

[2.0] 1. Considere $A = \{ \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \}$. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

- (a) $\bigcup \bigcap A$; (b) $B = \bigcup \bigcup A$; (c) $\mathcal{P}(B \setminus \{\{\emptyset\}\})$.

[2.0] 2. Sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere a relação S de matriz de adjacências

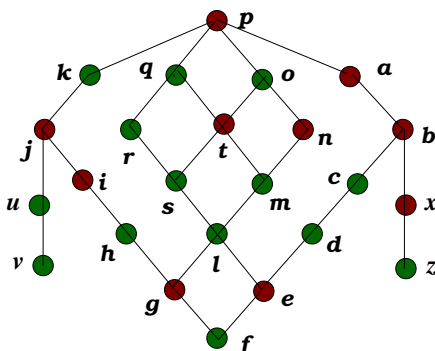
$$A(S) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(relativamente à marcação usual) e a relação de equivalência R sobre X tal que $X/R = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$.

- (a) Indique os elementos de $\text{Dom}(S)$, $\text{Im}(S)$ e S^{-1} .
(b) Determine $R \circ S$.
(c) Represente a relação R por meio de um diagrama.

Mudar de Folha

[1.0] 3. Considere o conjunto $X = \{a, b, \dots, x, z\}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos minorantes, majorantes, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, minimais e maximais do subconjunto $A = \{c, d, f, h, k, l, m, o, q, r, s, u, v, z\}$ do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

[1.0] 4. Considere a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $u_0 = -7$, $u_1 = 0$, $u_2 = 7$ e $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2} + 3u_{n-3}$, para $n \geq 3$. Usando o Princípio de Indução Completa, mostre que u_n é divisível por 7, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

[2.0] 5. Considere os números inteiros $a = 550$ e $b = 294$. Determine:

- (a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;
(b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;
(c) As formas standard de a e de b ;
(d) $m = \text{mmc}\{a, b\}$.
(e) O número a na base 2.

[1.0] 6. Determine as soluções da congruência linear $6x \equiv 12 \pmod{15}$ no conjunto $\{0, 1, \dots, 29\}$.

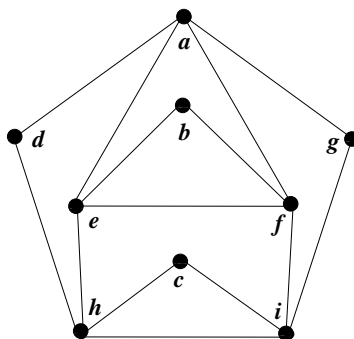
[1.0] 7. Resolva a relação de recorrência $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $a_0 = 2$ e $a_1 = 25$.

Mudar de Folha

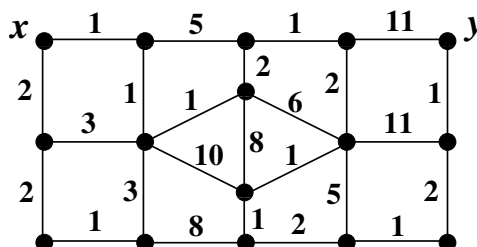
Mudar de Folha

- [1.0] 8. Represente geometricamente cinco grafos simples conexos de ordem quatro não isomorfos. Justifique.
- [2.0] 9. (a) **Usando o algoritmo estudado nas aulas**, mostre que $(7, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 3)$ é uma sequência gráfica.
(b) Seja G um grafo simples que admite como sequência de graus a sequência anterior.
i. Indique justificando a ordem e o tamanho de G .
ii. Justifique que G é hamiltoniano.

- [2.0] 10. Considere o seguinte grafo G :



- (a) Verifique se G é um grafo bipartido. E tripartido?
- (b) Justifique que G é um grafo euleriano e determine um ciclo euleriano, usando o **algoritmo de Fleury** com início no vértice d . (Descreva sumariamente este algoritmo.)
- [2.0] 11. Considere o seguinte grafo ponderado:



- (a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.
[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]
- (b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice x , para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.
[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]

Mudar de Folha

- [1.0] 12. Considere ainda o grafo ponderado da questão anterior.
Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L . Indique L e o seu valor. *[Tem de indicar explicitamente a sequência de atribuições efectuada!]*
- [1.0] 13. Sejam X e Y dois conjuntos. Mostre que $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$ se e só se $X \cap Y = \emptyset$.
- [1.0] 14. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função tal que $f \circ f = f$. Mostre que f é injectiva se e só se $f = \text{id}_X$.