

Lógica Computacional

LEI FCT UNL, 2º Semestre 2010/2011

Resolução do Teste 3 Tipo

Duração: 2h00m

Grupo I

(1+1 valores)

Represente as seguintes afirmações em lógica de primeira ordem:

1. Há quadrados perfeitos pares e ímpares.

Solução: $\exists x (\text{QuadrPerf}(x) \wedge \text{Par}(x)) \wedge \exists x (\text{QuadrPerf}(x) \wedge \text{Impar}(x))$

2. Há mais que dois testes nesta cadeira.

Solução: $\exists x \exists y \exists z (\text{Teste}(x, C) \wedge \text{Teste}(y, C) \wedge \text{Teste}(z, C) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

Grupo II

(3+3 valores)

Sejam $x, y, z \in X$ e $a \in SF_0$. Considere ainda a seguinte fórmula.

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \forall x Q(f(x), g(y, a)) \rightarrow \exists z M(z, f(x))$$

1. Calcule os conjuntos das variáveis livre e mudas da fórmula.

Solução: calculam-se recursivamente os conjuntos $\text{VL}(\varphi)$ e $\text{VM}(\varphi)$.

$$\begin{aligned} \text{VL}(\varphi) &= \text{VL}(\forall x Q(f(x), g(y, a))) \cup \text{VL}(\exists z M(z, f(x))) \\ &= \text{VL}(Q(f(x), g(y, a))) \setminus \{x\} \cup \text{VL}(M(z, f(x))) \setminus \{z\} \\ &= (\text{V}(f(x)) \cup \text{V}(g(y, a))) \setminus \{x\} \cup (\text{V}(z) \cup \text{V}(f(x))) \setminus \{z\} \\ &= (\text{V}(x) \cup \text{V}(y) \cup \text{V}(a)) \setminus \{x\} \cup (\{z\} \cup \text{V}(x)) \setminus \{z\} \\ &= (\{x\} \cup \{y\} \cup \emptyset) \setminus \{x\} \cup (\{z\} \cup \{x\}) \setminus \{z\} \\ &= \{y\} \cup \{x\} \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VM}(\varphi) &= \text{VM}(\forall x Q(f(x), g(y, a))) \cup \text{VM}(\exists z M(z, f(x))) \\ &= \{x\} \cup \text{VM}(Q(f(x), g(y, a))) \cup \{z\} \cup \text{VM}(M(z, s(x))) \\ &= \{x\} \cup \emptyset \cup \{z\} \cup \emptyset \\ &= \{x, z\} \end{aligned}$$

2. Se cada termo em baixo for livre na fórmula para a variável referida, encontre a nova fórmula que resulta da substituição dessa variável por esse termo.

(a) Seja $t = q(y)$, sendo a variável y .

Solução: como t é livre para y em φ , pois $\mathbf{V}(t) \cap \mathbf{VM}(\varphi) = \emptyset$, então

$$\varphi\{t/x\} = \forall x Q(f(x), g(q(y), a)) \rightarrow \exists z M(z, f(x))$$

(b) $t = q(x)$, sendo a variável y .

Solução: como t não é livre para y em φ , pois $x \in \mathbf{V}(t) \cap \mathbf{VM}(\varphi)$, não se deve substituir y por t em φ .

Grupo III

(3+3+3 valores)

Considere a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$ onde:

- $SF_0 = \{zero\}$, $SF_1 = \{suc\}$, $SF_2 = \{\oplus, \otimes\}$ e;
- $SP_2 = \{Eq\}$.

Considere também a estrutura de interpretação $\mathbf{Nat} = (\mathbb{N}_0, I)$, sendo:

- $I(zero) = 0$;
- $I(suc) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $I(suc)(n) = n + 1$;
- $I(\oplus) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $I(\oplus)(n, m) = n + m$;
- $I(\otimes) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $I(\otimes)(n, m) = n \times m$;
- $I(Eq) : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(Eq)(n, m) = 1$ se $n = m$ e $I(Eq)(n, m) = 0$ caso contrário.

Verifique semanticamente se:

1. $\mathbf{Nat} \models \forall x \exists y Eq(\otimes(suc(zero), x), \oplus(y, x))$

Solução: tem que se mostrar que para qualquer atribuição ρ se tem que

$$\mathbf{Nat}, \rho \models \forall x \exists y Eq(\otimes(suc(zero), x), \oplus(y, x))$$

i.e., para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ encontra-se um $m \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\mathbf{Nat}, \rho[x := n][y := m] \models Eq(\otimes(suc(zero), x), \oplus(y, x))$$

Seja $m = 0$.

$$\begin{aligned} I(Eq)(\llbracket \otimes(suc(zero), x) \rrbracket_{\mathbf{Nat}}^{\rho[x:=n][y:=0]}, \llbracket \oplus(y, x) \rrbracket_{\mathbf{Nat}}^{\rho[x:=n][y:=0]}) &= \\ (I(\otimes)(\llbracket suc(zero) \rrbracket_{\mathbf{Nat}}^{\rho[x:=n][y:=0]}, \llbracket x \rrbracket_{\mathbf{Nat}}^{\rho[x:=n][y:=0]}) &= I(\oplus)(\llbracket y \rrbracket_{\mathbf{Nat}}^{\rho[x:=n][y:=0]}, \llbracket x \rrbracket_{\mathbf{Nat}}^{\rho[x:=n][y:=0]}) = \\ ((I(suc)(\llbracket zero \rrbracket_{\mathbf{Nat}}^{\rho[x:=n][y:=0]}) \times \rho[x := n][y := 0](x)) &= (\rho[x := n][y := 0](y) + \rho[x := n][y := 0](x)) = \\ (((I(zero) + 1) \times n) = (0 + n)) &= \\ (((0 + 1) \times n) = n) &= \\ (n = n) &= \end{aligned}$$

2. $\{\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

Solução: considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sendo $I(P)(n) = 1$ se $n > 3$ e $I(Q) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $I(Q)(n) = 1$ se $n < 3$. Para qualquer atribuição ρ tem-se que $\mathcal{M}, \rho \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$:

- (a) $\mathcal{M}, \rho \models \exists x P(x)$, uma vez que $\mathcal{M}, \rho[x := 4] \models P(x)$, pois

$$I(P)(\rho[x := 4](x)) = I(P)(4) = 1$$

- (b) $\mathcal{M}, \rho \models \exists x Q(x)$, uma vez que $\mathcal{M}, \rho[x := 2] \models P(x)$, pois

$$I(Q)(\rho[x := 2](x)) = I(Q)(2) = 1$$

No entanto, $\mathcal{M}, \rho \not\models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$, pois não é verdade que para existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathcal{M}, \rho[x := n] \models P(x)$ e $\mathcal{M}, \rho[x := n] \models Q(x)$. Conclui-se então que

$$\{\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\} \not\models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

3. $\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \forall x \varphi \rightarrow \exists x \psi$

Solução: como a equivalência lógica é uma congruência, a equivalência em causa prova-se da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \exists x (\varphi \rightarrow \psi) &\equiv \exists x (\neg \varphi \vee \psi) && \text{(pois } \psi \rightarrow \varphi \equiv \neg \psi \vee \varphi) \\ &\equiv \exists x \neg \varphi \vee \exists x \psi && \text{(pois } \exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi) \\ &\equiv \neg \forall x \varphi \vee \exists x \psi && \text{(pois } \exists x \neg \varphi \equiv \neg \forall x \varphi) \\ &\equiv \forall x \varphi \rightarrow \exists x \psi && \text{(pois } \neg \varphi \vee \psi \equiv \varphi \rightarrow \psi) \end{aligned}$$

Grupo IV

(1+2 valores)

1. Considere que dada assinatura é tal que $f \in SF_1$, e seja $x \in X$. A expressão $\forall x f(x)$ é uma fórmula da Lógica de primeira ordem? Justifique.

Solução: a expressão dada é uma fórmula, se $f(x)$ o for. Mas trata-se de uma função, pois $f \in SF_1$, não de um predicado, logo não é uma fórmula.

2. Mostre que o conjunto das variáveis de um termo (concreto) de primeira ordem é finito.

Solução: prova-se por indução na estrutura dos termos.

- Caso $t = a$, para $a \in SF_0$; por definição, $V(t) = V(a) = \emptyset$, que é finito.
- Caso $t = x$, para $x \in X$; por definição, $V(t) = V(x) = \{x\}$, que é finito.
- Caso $t = f(t_1, \dots, t_n)$, para $f \in SF_n$ e $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq (T_\Sigma^X)^n$, com $n \geq 0$; por definição, $V(t) = V(f(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} V(t_i)$, e como por hipótese de indução cada $V(t_i)$ é finito, também o é a união indicada.