Lógica Computacional

LEI FCT UNL, 2º Semestre 2009/2010

Teste Tipo Resolvido

Grupo I (3+2+2 valores)

Sejam p, q e r símbolos proposicionais. Verifique se:

1. $\{\neg p \wedge q\} \models \neg(p \leftrightarrow q)$

   Solução:

   Considera-se por hipótese, para toda a valoração V tal que $V \Vdash \neg p \wedge q$ que se tem também que $V \Vdash \neg(p \leftrightarrow q)$. Então, por definição de satisfação da conjunção, $V \Vdash \neg p$ e $V \Vdash q$. Vai-se verificar se para tal V se pode ter que $V \Vdash \neg(p \leftrightarrow q)$. Por definição de satisfação da negação, $V \nVdash p \leftrightarrow q$, e expandindo a abreviatura *equivalencia* obtém-se $V \nVdash (p \to q) \wedge (q \to p)$. Para não satisfazer uma conjunção basta não satisfazer um dos argumentos, logo ou $V \nVdash p \to q$ ou $V \nVdash q \to p$. Como por hipótese, $V \Vdash \neg p$ e $V \Vdash q$, então $V \nVdash q \to p$. Verificou-se que $\{\neg p \wedge q\} \models \neg(p \leftrightarrow q)$.

2. $p \to q \;\equiv\; \neg(p \wedge q)$

   Solução:

   Suponhamos que se tem dado V tal que $V \Vdash \neg(p \wedge q)$. Logo, $V \nVdash p \wedge q$, ou seja, ou $V \nVdash p$ ou $V \nVdash q$. Assuma-se então $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$. Mas neste caso, $V \nVdash p \to q$, ou seja, $p \to q \;\not\equiv\; \neg(p \wedge q)$.

3. A fórmula $(p \vee q) \to \neg(p \to q)$ é possível, usando o algoritmo de Horn.

   Solução: Seja $\varphi = (p \vee q) \to \neg(p \to q)$.

   (a) Converte-se primeiro a fórmula para a Forma Normal Conjuntiva:
   $\mathcal{T}(\varphi) = \text{FNC}(\text{NNF}(\text{ImplFree}(\varphi)))$.

$$\begin{aligned}
\text{ImplFree}(\varphi) &= \neg\text{ImplFree}(p \vee q) \vee \text{ImplFree}(\neg(p \to q)) \\
&= \neg(p \vee q) \vee \neg\text{ImplFree}(p \to q) \\
&= \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{NNF}(\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee q)) &= \text{NNF}(\neg(p \vee q)) \vee \text{NNF}(\neg(\neg p \vee q)) \\
&= (\text{NNF}(\neg p) \wedge \text{NNF}(\neg q) \vee (\text{NNF}(\neg\neg p) \wedge \text{NNF}(\neg q) \\
&= (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{FNC}(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) &= \text{Distr}(\text{FNC}(\neg p \wedge \neg q), \text{FNC}(p \wedge \neg q)) \\
&= \text{Distr}(\neg p \wedge \neg q, p \wedge \neg q) \\
&= \text{Distr}(\neg p, p \wedge \neg q) \wedge \text{Distr}(\neg q, p \wedge \neg q) \\
&= \text{Distr}(\neg p, p) \wedge \text{Distr}(\neg p, \neg q) \wedge \text{Distr}(\neg q, p) \wedge \text{Distr}(\neg q, \neg q) \\
&= (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q) \\
&= \psi
\end{aligned}$$

(b) O resultado obtido (ψ) é uma fórmula de Horn?
Seja $\psi = \psi_1 \wedge \psi_1 \wedge \psi_1 \wedge \psi_4$;

- $\psi_1 = \neg p \vee p$ uma fórmula de Horn básica, pois é uma disjunção só com um literal positivo;
- $\psi_2 = \neg p \vee \neg q$ uma fórmula de Horn básica, pois é uma disjunção sem nenhum literal positivo;
- $\psi_3 = \neg q \vee p$ uma fórmula de Horn básica, pois é uma disjunção só com um literal positivo;
- $\psi_4 = \neg q \vee \neg q$ uma fórmula de Horn básica, pois é uma disjunção sem nenhum positivo;

Então ψ é uma fórmula de Horn porque é uma conjunção de fórmulas de Horn básicas.

(c) Converte-se ψ para a forma de Horn e usa-se o algoritmo:
$\psi \equiv (p \to p) \wedge ((p \wedge q) \to \perp) \wedge (q \to p) \wedge ((q \wedge q) \to \perp) = \gamma$
Então $\mathcal{H}(\gamma) = 1$ pois $\mathcal{A}(\gamma, \{\top\}) = \{\top\}$ e $\perp \notin \{\top\}$. Logo, pelo Teorema, γ é possível e como $\gamma \equiv \psi \equiv \varphi$, também φ é possível.

Grupo II (3+3 valores)

Mostre que:

1. $\vdash p \vee \neg p$.

   Solução:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{p^1}
\RightLabel{$(\vee_{I_d})$}
\UnaryInfC{$p \vee \neg p$}
\AxiomC{$\neg(p \vee \neg p)^2$}
\RightLabel{$(\to_E)$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$(\to_I, 1)$}
\UnaryInfC{$\neg p$}
\RightLabel{$(\vee_{I_e})$}
\UnaryInfC{$p \vee \neg p$}
\AxiomC{$\neg(p \vee \neg p)^2$}
\RightLabel{$(\to_E)$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$(\perp, 2)$}
\UnaryInfC{$p \vee \neg p$}
\end{prooftree}
$$

2. $\{\neg p \to q\} \vdash \neg q \to p$.

   Solução:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\neg p \to q)^1$}
\AxiomC{$(\neg p)^2$}
\RightLabel{$(\to_E)$}
\BinaryInfC{q}
\AxiomC{$(\neg q)^3$}
\RightLabel{$(\to_E)$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$(\perp, 2)$}
\UnaryInfC{p}
\RightLabel{$(\to_I, 3)$}
\UnaryInfC{$\neg q \to p$}
\end{prooftree}
$$

Grupo III (2+2+3 valores)

1. Enuncie o Teorema da Substitutividade.

   Solução: Suponha-se que $\varphi \equiv \psi$, assuma-se que γ é uma fórmula que contém φ como subfórmula e que γ' é obtido de γ substituindo ocorrrências de φ por ψ. Então $\gamma \equiv \gamma'$.

2. É necessário ter como primitivos os conectivos disjunção e conjunção se se tiver o implicação? Justifique.

   Solução: Tendo o conectivo implicação como primitivo, podem-se definir os conectivos disjunção e conjunção como abreviaturas, pois:

   - Como $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \rightarrow \psi$, pode-se definir $\varphi \vee \psi \overset{\text{abv}}{=} \neg\varphi \rightarrow \psi$.
   - Como $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ pode-se usar esta lei como abreviatura e usar a definição anterior.

3. Mostre que dada uma fórmula $\varphi \in G_P$, a fórmula $\text{ImplFree}(\varphi)$ não tem ocorrências do conectivo implicação.

   Solução: Prova-se por indução estrutural em φ.

   Caso base: Seja φ é um símbolo proposicional (digamos p). Então por definição, $\text{ImplFree}(p) = p$, que não tem ocorrências do conectivo implicação.

   Passo: consideram-se 4 casos ($\varphi = \neg\varphi_1$, $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$).
   Caso $\varphi = \neg\varphi_1$; então por definição, $\text{ImplFree}(\varphi) = \neg\text{ImplFree}(\varphi_1)$ e como por hipótese de indução $\text{ImplFree}(\varphi_1)$ não tem ocorrências do conectivo implicaçao, também não tem ocorrências de implicação $\text{ImplFree}(\varphi)$.
   Caso $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$; então por definição, $\text{ImplFree}(\varphi) = \neg\text{ImplFree}(\varphi_1) \vee \text{ImplFree}(\varphi_2)$ e como por hipótese de indução nem $\text{ImplFree}(\varphi_1)$ nem $\text{ImplFree}(\varphi_2)$ têm ocorrências do conectivo implicaçao, também não tem ocorrências de implicação $\text{ImplFree}(\varphi)$.
   Caso $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$; então por definição, $\text{ImplFree}(\varphi) = \text{ImplFree}(\varphi_1) \vee \text{ImplFree}(\varphi_2)$ e como por hipótese de indução nem $\text{ImplFree}(\varphi_1)$ nem $\text{ImplFree}(\varphi_2)$ têm ocorrências do conectivo implicaçao, também não tem ocorrências de implicação $\text{ImplFree}(\varphi)$.
   Caso $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$; a prova é semelhante ao caso anterior.