^n \gamma_i \right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^m \gamma'_j \right) \equiv \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^m (\gamma_i \vee \gamma'_j) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \psi$$

Resultados

Lema das Formas Normais

Para qualquer fórmula $\varphi \in F_P$ existe uma fórmula $\psi \in F_P$ tal que $\varphi \equiv \psi$ e $\text{FNC}(\psi)$.

Continuação da prova: caso $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$

Por hipótese de indução existem $\psi_1, \psi_2 \in F_P$ tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e $\text{FNC}(\psi_1)$, e $\varphi_2 \equiv \psi_2$ e $\text{FNC}(\psi_2)$, logo, $\varphi \equiv \psi_1 \rightarrow \psi_2$. Tem-se também que $\psi_1 \rightarrow \psi_2 \equiv \neg\psi_1 \vee \psi_2$ e como se tem que $\text{FNC}(\psi_1)$ então pela proposição anterior existe $\psi'_1 \equiv \neg\psi_1$ tal que $\text{FNC}(\psi'_1)$. Igualmente, existe $\psi'_2 \equiv \psi_2$ tal que $\text{FNC}(\psi'_2)$. Logo, $\varphi \equiv \psi'_1 \vee \psi'_2$ e $\text{FNC}(\psi'_1 \vee \psi'_2)$. Fazendo de novo a distribuição das disjunções sobre as conjunções obtém-se φ' tal que $\varphi \equiv \varphi'$ e $\text{FNC}(\varphi')$.