

- [2.0] 1. Considere $A = \{ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \}$ e $B = \{ \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \}$. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

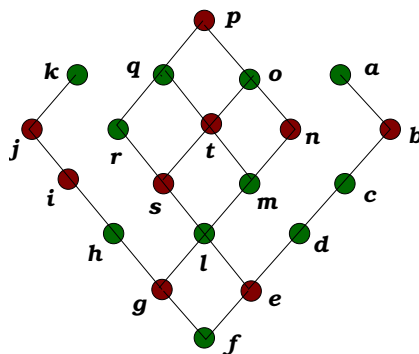
(a) $\cap A$; (b) $\cup A$; (c) $\cup(\cap(A \setminus B))$; (d) $\cap(\cup(A \setminus B))$; (e) $\cap(\cup(B \setminus A))$; (f) $\mathcal{P}(\cap(B \setminus A))$.

- [2.0] 2. Sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considere as relações $S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (5, 6), (6, 6), (6, 4)\}$.

- (a) Indique os elementos de $\text{Dom}(S)$, $\text{Im}(S)$ e S^{-1} .
(b) Determine $R \circ S$.
(c) Represente a relação R por meio de um diagrama.
(d) Justifique se R é uma relação de equivalência.
(e) Indique a matriz das adjacências da relação de equivalência T sobre X tal que $X/T = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

Mudar de Folha

- [1.0] 3. Considere o conjunto $X = \{a, b, c, \dots, r, s, t\}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos mínimo, máximo, minimais, maximais, minorantes, majorantes, ínfimo e supremo do subconjunto $A = \{a, c, d, f, h, k, l, m, o, q, r\}$ do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

- [1.0] 4. Considere a sucessão definida por $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ e, para $n \geq 2$, $a_n = 4a_{n-1} + 77a_{n-2}$. Mostre, usando o Princípio de Indução Completa, que $a_n = 11^n + (-1)^n 7^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- [1.0] 5. Considere os números inteiros $a = 350$ e $b = 198$. Determine:

- (a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;
(b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;

- [1.0] 6. Determine uma solução comum às congruências lineares $2x \equiv 3 \pmod{7}$ e $3x \equiv 2 \pmod{11}$ no conjunto $Z_{77} = \{0, 1, \dots, 76\}$.

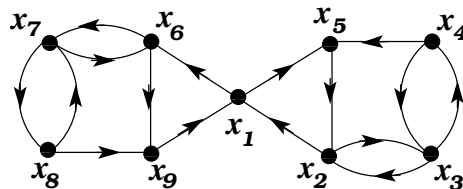
- [1.0] 7. Resolva a relação de recorrência $a_n = -4a_{n-1} + 77a_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $a_0 = 2$ e $a_1 = -4$.

- [1.0] 8. Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejectiva e $B \subseteq Y$. Mostre que $f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B$.

Mudar de Folha

- [1.0] 1. Represente geometricamente três grafos simples não isomorfos de tamanho cinco com exactamente dois vértices de grau dois e exactamente três vértices de grau um (pode ter vértices de outros graus). Justifique por que não são isomorfos.
- [2.0] 2. (a) Mostre, usando o algoritmo estudado nas aulas, que existe um grafo simples G que admite $(6, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 4)$ como sequência de graus.
(b) Indique justificando a ordem e o tamanho de G .
(c) Justifique que G é hamiltoniano.

- [3.0] 3. Considere o seguinte digrafo $G = (X, U)$:



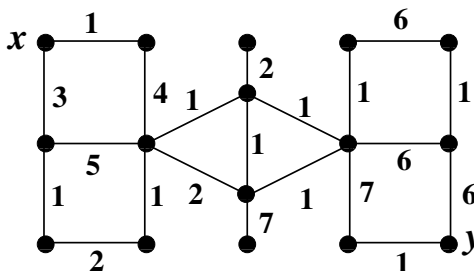
Sejam $u = (x_5, x_4), v = (x_9, x_8)$, $Y = \{x_6, x_7, x_8, x_9\}$, $G_0 = G - Y$, $G_1 = G + u$ e $G_2 = G_1 + v$.

Seja G' o grafo subjacente a G_0 .

- (a) Indique a sequência de graus exteriores, a sequência de graus interiores e a sequência de graus de G .
(b) Verifique se o digrafo G é fortemente conexo e indique as suas componentes fortemente conexas.
(c) Os digrafos G_1 e G_2 têm caminhos eulerianos abertos ou fechados? Justifique.
(d) Indique a matriz A das adjacências de G' relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.
(e) Utilize a matriz A para determinar o número de cadeias $x_1 - x_5$ de comprimento 3 de G' .
(f) Indique justificando se os grafos $G - x_1$ e $G' - x_1$ são conexos.

Mudar de Folha

- [3.0] 4. Considere o seguinte grafo ponderado:



- (a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.
[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]
(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice x , para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.
[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]
(c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L . Indique L e o seu valor. [Tem de indicar explicitamente a sequência de atribuições efectuada!]
- [1.0] 5. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples com pelo menos dois arcos tal que, para qualquer $x \in X$, $G - x$ é um grafo conexo. Seja $u \in U$. Mostre que u faz parte de um ciclo de G .