

# Lógica Computacional

LEI FCT UNL, 2º Semestre 2010/2011

## Resolução do Teste 2 Tipo

### Grupo I

(2.5+2.5 valores)

Mostre que:

1.  $\{\varphi \wedge (\psi \vee \gamma)\} \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)$

**Solução:**

$$\frac{\frac{(\varphi \wedge (\psi \vee \gamma))^1}{\psi \vee \gamma} (\wedge_{E_e}) \quad \frac{\frac{\frac{(\varphi \wedge (\psi \vee \gamma))^1}{\varphi} (\wedge_{E_d}) \quad \psi^2}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_I) \quad \frac{\frac{(\varphi \wedge (\psi \vee \gamma))^1}{\varphi} (\wedge_{E_d}) \quad \gamma^3}{\varphi \wedge \gamma} (\wedge_I)}{\frac{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)} (\vee_{I_d}) \quad \frac{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)} (\vee_{I_e})} (\vee_E, 2, 3)$$

2.  $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

**Solução:**

$$\frac{\frac{\frac{\varphi^1}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_I) \quad (\neg(\varphi \wedge \psi))^3}{\neg\varphi} (\rightarrow_E) \quad \frac{\frac{\perp}{\neg\varphi} (\rightarrow_I, 1)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee_{I_d}) \quad \frac{(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi))^4}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\rightarrow_E) \quad \frac{\frac{\perp}{\neg\psi} (\rightarrow_I, 2)}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\vee_{I_e}) \quad \frac{(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi))^4}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\rightarrow_E) \quad \frac{\frac{\perp}{\neg\varphi \vee \neg\psi} (\perp, 4)}{\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)} (\rightarrow_I, 3)$$

## Grupo II

(2.5+2.5 valores)

1. Converta a seguinte fórmula para a Forma Normal Conjuntiva e determine a sua natureza.

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$$

**Solução:**  $\mathcal{T}(\varphi) = \text{CNFC}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(\varphi)))$ .

$$\begin{aligned} \text{ImplFree}(\varphi) &= \neg \text{ImplFree}(p \vee q) \vee \text{ImplFree}(\neg(p \rightarrow q)) \\ &= \neg(p \vee q) \vee \neg \text{ImplFree}(p \rightarrow q) \\ &= \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NNFC}(\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee q)) &= \text{NNFC}(\neg(p \vee q)) \vee \text{NNFC}(\neg(\neg p \vee q)) \\ &= (\text{NNFC}(\neg p) \wedge \text{NNFC}(\neg q)) \vee (\text{NNFC}(\neg \neg p) \wedge \text{NNFC}(\neg q)) \\ &= (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CNFC}((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) &= \text{Distr}(\text{CNFC}(\neg p \wedge \neg q), \text{CNFC}(p \wedge \neg q)) \\ &= \text{Distr}(\neg p \wedge \neg q, p \wedge \neg q) \\ &= \text{Distr}(\neg p, p \wedge \neg q) \wedge \text{Distr}(\neg q, p \wedge \neg q) \\ &= \text{Distr}(\neg p, p) \wedge \text{Distr}(\neg p, \neg q) \wedge \text{Distr}(\neg q, p) \wedge \text{Distr}(\neg q, \neg q) \\ &= (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q) \\ &= \psi \end{aligned}$$

Note-se que a disjunção é idempotente. Como  $\neg p \vee p \equiv \top$  e  $\top$  é o elemento neutro da conjunção, tem-se que  $\psi \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \neg q$ . Logo, uma valoração  $V \models \psi$ , se  $V \models \neg p \vee \neg q$ ,  $V \models \neg q \vee p$ , e  $V \models \neg q$ . Então, fazendo  $V(q) = 0$  tem-se que  $V \models \psi$ . Conclui-se que  $\varphi$  é possível.

2. Mostre que dada uma fórmula  $\varphi \in G_P$ , a fórmula  $\text{ImplFree}(\varphi)$  não tem ocorrências do conectivo implicação.

**Solução:** Prova-se por indução estrutural em  $\varphi$ .

Caso base: Seja  $\varphi$  um símbolo proposicional (digamos  $p$ ). Então por definição,  $\text{ImplFree}(p) = p$ , que não tem ocorrências do conectivo implicação.

Passo: consideram-se 4 casos ( $\varphi = \neg\varphi_1$ ,  $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$  e  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ).

Caso  $\varphi = \neg\varphi_1$ ; então por definição,  $\text{ImplFree}(\varphi) = \neg \text{ImplFree}(\varphi_1)$  e como por hipótese de indução  $\text{ImplFree}(\varphi_1)$  não tem ocorrências do conectivo implicação, também não tem ocorrências de implicação  $\text{ImplFree}(\varphi)$ .

Caso  $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ; então por definição,  $\text{ImplFree}(\varphi) = \neg \text{ImplFree}(\varphi_1) \vee \text{ImplFree}(\varphi_2)$  e como por hipótese de indução nem  $\text{ImplFree}(\varphi_1)$  nem  $\text{ImplFree}(\varphi_2)$  têm ocorrências do conectivo implicação, também não tem ocorrências de implicação  $\text{ImplFree}(\varphi)$ .

Caso  $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ ; então por definição,  $\text{ImplFree}(\varphi) = \text{ImplFree}(\varphi_1) \vee \text{ImplFree}(\varphi_2)$  e como por hipótese de indução nem  $\text{ImplFree}(\varphi_1)$  nem  $\text{ImplFree}(\varphi_2)$  têm ocorrências do conectivo implicação, também não tem ocorrências de implicação  $\text{ImplFree}(\varphi)$ .

Caso  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ; a prova é semelhante ao caso anterior.

### Grupo III

(2.5+2.5 valores)

Determine, se possível, pelo algoritmo de Horn, a natureza das seguintes fórmulas.

1.  $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge q$

**Solução:** A fórmula está na Forma Normal Conjuntiva. Pelo Lema da disjunção de literais, a fórmula não é válida. Como cada cláusula é uma fórmula de Horn básica (tem no máximo um literal positivo),  $\varphi$  é uma fórmula de Horn. Converte-se primeiro a fórmula para a Forma de Horn e aplica-se depois o algoritmo para determinar se é possível ou contraditória.

$$\varphi \equiv \psi \stackrel{\text{def}}{=} (p \rightarrow p) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow \perp) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (\top \rightarrow q)$$

Sejam

$$\psi_1 \stackrel{\text{def}}{=} (p \rightarrow p) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow \perp) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (p \rightarrow p) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow \perp)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\psi, \{\top\}) &= \mathcal{A}(\psi_1, \{\top, q\}) \\ &= \mathcal{A}(\psi_2, \{\top, p, q\}) \\ &= \mathcal{A}(p \rightarrow p, \{\perp, \top, p, q\}) \\ &\supseteq \{\perp, \top, p, q\} \end{aligned}$$

Como  $\perp \in \mathcal{A}(\psi, \{\top\})$  (pois  $\mathcal{A}$  é uma função monótona crescente), então  $\mathcal{H}(\psi) = 0$ , logo  $\psi$  é contraditória. Conclui-se que  $\varphi$  também o é, pois  $\varphi \equiv \psi$ .

2.  $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

**Solução:** a fórmula está na forma de Horn: é uma conjunção de implicações só com literais positivos, tendo nos consequentes um só literal. Como nenhum literal é o  $\perp$ , então pelo corolário,  $\perp \notin \mathcal{A}(\varphi, \{\top\})$ , logo  $\mathcal{H}(\varphi) = 1$  e conclui-se que a fórmula é possível.

Note-se que, como  $\varphi \equiv (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ , pelo Lema da disjunção de literais, a fórmula não é válida.

## Grupo IV

(2.5+2.5 valores)

Mostre, usando Resolução, que são verdadeiras as seguintes afirmações.

1. A fórmula  $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$  é possível.

**Solução:** a fórmula está na FNC. Pelo Lema da disjunção de literais, a fórmula não é válida. Vai-se ver se é possível ou contraditória.

Sabe-se que  $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$  se e só se  $\varphi$  é contraditória. Calculam-se os resolventes de  $\varphi$ :

$$\text{Res}^0(\varphi) = \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p, r\}, \{\neg p, q\}\}$$

$$\text{Res}^1(\varphi) = \text{Res}^0(\varphi) \cup \{\{\neg q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, r\}\}$$

$$\text{Res}^2(\varphi) = \text{Res}^1(\varphi) \cup \{\{r\}\}$$

$$\text{Res}^*(\varphi) = \text{Res}^2(\varphi).$$

Como  $\emptyset \notin \text{Res}^*(\varphi)$ , pela Proposição, a fórmula não é contraditória. Uma vez que não era válida, conclui-se que é possível, como se queria.

2.  $\{p \vee s, \neg p \vee r, \neg q\} \models (p \wedge r) \vee (\neg q \wedge s)$

**Solução:** seja  $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q)$  e  $\psi \stackrel{\text{def}}{=} (p \wedge r) \vee (\neg q \wedge s)$ . Sabe-se que se  $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi \wedge \neg\psi)$  então  $\varphi \models \psi$ .

Considera-se então  $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}(\varphi \wedge \neg\psi) = (p \vee s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg s)$

Aplica-se agora o algoritmo de Resolução ao conjunto de cláusulas que representa univocamente  $\gamma$ :

$$\{\{p, s\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, \neg r\}, \{q, \neg s\}\}$$

| Dedução              | Justificação                         |
|----------------------|--------------------------------------|
| $\{\neg q\}$         | Cláusula $C_3$                       |
| $\{q, \neg s\}$      | Cláusula $C_5$                       |
| $\{\neg s\}$         | Resolvente de $C_3$ e $C_5$          |
| $\{p, s\}$           | Cláusula $C_1$                       |
| $\{p\}$              | Resolvente de $\{\neg s\}$ e $C_1$   |
| $\{\neg p, r\}$      | Cláusula $C_2$                       |
| $\{\neg p, \neg r\}$ | Cláusula $C_4$                       |
| $\{\neg p\}$         | Resolvente de $C_2$ e $C_4$          |
| $\emptyset$          | Resolvente de $\{p\}$ e $\{\neg p\}$ |

Conclui-se então que a afirmação é verdadeira.