FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame da Época Normal

Matemática Discreta

22 de Junho de 2009

Primeira Parte

[1.0] 1. Sejam A, B, C e D quatro conjuntos tais que $B \neq \emptyset$ e $A \times B \subseteq C \times D$. Mostre que $A \subseteq C$.

[2.0] 2. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ e a relação binária

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,e),(c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$

definida sobre A.

(a) Determine a matriz das adjacências da relação R.

(b) Prove que R é uma relação de ordem parcial sobre A.

(c) Represente a relação R por meio de um diagrama de Hasse.

[1.0] 3. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_1 = 6$, $u_2 = 27$ e $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$, para $n \geq 3$. **Usando o Princípio de Indução Completa**, mostre que $u_n = (n+1)3^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

[2.0] 4. Considere os números inteiros $a = 3080$ e $b = 1650$. Determine:

(a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;

(b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;

(c) A forma standard de a e de b;

(d) $m = \text{mmc}\{a, b\}$.

[1.0] 5. Determine todas as soluções da congruência linear $12x \equiv 6 \pmod{18}$ no conjunto $\{-18, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 17\}$.

[1.0] 6. Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

[2.0] 7. Seja G um grafo simples que admite $(5, 4, 4, 4, 4, 4, 3)$ como sequência de graus.

(a) Indique justificando a ordem e o tamanho de G.

(b) Justifique que G é hamiltoniano.

[1.0] 8. Verifique, **usando o algoritmo estudado nas aulas**, se $(4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2)$ é uma sequência gráfica.

Exame da Época Normal

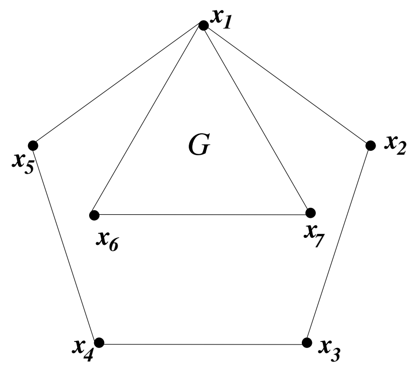
Matemática Discreta

22 de Junho de 2009

Segunda Parte

[**1.0**] 9. Represente geometricamente três grafos simples não isomorfos que admitam $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$ como sequência de graus. Indique os que são conexos. Não precisa justificar.

[**3.0**] 10. Considere o seguinte grafo G:



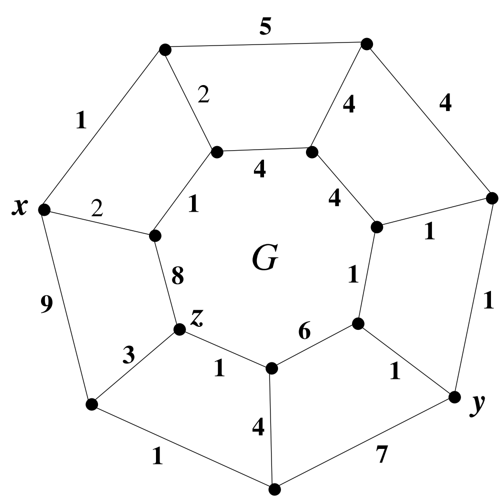
(a) Este grafo é bipartido? Justifique.

(b) Indique a matriz M das adjacências de G relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$.

(c) Utilize a matriz M para calcular o número de cadeias distintas de x_1 para x_7 de comprimento três.

(d) Justifique que G é um grafo euleriano e determine um ciclo euleriano, usando o **algoritmo de Fleury** com início no vértice x_1. (Descreva sumariamente este algoritmo.)

[**3.0**] 11. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.

(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice z, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.

(c) Utilize o **algoritmo do Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L entre os vértices x e y. Indique o valor de L.

[**2.0**] 12. Sejam $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples e $u = \{x, y\} \in \mathcal{U}$. Sejam z um elemento tal que $z \notin X$ (novo vértice) e $G\%u$ o grafo simples de vértices $X \cup \{z\}$ e arcos $(\mathcal{U} \setminus \{u\}) \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\}$.

Mostre que G é uma árvore se e só se $G\%u$ for uma árvore.