FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame de Época Especial
Matemática Discreta
17 de Setembro de 2010

[**1.0**] 1. Sejam $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ e $Y = \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Determine o conjunto $\mathcal{P}(\cup \cup X \times \cap \cap Y)$.

[**1.0**] 2. Sejam A, B, C e D quatro conjuntos tais que $B \neq \emptyset$ e $A \times B \subseteq C \times D$. Mostre que $A \subseteq C$.

[**2.5**] 3. Seja R a relação binária definida sobre o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ cuja matriz das adjacências é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Represente a relação R por meio de um diagrama.

(b) Prove que R é uma relação de ordem parcial sobre X.

(c) Represente a relação R por meio de um diagrama de Hasse.

(d) Indique, se existirem, o mínimo, o máximo, os elementos minimais e os elementos maximais de $X \setminus \{x_4\}$.

(e) Indique, justificando, uma relação de equivalência S sobre X tal que $R \subseteq S$ e determine o respectivo conjunto cociente X/S.

[**1.0**] 4. Considere a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $u_0 = -6$, $u_1 = 0$, $u_2 = 9$ e $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2} + 3u_{n-3}$, para $n \geq 3$. Usando o Princípio de Indução Completa, mostre que u_n é divisível por 3, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

[**2.0**] 5. Considere os números inteiros $a = 2750$ e $b = 1470$. Determine:

(a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;

(b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;

(c) As formas standard de a e de b;

(d) $m = \text{mmc}\{a, b\}$;

(e) O número b na base 2.

[**1.0**] 6. Determine uma solução do sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 5 \\ 2x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

no conjunto $\{15, 16, \ldots, 29\}$.

[**1.0**] 7. Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $a_0 = 2$ e $a_1 = -2$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame de Época Especial

Matemática Discreta

17 de Setembro de 2010

[**1.0**] 8. Represente geometricamente todos os torneios não isomorfos com um, dois e três vértices. Justifique.

[**2.5**] 9. (a) **Usando o algoritmo estudado nas aulas**, mostre que $(8, 8, 7, 7, 6, 6, 6, 6, 4)$ é uma sequência gráfica.

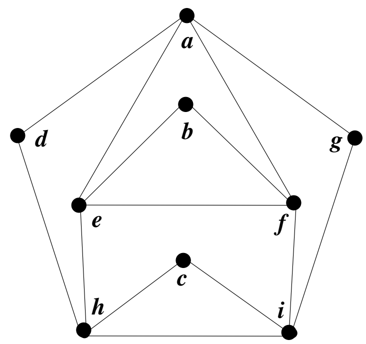
(b) Seja G um grafo simples que admite como sequência de graus a sequência anterior.

i. Indique justificando a ordem e o tamanho de G.

ii. Justifique que G é hamiltoniano.

iii. Justifique que G é semi-euleriano.

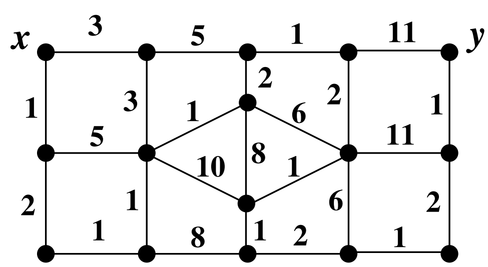
[**2.0**] 10. Considere o seguinte grafo G:



(a) Verifique se G é um grafo bipartido. E tripartido?

(b) Justifique que G é um grafo euleriano e determine um ciclo euleriano, usando o **algoritmo de Fleury** com início no vértice d. (Descreva sumariamente este algoritmo.)

[**3.0**] 11. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor. ***[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]***

(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice x, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. ***[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]***

(c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L. Indique L e o seu valor. ***[Tem de indicar explicitamente a sequência de atribuições efectuada!]***

[**2.0**] 12. Sejam $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples e $u = \{x, y\} \in \mathcal{U}$. Sejam z um elemento tal que $z \notin X$ (novo vértice) e $G\%u$ o grafo simples de vértices $X \cup \{z\}$ e arcos $(\mathcal{U} \setminus \{u\}) \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\}$.

Mostre que G é uma árvore se e só se $G\%u$ for uma árvore.