

[2.0] I.1 Considere o conjunto $A = \{\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$. Represente por extensão os seguintes conjuntos:

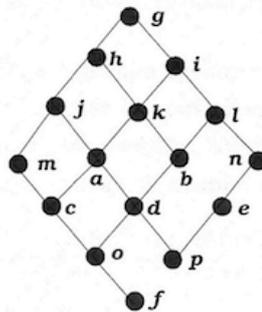
- (a) $\cap A$; (b) $\cup A$; (c) $\cap(\cap A)$; (d) $\cup(\cup A)$; (e) $A \setminus \{\cup A\}$; (f) $\mathcal{P}(\cap A)$.

[2.5] I.2 Sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere a relação $S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 2)\}$ e a relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}$.

- (a) Indique os elementos de $\text{Dom}(S)$ e de $\text{Im}(S)$. A relação S é uma função de X em X ? Justifique.
 (b) Determine $R \circ S$.
 (c) Justifique se R é reflexiva e/ou simétrica e/ou transitiva.
 (d) Represente a relação $T = R \cup R^{-1}$ por meio de um diagrama.
 (e) Justifique que T é uma relação de equivalência e indique os elementos do conjunto cociente X/T .

Mudar de Folha

[1.0] I.3 Considere o conjunto $X = \{a, b, \dots, o, p\}$ e a relação de ordem parcial \leq sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique os elementos mínimo, máximo, minimais, maximais, minorantes, majorantes, ínfimo e supremo do subconjunto $A = \{a, b, d, e, f, k\}$ (pontos a verde) do conjunto parcialmente ordenado (X, \leq) , se estes existirem. Indique que não existem, quando for o caso.

[1.0] I.4 Considere a sucessão definida por $a_0 = 2$, $a_1 = 0$ e, para $n \geq 2$, $a_n = 25a_{n-2}$. Mostre, usando o Princípio de Indução Completa, que $a_n = (1 + (-1)^n)5^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Mudar de Folha

[1.5] I.5 Considere os números inteiros $a = 700$ e $b = 396$. Determine:

- (a) $d = \text{mdc}\{a, b\}$, usando o Algoritmo de Euclides;
 (b) $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$;
 (c) A forma standard de a .

[1.0] I.6 Determine o inverso do elemento $[32]_{37} \in \mathbb{Z}_{37}$, ou seja, de modo equivalente, resolva a congruência linear $32x \equiv 1 \pmod{37}$ em \mathbb{Z}_{37} .

Mudar de Folha

[1.0] I.7 Sejam b e c duas constantes reais tais que o polinómio quadrático $x^2 - bx - c$ admite uma raiz dupla α . Mostre que, para qualquer constante real d , a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $u_n = d n \alpha^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, satisfaz a relação de recorrência $a_n = b a_{n-1} + c a_{n-2}$.

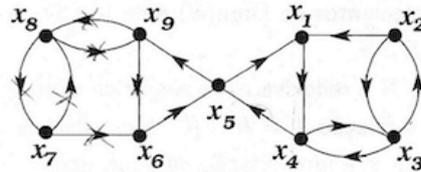
- [1.0]II.1 Represente geometricamente três grafos simples não isomorfos que admitam $(4, 4, 3, 3, 3, 3)$ como sequência de graus. Justifique por que não são isomorfos.

Mudar de Folha

- [2.0]II.2 (a) Mostre, usando o algoritmo estudado nas aulas, que existe um grafo simples G que admite $(7, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 5)$ como sequência de graus. Indique justificando a ordem e o tamanho de G .
(b) Justifique que o grafo G da alínea anterior é hamiltoniano.

Mudar de Folha

- [3.0]II.3 Considere o seguinte digrafo $G = (X, U)$:



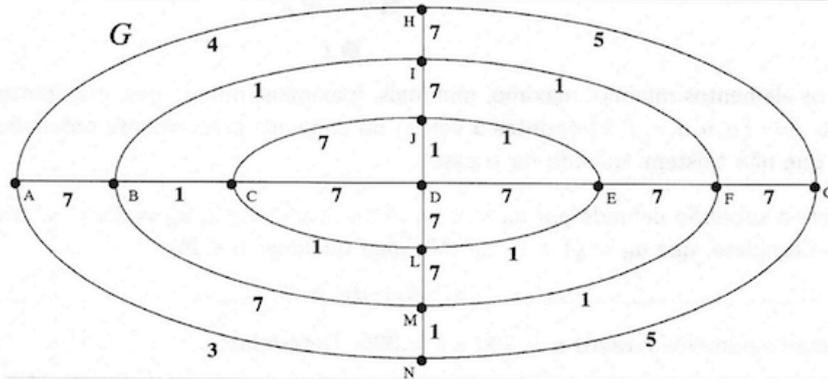
Sejam $u = (x_1, x_2), v = (x_6, x_7), Y = \{x_6, x_7, x_8, x_9\}, G_0 = G - Y, G_1 = G + u$ e $G_2 = G_1 + v$.

Seja G' o grafo subjacente a G_0 .

- (a) Indique a ordem, o tamanho, a sequência de graus exteriores, a sequência de graus interiores e a sequência de graus de G .
(b) Verifique se o digrafo G é fortemente conexo e indique as suas componentes fortemente conexas.
(c) Os digrafos G_1 e G_2 têm caminhos eulerianos abertos ou fechados? Justifique.
(d) Indique a matriz A das adjacências de G' relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.
(e) Utilize a matriz A para determinar o número de cadeias $x_1 - x_5$ de comprimento 3 de G' .

Mudar de Folha

- [3.0]II.4 Considere o seguinte grafo ponderado:



- (a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor. [Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]
(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice D, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. [Tem de indicar explicitamente a sequência de escolhas efectuada!]
(c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia A-D mínima L . Indique L e o seu valor. [Tem de indicar explicitamente a sequência de atribuições efectuada!]

Mudar de Folha

- [1.0]II.5 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e G uma árvore de ordem $2n$ que admite pelo menos dois vértices distintos com grau igual a n . Determine a sequência de graus de G .