Exame de Época de Recurso

Matemática Discreta

10 de Julho de 2010

VERSÃO B

[2.0] 1. Considere $A = \{\, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\,\}$. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

(a) $B = \bigcup \bigcap A$; (b) $\bigcup \bigcup A$; (c) $\mathcal{P}(B)$.

[2.0] 2. Sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere a relação S de matriz de adjacências

$$A(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(relativamente à marcação usual) e a relação de equivalência R sobre X tal que $X/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$.

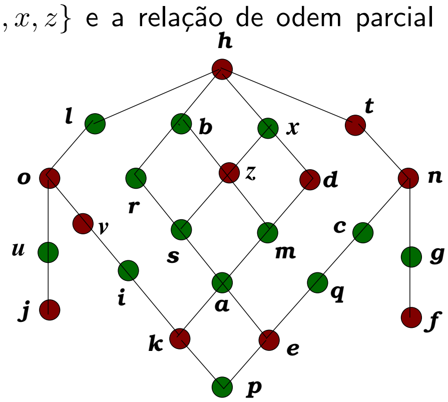
(a) Indique os elementos de $\mathrm{Dom}(S)$, $\mathrm{Im}(S)$ e S^{-1}.

(b) Determine $R \circ S$.

(c) Represente a relação R por meio de um diagrama.

Mudar de Folha

[1.0] 3. Considere o conjunto $X = \{a, b, \ldots, x, z\}$ e a relação de odem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos minorantes, majorantes, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, minimais e maximais do subconjunto $A = \{a, b, c, g, i, l, m, p, q, r, s, u, x\}$ do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

[1.0] 4. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_0 = -5$, $u_1 = 0$, $u_2 = 5$ e $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2} + 3u_{n-3}$, para $n \geq 3$. Usando o Princípio de Indução Completa, mostre que u_n é divisível por 5, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

[2.0] 5. Considere os números inteiros $a = 825$ e $b = 294$. Determine:

(a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;

(b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;

(c) As formas standard de a e de b;

(d) $m = \text{mmc}\{a, b\}$.

(e) O número a na base 2.

[1.0] 6. Determine as soluções da congruência linear $6x \equiv 9 \,(\text{mod}\, 15)$ no conjunto $\{-15, 0, 1, \ldots, 14\}$

[1.0] 7. Resolva a relação de recorrência $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $a_0 = 3$ e $a_1 = 25$.

Mudar de Folha

Exame de Época de Recurso

Matemática Discreta

10 de Julho de 2010

VERSÃO B

Mudar de Folha

[**1.0**] 8. Represente geometricamente cinco grafos simples não conexos de ordem quatro não isomorfos. Justifique.

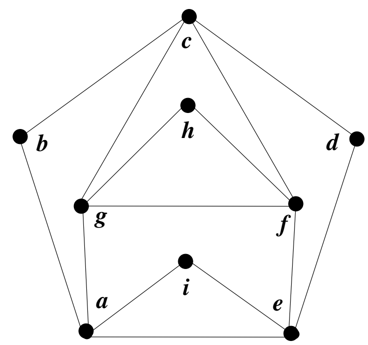
[**2.0**] 9. (a) **Usando o algoritmo estudado nas aulas**, mostre que $(7, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 3)$ é uma sequência gráfica.

(b) Seja G um grafo simples que admite como sequência de graus a sequência anterior.

i. Indique justificando a ordem e o tamanho de G.

ii. Justifique que G é hamiltoniano.

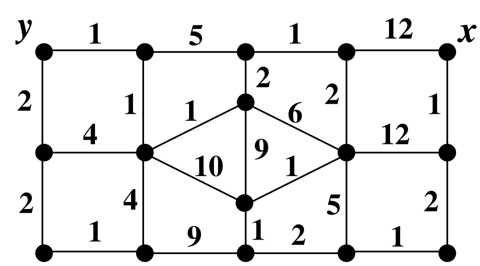
[**2.0**] 10. Considere o seguinte grafo G:



(a) Verifique se G é um grafo bipartido. E tripartido?

(b) Justifique que G é um grafo euleriano e determine um ciclo euleriano, usando o **algoritmo de Fleury** com início no vértice d. (Descreva sumariamente este algoritmo.)

[**2.0**] 11. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor. ***[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]***

(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice x, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. ***[Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]***

Mudar de Folha

[**1.0**] 12. Considere ainda o grafo ponderado da questão anterior.

Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L. Indique L e o seu valor. ***[Tem de indicar explicitamente a sequência de atribuições efectuada!]***

[**1.0**] 13. Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ se e só se $A \cap B = \emptyset$.

[**1.0**] 14. Seja $g : A \longrightarrow A$ uma função tal que $g \circ g = g$. Mostre que g é injectiva se e só se $g = \mathrm{id}_A$.