FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame da Época Especial

Matemática Discreta

8 de Setembro de 2009

Primeira Parte

[1.0] 1. Sejam $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ e $Y = \{\{3\}\}$. Determine o conjunto $\mathcal{P}(\cup X \times \cap Y)$.

[2.0] 2. Sejam $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $S = \{(1,3),(2,7),(6,6)\}$ (relação binária sobre X) e R a relação de equivalência sobre X tal que $X/R = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\},\{7,8\}\}$.

(a) Determine S^{-1}, $\mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(S)$.

(b) Represente a relação binária R por meio de um diagrama.

(c) Indique os elementos de $R \circ S$.

[1.0] 3. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas funções bijectivas. Prove que $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é uma função bijectiva.

[1.0] 4. Mostre que $24n + 12n^3$ é divisível por 36, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

[2.0] 5. Considere os números inteiros $a = 140$ e $b = 96$. Determine:

(a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;

(b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;

(c) As formas standard de a e de b;

(d) $m = \text{mmc}\{a, b\}$.

[1.0] 6. Determine uma solução do sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 5 \\ 2x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

no conjunto $\{0, 1, \ldots, 14\}$.

[1.0] 7. Resolva a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $a_0 = -1$ e $a_1 = 1$.

[3.0] 8. Considere a sequência $S = (5,4,3,2,2,2,2,2,2)$.

(a) Verifique que S é uma sequência gráfica, **usando o algoritmo estudado nas aulas**.

(b) Sendo G um grafo simples conexo que admite S como sequência de graus, indique justificando:

i. A ordem e o tamanho de G;

ii. Se G é semi-euleriano;

iii. Se G é euleriano.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame da Época Especial

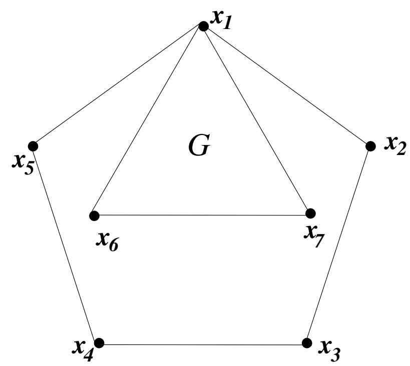
Matemática Discreta

8 de Setembro de 2009

Segunda Parte

[**1.0**] 9. Represente geometricamente todos os torneios não isomorfos com pelo menos três vértices.

[**3.0**] 10. Considere o seguinte grafo G:

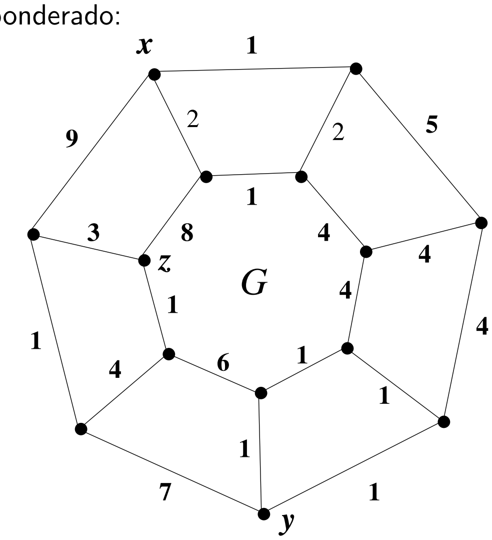


(a) Indique a matriz M das adjacências de G relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$.

(b) Utilize a matriz M para calcular o número de cadeias distintas de x_1 para x_7 de comprimento três.

(c) Justifique que G é um grafo euleriano e determine um ciclo euleriano, usando o **algoritmo de Fleury** com início no vértice x_7.

[**3.0**] 11. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.

(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice z, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.

(c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x-y$ mínima L entre os vértices x e y. Indique o valor de L.

[**1.0**] 12. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples com pelo menos três vértices tal que o subgrafo $G - x$ é conexo, para qualquer $x \in X$. Mostre que, para qualquer $u \in \mathcal{U}$, existe pelo menos um ciclo de G que contém u.