

Lógica Computacional

LEI FCT UNL, 2º Semestre 2009/2010

Teste Tipo Resolvido

Grupo I

(2+2+3 valores)

Verifique se:

1. $\{\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

Solução: Considere-se uma atribuição arbitrária $\rho \in \text{ATR}_{\mathcal{M}}^X$ e a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sobre a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$ que contém $P, Q \in SP_1$, sendo

- $I(P) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(P)(n) = 1$ se $n > 10$, e
- $I(Q) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(Q)(n) = 1$ se $n < 10$.

Mostra-se primeiro que $\mathcal{M} \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$:

- (a) $\mathcal{M} \models \exists x P(x)$, pois $\mathcal{M}, \rho[x := 11] \models P(x)$, uma vez que

$$\llbracket P(x) \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=11]} = I(P)(\rho[x := 11](x)) = I(P)(11) = 11 > 10 = 1$$

- (b) $\mathcal{M} \models \exists x Q(x)$, pois $\mathcal{M}, \rho[x := 1] \models Q(x)$, uma vez que

$$\llbracket P(x) \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=1]} = I(P)(\rho[x := 1](x)) = I(Q)(1) = 1 < 10 = 1$$

No entanto, $\mathcal{M} \not\models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$, pois não se encontra um natural n tal que $\mathcal{M}, \rho[x := n] \models P(x) \wedge Q(x)$, uma vez que ou $\mathcal{M}, \rho[x := n] \models P(x)$ sendo $n > 10$ ou $\mathcal{M}, \rho[x := n] \models Q(x)$ sendo $n < 10$, mas não se pode ter ambos os casos.

Conclui-se então que $\{\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\} \not\models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

2. $\exists x (\psi \rightarrow \varphi) \equiv \psi \rightarrow \exists x \varphi$, se $x \notin \text{VL}(\psi)$

Solução: usando o Teorema da Substitutividade, pode-se colocar fórmulas equivalentes no lugar de subfórmulas, obtendo-se a seguinte prova.

$$\begin{aligned} \exists x (\psi \rightarrow \varphi) &\equiv \exists x (\neg \psi \vee \varphi) && \text{(pois } \psi \rightarrow \varphi \equiv \neg \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \exists x (\varphi \vee \neg \psi) && \text{(pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \exists x \varphi \vee \neg \psi && \text{(pois como } x \notin \text{VL}(\psi), \exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \psi) \\ &\equiv \neg \psi \vee \exists x \varphi && \text{(pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \psi \rightarrow \exists x \varphi && \text{(pois } \neg \psi \vee \varphi \equiv \psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

3. A fórmula $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ é válida, usando um dos métodos de Resolução (note que para mostrar que uma fórmula é válida basta mostrar que a sua negação é contraditória).

Solução: Seja $\varphi = (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$.

- (a) Converte-se primeiro a negação da fórmula para a Forma Normal Conjuntiva Prenex:

$$\mathcal{P}(\neg\varphi) = \text{FNC}(\text{Scope}(\text{NNF}(\text{ImplFree}(\neg\varphi))))$$

Calcula-se separadamente cada função.

$$\begin{aligned} \text{ImplFree}(\neg\varphi) &= \\ \neg\text{ImplFree}(\varphi) &= \\ \neg(\neg\text{ImplFree}(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \vee \text{ImplFree}(\forall x (P(x) \wedge Q(x)))) &= \\ \neg(\neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \vee \forall x (P(x) \wedge Q(x))) &= \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NNF}(\psi) &= \\ \text{NNF}(\neg\neg(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \wedge \text{NNF}(\neg\forall x (P(x) \wedge Q(x)))) &= \\ \text{NNF}(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \wedge \exists x \text{NNF}(\neg(P(x) \wedge Q(x))) &= \\ (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \wedge \exists x (\text{NNF}(\neg P(x)) \vee \text{NNF}(\neg Q(x))) &= \\ (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \wedge \exists x (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) &= \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Scope}(\phi) &= \\ \exists x_0 \text{Scope}((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0))) &= \\ \exists x_0 \text{Scope}(\text{Scope}(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0))) &= \\ \exists x_0 \text{Scope}(\forall x_1 \text{Scope}(P(x_1) \wedge \forall x Q(x)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0))) &= \\ \exists x_0 \text{Scope}(\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1) \wedge Q(x_2)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0))) &= \\ \exists x_0 \forall x_1 \text{Scope}(\forall x_2 (P(x_1) \wedge Q(x_2)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0))) &= \\ \exists x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((P(x_1) \wedge Q(x_2)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0))) &= \exists x_0 \forall x_1 \forall x_2 \chi \end{aligned}$$

Note-se que χ já está na Forma Normal Conjuntiva, logo $\text{FNC}(\chi) = \chi$

- (b) O resultado obtido $(\exists x_0 \forall x_1 \forall x_2 \chi)$ tem agora que ser Skolemizado. Seja a uma constante.

$$\text{Skolem}(\exists x_0 \forall x_1 \forall x_2 \chi) = \forall x_1 \forall x_2 ((P(x_1) \wedge Q(x_2)) \wedge (\neg P(a) \vee \neg Q(a))) = \xi$$

- (c) Escreve-se ξ como um conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas e usa-se Resolução-LN:

$$\mathcal{C} = \{\{P(x_1)\}, \{Q(x_2)\}, \{\neg P(a), \neg Q(a)\}\}$$

Seja $L_1 = \{P(x_1), \neg P(a)\}$; o seu *umg* é a substituição $s_1 = \{a/x_1\}$, logo obtém-se das cláusulas $\{P(x_1)\}$ e $\{\neg P(a), \neg Q(a)\}$ o resolvente $R_1 = \{\neg Q(a)\}$.

Seja $L_2 = \{Q(x_2), \neg Q(a)\}$; o seu *umg* é a substituição $s_1 = \{a/x_2\}$, logo obtém-se das cláusulas $\{Q(x_2)\}$ e $\{\neg Q(a)\}$ (resolvente R_1) o resolvente $\emptyset$.

Pela Proposição da Resolução-LN conclui-se que $\neg\varphi$ é contraditória, logo φ é válida.

Grupo II

(3+3 valores)

Mostre que:

1. $\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$.

Solução:

$$\frac{\frac{\frac{(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))^1}{\forall x P(x)} \wedge_{E_d} \quad \frac{(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))^1}{\forall x Q(x)} \wedge_{E_e}}{\frac{(P(x))\{y/x\} = P(y)}{\forall_E} \quad \frac{(Q(x))\{y/x\} = Q(y)}{\forall_E}} \wedge_I$$

$$\frac{\frac{P(y) \wedge Q(y) \stackrel{\text{def}}{=} (P(x) \wedge Q(x))\{y/x\}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x))} \forall_I \text{ (C1,C2)}}{(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))} \rightarrow_{I,1}$$

Onde:

C1 $y \notin VL(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$;

C2 como $x \neq y$ também $y \notin VL(P(x) \wedge Q(x))$.

2. $\{\exists x P(x)\} \vdash \neg \forall x \neg P(x)$.

Solução:

$$\frac{\frac{(\exists x P(x))^1}{\frac{\frac{(\forall x \neg P(x))^2}{(\neg P(x))\{y/x\} = \neg P(y)} \forall_E} \perp} \perp}{\neg \forall x \neg P(x)} \rightarrow_{I,2} \quad \frac{\frac{(\exists x P(x))^1}{\frac{(\neg P(x))\{y/x\} = \neg P(y)} \forall_E} \perp}{\exists_{E,2} \text{ (C1,C2,C3)}} \rightarrow_E$$

Onde:

C1 a única hipótese aberta para além da que tem a marca 3 é a que tem a marca 2, que não tem variáveis livres, logo $y \notin VL(\forall x \neg P(x))$.

C2 : Não há variáveis livres em $\perp$, logo $y \notin VL(\perp)$.

C3 : $y \notin VL(\neg P(x))$.

Grupo III

(2+2+3 valores)

1. Enuncie a Proposição da Resolução-LN.

Solução: Seja $\varphi \in F_{\Sigma}^X$ tal que $\text{SNF}(\varphi)$. Se φ é uma fórmula de Horn então φ é contraditória se e só se $\emptyset$ pode ser derivado de φ por Resolução-LN.

2. É necessário ter como primitivo o quantificador existencial se se tiver o universal? Justifique.

Solução: Tendo o quantificador universal como primitivo, pode-se definir o quantificador existencial como abreviatura usando o universal e a negação, pois como se mostrou numa aula teórica que $\exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi$, pode-se definir $\exists x \varphi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg \forall x \neg \varphi$.

3. Prove a correcção dum caso do algoritmo Scope.

Solução: assumamos que se está a fazer uma prova por indução estrutural. Prova-se o que foi pedido mostrando que para caso de aplicação da função se tem que $\varphi \equiv \text{Scope}(\varphi)$. Considere-se que $* \in \{\vee, \wedge\}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, $x_0 \notin V(\varphi)$

Caso φ seja uma fórmula atómica: a função Scope comporta-se como a identidade; obtém-se o resultado desejado porque a equivalência é reflexiva.

Caso $\varphi = Qx \varphi_1$: então $\text{Scope}(\varphi) = Qx \text{Scope}(\varphi_1)$ e como por hipótese de indução $\varphi_1 \equiv \text{Scope}(\varphi_1)$ obtém-se, usando a reflexividade, $\text{Scope}(\varphi) \equiv Qx \text{Scope}(\varphi_1) \equiv Qx \varphi_1 \equiv \varphi$, concluindo-se o resultado por transitividade.

Caso $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$: há que começar por considerar dois casos — alguma das fórmulas começa por um quantificador ou não.

- (a) Seja $\varphi_1 = Qx \varphi'_1$ (se for $\varphi_2 = Qx \varphi'_2$ a prova é semelhante). Então $\varphi = Qx \varphi'_1 * \varphi_2$ e por definição, $\text{Scope}(\varphi) = Qx_0 \text{Scope}(\varphi'_1 \{x_0/x\} * \varphi_2)$.

Note-se que, por congruência- α , $Qx \varphi'_1 \equiv Qx_0 \varphi'_1 \{x_0/x\}$; assumindo, pela correcção dos outros casos ou iterando o raciocínio feito neste caso, que se tem $\text{Scope}(\varphi'_1 \{x_0/x\} * \varphi_2) \equiv \varphi'_1 \{x_0/x\} * \varphi_2$, obtém-se o resultado pretendido

$$\text{Scope}(\varphi) \equiv Qx_0 \text{Scope}(\varphi'_1 \{x_0/x\} * \varphi_2) \equiv Qx_0 \varphi'_1 \{x_0/x\} * \varphi_2 \equiv Qx \varphi'_1 * \varphi_2 \equiv \varphi$$

- (b) Se nenhuma das fórmulas começa por um quantificador mas ambas têm ocorrências de quantificadores, então por definição, $\text{Scope}(\varphi) = \text{Scope}(\text{Scope}(\varphi_1) * \text{Scope}(\varphi_2))$. Por hipótese de indução $\varphi_1 \equiv \text{Scope}(\varphi_1)$ e $\varphi_2 \equiv \text{Scope}(\varphi_2)$, logo tem-se

$$\text{Scope}(\varphi) \equiv \text{Scope}(\varphi_1 * \varphi_2) \equiv \varphi_1 * \varphi_2 \equiv \varphi$$

justificando-se o penúltimo passo por um raciocínio semelhante aos casos anteriores.