

Lógica Computacional

LEI FCT UNL, 2º Semestre 2010/2011

Resolução do Teste 1 Tipo

Duração: 2h00m

Grupo I

(2+2 valores)

Considere o seguinte raciocínio:

O Vasco fica de mau humor quando perde um jogo, a não ser que seja com o irmão mais novo. O Vasco perdeu o jogo mas está de bom humor. Logo, jogou com o irmão mais novo.

1. Represente-o em lógica proposicional

Solução:

Identificação das asserções básicas: sejam

- bh : O Vasco está de bom humor
- pj : O Vasco perde um jogo
- ji : O Vasco joga com o irmão mais novo

raciocínio:

$$\{\neg ji \rightarrow (pj \rightarrow \neg bh), pj \wedge bh\} \models ji$$

2. prove-o correcto (semanticamente)

Solução: Considere-se uma valoração arbitrária V tal que

$$V \models \{\neg ji \rightarrow (pj \rightarrow \neg bh), pj \wedge bh\}$$

ou seja,

- (a) $V \models \neg ji \rightarrow (pj \rightarrow \neg bh)$, ou seja, sempre que $V \models \neg ji$ também $V \models pj \rightarrow \neg bh$, *i.e.*,
 - i. $V \not\models \neg ji$, ou
 - ii. $V \models \neg ji$ e $V \models pj \rightarrow \neg bh$
- (b) e $V \models pj \wedge bh$

Se se verificar $V \not\models \neg ji$ tem-se logo que $V \models ji$.

Verifica-se agora o outro caso: tem-se:

- (a) $V \models \neg ji$,
- (b) $V \models pj \rightarrow \neg bh$, *i.e.*, sempre que $V \models pj$ também $V \models \neg bh$, e
- (c) $V \models pj \wedge bh$, *i.e.*, $V \models pj$ e $V \models bh$

De (b) e (c) conclui-se que $V \models \neg bh$ e $V \models bh$, o que é absurdo. Logo esta alternativa não é possível.

ficou então provado que $V \models ji$, como se queria.

Grupo II

(2+2+2 valores)

Sejam p e q símbolos proposicionais. Determine, usando tabelas de verdade, a natureza (válida, possível ou contraditória) das seguintes fórmulas.

1. $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\neg p \wedge q) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

Solução:

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	φ
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1

Como todas as possíveis valorações satisfazem a fórmula (a coluna correspondente só contém uns), esta é válida.

2. $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

Solução:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	φ
0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Como existem valorações que satisfazem a fórmula (*cf.* a primeira linha), esta é possível. Não é válida porque também existem valorações que não satisfazem a fórmula (*cf.* a segunda linha).

3. $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee \neg p) \rightarrow \neg(p \rightarrow p)$

Solução:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \rightarrow p$	$\neg(p \rightarrow p)$	φ
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0

Como nenhuma das possíveis valorações satisfaz a fórmula (a coluna correspondente só contém zeros), esta é contraditória.

Grupo III

(2+2+2 valores)

Verifique semanticamente se:

1. $\models \varphi \wedge \neg \varphi$

Por definição de tautologia, para qualquer valoração V se tem $V \models \varphi \wedge \neg \varphi$, ou seja, $V \models \varphi$ e $V \models \neg \varphi$, i.e., $V \models \varphi$ e $V \not\models \varphi$, o que é impossível. Logo, a afirmação $\models \varphi \wedge \neg \varphi$ é falsa.

2. $\{\neg \varphi \rightarrow \psi\} \models \neg \psi \rightarrow \varphi$

Seja V uma valoração tal que $V \models \neg \varphi \rightarrow \psi$, ou seja, sempre que $V \models \neg \varphi$ também $V \models \psi$. Consideram-se então dois casos:

- (a) $V \not\models \neg \varphi$, i.e., $V \models \neg \neg \varphi$, e então $V \models \varphi$, logo $V \models \neg \psi \rightarrow \varphi$;
- (b) $V \models \neg \varphi$, e então $V \models \psi$, saindo vacuosamente que $V \models \neg \psi \rightarrow \varphi$.

A afirmação é então verdadeira.

3. $\neg \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \psi \rightarrow \varphi$

Como a equivalência lógica é uma congruência, a equivalência em causa prova-se da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \neg \varphi \rightarrow \psi &\equiv \neg \neg \varphi \vee \psi && \text{(pois } \alpha \rightarrow \gamma \equiv \neg \alpha \vee \gamma) \\ &\equiv \varphi \vee \psi && \text{(pela lei da dupla negação)} \\ &\equiv \psi \vee \varphi && \text{(pela comutatividade da disjunção)} \\ &\equiv \neg \neg \psi \vee \varphi && \text{(pela lei da dupla negação)} \\ &\equiv \neg \psi \rightarrow \varphi && \text{(pois } \neg \alpha \vee \gamma \equiv \alpha \rightarrow \gamma) \end{aligned}$$

Grupo IV

(2+2 valores)

1. Considere que se pretende usar todos os conectivos da Lógica Proposicional referidos nas aulas. Na definição indutiva da linguagem, é necessário ter como primitivos os conectivos disjunção e conjunção se for primitivo o conectivo implicação? Justifique.

Solução: tendo o conectivo implicação como primitivo, podem-se definir os conectivos disjunção e conjunção como abreviaturas, pois:

- como $\varphi \vee \psi \equiv \neg \varphi \rightarrow \psi$, pode-se definir $\varphi \vee \psi \stackrel{\text{abv}}{=} \neg \varphi \rightarrow \psi$;
- como $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$ pode-se usar esta lei como abreviatura e usar a definição anterior.

2. Uma fórmula $\varphi \in F_P$ é finita se o conjunto das suas subfórmulas é finito. Mostre que o número de símbolos proposicionais de uma fórmula finita é finito.

Solução: O conjunto dos símbolos proposicionais de uma fórmula $\varphi \in F_P$, denotado $\text{SMB}(\varphi)$, é por definição dado por $\text{SBF}(\varphi) \cap P$. Como por hipótese $\text{SBF}(\varphi)$ é finito, então também o é $\text{SMB}(\varphi)$.