

# MATEMÁTICA DISCRETA

Época Normal - 2008.06.30

## Primeira Parte

Todas as respostas terão de ser devidamente justificadas.

1. Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto  $\mathcal{U}$ . Utilizando as propriedades das operações sobre conjuntos, mostre que

$$\overline{((A \cup \overline{B}) \cap \overline{A})} \cap (\overline{A} \cup B) = B.$$

2. Usando o Princípio de Indução, mostre que

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

3. Determine

- (a)  $\text{mdc}\{-26, -76\}$ , utilizando o algoritmo de Euclides;  
(b)  $u, v \in \mathbb{Z}$  tais que  $\text{mdc}\{-26, -76\} = (-26)u + (-76)v$ .

4. Resolva a relação de recorrência

$$a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2},$$

sujeita às condições iniciais  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 7$ .

5. Determine todas as soluções da congruência linear

$$5x \equiv 40 \pmod{50},$$

no conjunto:

- (a)  $\mathbb{Z}_{50}$  ;  
(b)  $X = \{l \in \mathbb{Z} : -15 \leq l \leq 70\}$ .

6. Considere o conjunto  $A = \{1, 2, 5, 7, 30, 50\}$  e  $R$  a relação de ordem parcial sobre  $A$  definida por:

$$a R b \quad \text{se, e só se,} \quad a = b \text{ ou } a^2 \leq b.$$

- (a) Construa o diagrama de Hasse de  $(A, R)$ .  
(b) Caso seja possível, indique um conjunto  $B$  com primeiro e com último elemento e tal que

$$\{5, 7\} \subseteq B \subseteq A.$$

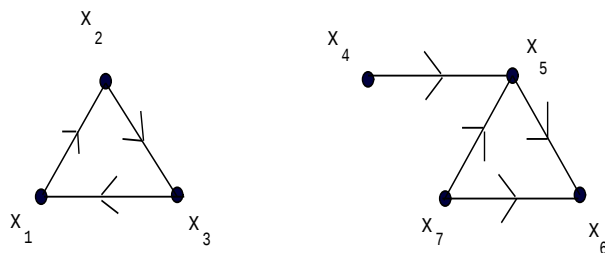
# MATEMÁTICA DISCRETA

Época Normal - 2008.06.30

## Segunda Parte

Todas as respostas terão de ser devidamente justificadas.

7. Considere o digrafo  $G$  dado por



Indique:

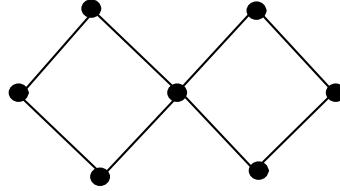
- (a) as componentes conexas de  $G$ ;
- (b) as componentes fortemente conexas de  $G$ ;
- (c) se existe, em  $G$ , alguma cadeia  $x_6 - x_4$  com comprimento 3;
- (d) se existe, em  $G$ , algum circuito elementar.

8. Indique:

- (a) o conjunto dos valores de  $r$ , com  $r \in \mathbb{N}$ , tal que o grafo bipartido completo  $K_{2r,3r}$  é euleriano;
- (b) caso seja possível, um grafo simples em que todos os vértices têm grau par e não seja euleriano;
- (c) caso seja possível, um grafo bipartido completo que seja hamiltoniano mas não seja euleriano.

(Continua na página seguinte)

9. (a) Determine 3 árvores maximais não isomorfas do grafo



- (b) Mostre que qualquer árvore que tenha a sequência de graus

$$3, 3, 3, 3, 3, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1,$$

tem o mesmo número de vértices de grau 1 e determine tal número.

10. Seja  $G = (X, \mathcal{U})$  um digrafo conexo tal que

$$d^+(x) = d^-(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Justifique que  $G$  é fortemente conexo.