FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame da Época de Recurso

Matemática Discreta

13 de Julho de 2009

Primeira Parte

[2.5] 1. Seja R a relação binária definida sobre o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ cuja matriz das adjacências é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Represente a relação R por meio de um diagrama.

(b) Prove que R é uma relação de ordem parcial sobre X.

(c) Represente a relação R por meio de um diagrama de Hasse.

(d) Indique, se existirem, o mínimo, o máximo, os elementos minimais e os elementos maximais de $X \setminus \{x_4\}$.

(e) Indique, justificando, uma relação de equivalência S sobre X tal que $R \subseteq S$ e determine o respectivo conjunto cociente X/S.

[1.0] 2. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ é um múltiplo de 3, **usando o Princípio de Indução**.

[2.0] 3. Considere os números inteiros $a = 819$ e $b = 440$. Determine:

(a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;

(b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;

(c) A forma standard de a e de b;

(d) $m = \text{mmc}\{a, b\}$.

[1.5] 4. Determine todas as soluções da congruência linear $4x \equiv 2 \pmod{42}$ no conjunto Z_{42}.

[1.0] 5. Resolva a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$.

[3.0] 6. Considere a sequência $S = (5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

(a) Verifique que S é uma sequência gráfica, **usando o algoritmo estudado nas aulas**.

(b) Sendo G um grafo simples conexo que admite S como sequência de graus, indique justificando:

i. A ordem e o tamanho de G;

ii. Se G é semi-euleriano;

iii. Se G é euleriano.

[1.0] 7. Represente geometricamente cinco grafos simples conexos não isomorfos com cinco vértices que admitam um e um só (subgrafo) ciclo.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

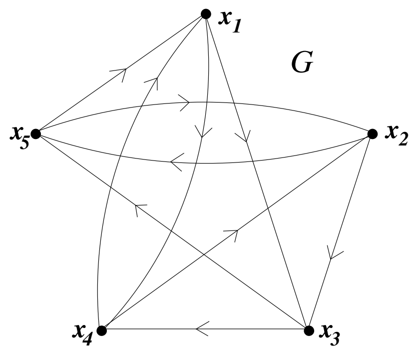
Exame da Época de Recurso

Matemática Discreta

13 de Julho de 2009

Segunda Parte

[**2.0**] 8. Considere o seguinte digrafo G:

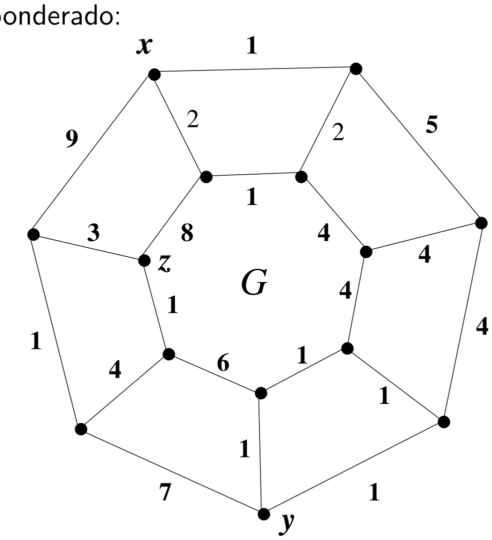


Justifique se:

(a) G possui um circuito euleriano;

(b) O grafo subjacente a G é hamiltoniano.

[**3.0**] 9. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.

(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice z, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.

(c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x-y$ mínima L entre os vértices x e y. Indique o valor de L.

[**2.0**] 10. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples com pelo menos três vértices tal que o subgrafo $G - x$ é conexo, para qualquer $x \in X$. Mostre que, para qualquer $u \in \mathcal{U}$, existe pelo menos um ciclo de G que contém u.

[**1.0**] 11. Sejam A e B dois conjuntos tais que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq B \setminus A$. Mostre que $A \subseteq B$.