

[2.0] I.1 Considere os conjuntos $A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{0, 1, 3\}, \{1, 2, 3, 5, 9\}\}$ e $B = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

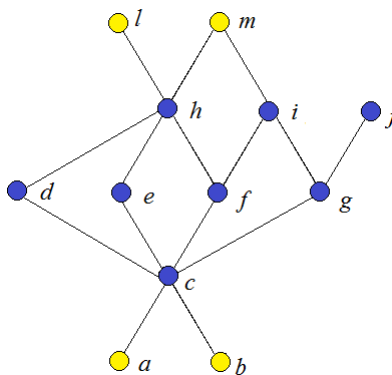
- (a) $\cap A$; (b) $\cup A$; (c) $A \setminus B$; (d) $P(B)$.

Mudar de Folha

[2.0] I.2 Sobre o conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$, considere as relações binárias R , S e T definidas por:
 $R = \{(x, x) : x \in X\}$, $S = R \cup \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ e $T = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, d), (b, e), (e, c)\}$.

- (a) Indique os elementos de $\text{Dom}(S)$ e de $\text{Im}(S)$.
(b) Determine S^{-1} e $T \circ S$.
(c) Atendendo a que R e S são relações transitivas verifique, justificando, se cada uma delas é uma relação de equivalência ou de ordem parcial.

[1.0] I.3 Considere o conjunto $X = \{a, b, \dots, l, m\}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique os elementos mínimo, máximo, minimais, maximais, minorantes, majorantes, ínfimo e supremo do subconjunto $A = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$ (pontos escuros) do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$, se estes existirem. Indique que não existem, quando for o caso.

[1.0] I.4 Considere a sucessão definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ e, para $n \geq 2$, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$. Mostre, usando o Princípio de Indução Completa, que $a_n = 2^n(n+1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Mudar de Folha

[1.5] I.5 Considere os números inteiros 525 e 396.

- (a) Verifique, usando o Algoritmo de Euclides, que $\text{mdc}\{525, 396\} = 3$;
(b) Determine $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $3 = u \times 525 + v \times 396$;
(c) Determine a forma standard de 525.

[1.0] I.6 Determine todas as soluções da congruência linear $3x \equiv 6 \pmod{24}$ no conjunto $W = \{x \in \mathbb{Z} : -24 \leq x \leq 24\}$.

[1.5] I.7 Seja X um conjunto com pelo menos dois elementos e R uma relação de ordem parcial sobre X . Para cada $x \in X$ considere o conjunto $P_x = \{a \in X : aRx\}$. Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Mostre que xRy se, e só se, $P_x \subset P_y$ com $P_x \neq P_y$.

[1.5]II.1 Uma árvore T com 19 arcos tem apenas vértices de grau 1, 3 e 5. Sabendo que o nº de vértices de grau 3 é igual ao número de vértices de grau 5, determine:

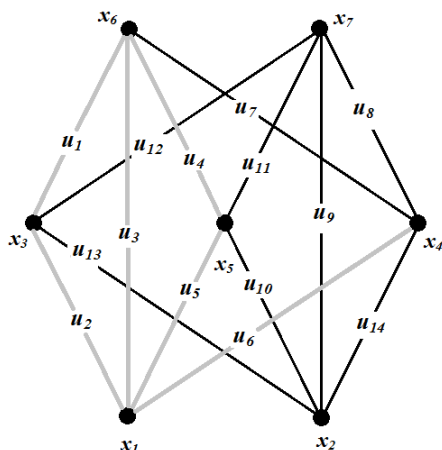
- (a) O número de vértices de grau 1 de T .
- (b) A sequência de graus de T .

[1.5]II.2 (a) Justifique que a sequência $(6, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2)$ não é gráfica.

- (b) Mostre, usando o algoritmo estudado nas aulas, que existe um grafo simples G que admite $(6, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2)$ como sequência de graus. Indique justificando a ordem e o tamanho de G .

Mudar de Folha

[3.0]II.3 Considere o seguinte grafo $G = (X, \mathcal{U})$:



- (a) Este grafo é regular? Justifique e, em caso afirmativo, indique o grau deste grafo.
- (b) Indique a matriz A das adjacências de G relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ dos seus vértices.
- (c) Utilize a matriz A para determinar o número de cadeias $x_1 - x_2$ de comprimento 3 de G .
- (d) Justifique que o grafo é hamiltoniano e euleriano.
- (e) Seja $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ uma sequência de arcos, iniciada no vértice x_6 , obtida pela aplicação do algoritmo de Fleury ao grafo G . Justifique que u_7 não pode ser escolhido mas pode ser escolhido u_8 no passo seguinte da aplicação deste mesmo algoritmo.
- (f) Indique a restante sequência de arcos obtida pela conclusão da aplicação do algoritmo de Fleury a este grafo.

Mudar de Folha

[1.5]II.4 Seja G um grafo com exactamente dois vértices, x_i e x_j , de grau ímpar.

- (a) Em que condições G é semi-euleriano?
- (b) Justifique que em G existe a cadeia $x_i - x_j$.

Nome:

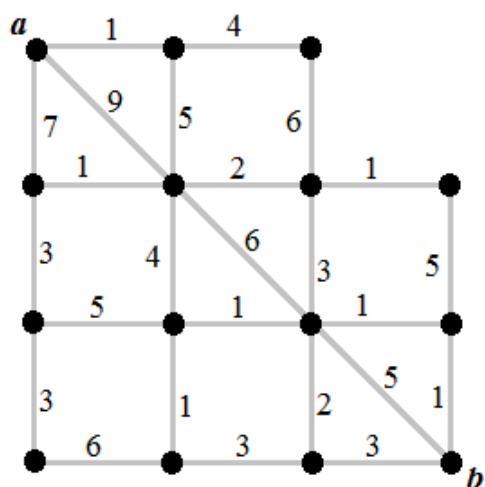
Nº de aluno:

Nº de caderno:

[2.5]II.5 Para cada uma das questões responda nesta folha do enunciado identificando de forma clara cada uma das escolhas feitas **numerando os arcos e/ou os vértices à medida que os for escolhendo**.

- (a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo do seguinte grafo ponderado.

Indique o valor da árvore obtida.



- (b) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $a - b$ mínima entre os vértices a e b do seguinte grafo ponderado.

Indique o seu valor e assinale a cadeia correspondente.

