Lógica Computacional

LEI FCT UNL, 2º Semestre 2010/2011

Resolução do Teste 4 Tipo

Grupo I (2.5+2.5+1.0 valores)

Mostre que são verdadeiras as seguintes afirmações:

1. $\vdash (\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$.

   Solução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))^1}{\forall x\, P(x)}\wedge_{E_d}}{(P(x))\{y/x\} = P(y)}\forall_E \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))^1}{\forall x\, Q(x)}\wedge_{E_e}}{(Q(x))\{y/x\} = Q(y)}\forall_E}{P(y) \wedge Q(y) \overset{\text{def}}{=} (P(x) \wedge Q(x))\{y/x\}}\wedge_I}{\forall x(P(x) \wedge Q(x))}\forall_I\ \text{(C1,C2)}}{(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \wedge Q(x))}\to_{I,1}$$

   Onde:

   C1 $y \notin VL(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$;

   C2 como $x \neq y$ também $y \notin VL(P(x) \wedge Q(x))$.

2. $\{\exists x\, P(x)\} \vdash \neg\forall x\, \neg P(x)$.

   Solução:

$$\dfrac{(\exists x P(x))^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x \neg P(x))^2}{(\neg P(x))\{y/x\} = \neg P(y)}\forall_E \qquad (P(x))\{y/x\})^3 = P(y)}{\bot}\to_E}{\dfrac{\bot}{\neg\forall x \neg P(x)}\to_{I,2}}\exists_{E,3}\ \text{(C1,C2,C3)}$$

   Onde:

   C1 a única hipótese aberta para além da que tem a marca 3 é a que tem a marca 2, que não tem variáveis livres, logo $y \notin VL(\forall x\, \neg P(x))$.

   C2 : Não há variáveis livres em $\bot$, logo $y \notin VL(\bot)$.

   C3 : como $x \neq y$ também $y \notin VL(P(x))$.

3. A seguinte derivação não é uma prova.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(z,z)^1}{\exists x P(x,z)}\ \exists_I}{P(z,z) \to \exists x P(x,z)}\ \to_{I,1}}{\forall y\,(P(y,z) \to \exists x P(x,z))}\ \forall_I\ {\scriptstyle (\mathrm{C1,C2})}$$

Solução: repare-se primeiro que $P(z,z) = P(x,z)\{z/x\}$, pelo que as substituições usadas nas regras $\exists_I$ e $\forall_I$ estão correctas. A aplicação da regra $\forall_I$ deve respeitar as seguintes condições laterais:

C1 y não ocorre livre nas hipóteses abertas;

C2 como $y \neq z$ também $z \notin VL(P(y,z) \to \exists x P(x,z))$.

Note-se que a derivação não tem hipóteses abertas, logo C1 verifica-se trivialmente. No entanto, C2 não se verifica, pois $z \in VL(P(y,z))$. Logo, a derivação dada não é uma prova.

Grupo II (4.0+2.0 valores)

1. Converta a seguinte fórmula para a Forma Normal Conjuntiva Prenex.

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg((\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \to \forall x\, (P(x) \wedge \forall y\, Q(x,y)))$$

Solução: aplica-se à fórmula o algoritmo $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P}(\varphi) = (\text{Scope}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(\varphi))))$$

Calcula-se separadamente cada função. Seja

$$\varphi' \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \to \forall x\, (P(x) \wedge \forall y\, Q(x,y))$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{ImplFree}(\neg\varphi') & = & \\
\neg\mathrm{ImplFree}(\varphi') & = & \\
\neg(\neg\mathrm{ImplFree}(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \vee \mathrm{ImplFree}(\forall x\, (P(x) \wedge \forall y\, Q(x,y)))) & = & \\
\neg(\neg(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \vee \forall x\, (P(x) \wedge \forall y\, Q(x,y))) & = & \psi
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{NNFC}(\psi) & = & \\
\mathrm{NNFC}(\neg\neg(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y))) \wedge \mathrm{NNFC}(\neg\forall x\, (P(x) \wedge \forall y\, Q(x,y))) & = & \\
\mathrm{NNFC}(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \wedge \exists x\, \mathrm{NNFC}(\neg(P(x) \wedge \forall y\, Q(x,y))) & = & \\
(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \wedge \exists x\, (\mathrm{NNFC}(\neg P(x)) \vee \mathrm{NNFC}(\neg\forall y\, Q(x,y))) & = & \\
(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \wedge \exists x\, (\mathrm{NNFC}(\neg P(x)) \vee \exists y\, \mathrm{NNFC}(\neg Q(x,y))) & = & \\
(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \wedge \exists x\, (\neg P(x) \vee \exists y\, \neg Q(x,y)) & = & \phi
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Scope}(\phi) & = & \\
\exists x_0\, \mathrm{Scope}((\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \exists y\, \neg Q(x_0,y))) & = & \\
\exists x_0\, \mathrm{Scope}(\mathrm{Scope}(\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \wedge \mathrm{Scope}(\neg P(x_0) \vee \exists y\, \neg Q(x_0,y))) & = & \\
\exists x_0\, \mathrm{Scope}(\forall x_1\, \mathrm{Scope}(P(x_1) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \wedge \exists y_0\, \mathrm{Scope}(\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \mathrm{Scope}(\forall x_1\, \forall x_2\, \mathrm{Scope}(P(x_1) \wedge \forall y\, Q(x_2,y)) \wedge \exists y_0\, (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \mathrm{Scope}(\forall x_1\, \forall x_2\, \forall y_1\, \mathrm{Scope}(P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge \exists y_0\, (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \mathrm{Scope}(\forall x_1\, \forall x_2\, \forall y_1\, (P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge \exists y_0\, (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \forall x_1\, \mathrm{Scope}(\forall x_2\, \forall y_1\, (P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge \exists y_0\, (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \forall x_1\, \forall x_2\, \mathrm{Scope}(\forall y_1\, (P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge \exists y_0\, (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \forall x_1\, \forall x_2\, \forall y_1\, \mathrm{Scope}((P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge \exists y_0\, (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \forall x_1\, \forall x_2\, \forall y_1\, \exists y_0\, \mathrm{Scope}((P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \forall x_1\, \forall x_2\, \forall y_1\, \exists y_0\, ((P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0))) & = & \\
\exists x_0\, \forall x_1\, \forall x_2\, \forall y_1\, \exists y_0\, \chi & &
\end{array}
$$

$$
\text{Note-se que } \chi \text{ já está na Formal Normal Conjuntiva, logo } \mathrm{CFNC}(\chi) \quad = \quad \chi
$$

2. Converta a seguinte fórmula para a Forma Normal de Skolem.

$$
\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \exists x_0\, \forall x_1\, \forall x_2\, \exists y_1\, \exists y_0\, ((P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge (\neg P(x_0) \vee \neg Q(x_0,y_0)))
$$

Solução: como a fórmula dada já está na FNCP, basta fazer a Skolemização. Uma vez que ocorrem na fórmula três quantificadores existenciais, tem que se calcular $s^3(\varphi)$.

$$
\begin{array}{rcl}
s^3(\varphi) & = & \\
s^2(\forall x_1\, \forall x_2\, \exists y_1\, \exists y_0\, ((P(x_1) \wedge Q(x_2,y_1)) \wedge (\neg P(a) \vee \neg Q(a,y_0)))) & = & \\
s(\forall x_1\, \forall x_2\, \exists y_0\, ((P(x_1) \wedge Q(x_2,f(x_1,x_2))) \wedge (\neg P(a) \vee \neg Q(a,y_0)))) & = & \\
\forall x_1\, \forall x_2\, ((P(x_1) \wedge Q(x_2,f(x_1,x_2))) \wedge (\neg P(a) \vee \neg Q(a,g(x_1,x_2)))) & &
\end{array}
$$

Grupo III (2.0+2.0+2.0+2.0 valores)

1. Verifique se são unificáveis os seguintes conjuntos de fórmulas, indicando, em caso afirmativo, um unificador mais geral.

   (a) $\{R(f(g(x)), a, x), R(f(g(a)), y, b), R(f(z), a, z)\}$

   Solução: seja $\mathcal{L}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{R(f(g(x)), a, x), (f(g(a)), y, b), R(f(z), a, z)\}$. Tomando a substituição $sub_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{a/x\}\{g(a)/z\}$ obtém-se

   $$\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_0 sub_1 = \{R(f(g(a)), a, a), (f(g(a)), y, b), R(f(g(a)), a, g(a))\}$$

   Tomando agora a substituição $sub_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{a/y\}$ obtém-se

   $$\mathcal{L}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_1 sub_2 = \{R(f(g(a)), a, a), (f(g(a)), a, b), R(f(g(a)), a, g(a))\}$$

   Como já não há mais substituições possíveis e não se obteve um conjunto singular, conclui-se que o conjunto não é unificável.

   (b) $\{R(f(g(x)), a, y), R(f(g(y)), y, x), R(f(z), x, y)\}$

   Solução: seja $\mathcal{L}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{R(f(g(x)), a, y), R(f(g(y)), y, x), R(f(z), x, y)\}$. Tomando a substituição $sub_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x/y\}\{g(x)/z\}$ obtém-se

   $$\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_0 sub_1 = \{R(f(g(x)), a, x), R(f(g(x)), x, x)\}$$

   Tomando agora a substituição $sub_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{a/x\}$ obtém-se

   $$\mathcal{L}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_1 sub_2 = \{R(f(g(a)), a, a)\}$$

   Como se obteve um conjunto singular, conclui-se que o conjunto é unificável. Como já não há mais substituições possíveis, conclui-se que $sub_1 sub_2$ é um unificador mais geral.

2. Considere que $\{A, B, C\} \subseteq SP_0$. Mostre, usando se possível Resolução-SLD e senão Resolução-L ou Resolução-N, que são contraditórias as seguintes fórmulas.

   (a) $(A \vee B \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg A) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A)$

   Solução: a fórmula está na FNC, mas não é uma forma de Horn porque tem cláusulas com mais de um literal positivo (a primeira, por exemplo). Logo, não se pode fazer Resolução-SLD. Mostra-se então o resultado pedido por Resolução-L, usando a proposição que garante que se se deriva o conjunto $\emptyset$ fazendo Resolução-L ou Resolução-N, então a fórmula é contraditória.

Dedução	Justificação
$\{A, B, C\}$	Cláusula C_3
$\{A, B, \neg C\}$	Cláusula C_1
$\{A, B\}$	Resolvente de C_3 e C_1
$\{A, \neg B\}$	Cláusula C_4
$\{A\}$	Resolvente de $\{A, B\}$ e C_4
$\{\neg A\}$	Cláusula C_2
$\emptyset$	Resolvente de $\{A\}$ e C_2

   Como se obteve o conjunto $\emptyset$, conclui-se então pela proposição que a fórmula é contraditória.

   (b) $(A \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$

   Solução: a fórmula está na FNC e é uma forma de Horn porque todas as cláusulas têm no máximo um literal positivo. Logo, pode-se fazer Resolução-SLD. Mostra-se então o resultado pedido, usando selector à direita e a proposição que garante que se se deriva o conjunto $\emptyset$ fazendo Resolução-SLD, então a fórmula é contraditória.

Dedução	Justificação
$\{\neg B, \neg C\}$	Cláusula C_2
$\{\neg A, \neg B, C\}$	Cláusula C_4
$\{\neg A, \neg B\}$	Resolvente de C_2 e C_4
$\{\neg A, B\}$	Cláusula C_3
$\{\neg A\}$	Resolvente de $\{\neg A, \neg B\}$ e C_3
$\{A\}$	Cláusula C_1
$\emptyset$	Resolvente de $\{\neg A\}$ e C_1

   Como se obteve o conjunto $\emptyset$, conclui-se então pela proposição que a fórmula é contraditória.