Departamento de Matemática

Matemática Discreta
2010-2011

Lista de Exercícios

Parte 1. Conjuntos e Aplicações

Vítor Hugo Fernandes

Versão de 13 de Fevereiro de 2011

1.1 Conjuntos, relações binárias e indução matemática

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$. Indique os elementos de:
   (a) $A \times B$;
   (b) $B \times A$;
   (c) $(A \cap B) \times C$;
   (d) $A \times (B \cup C)$.

2. Sejam $X = \{\{\emptyset\}\}$ e $Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Determine os elementos de $X \times Y$.

3. Sejam A, B, C e D quatro conjuntos. Mostre que:
   (a) $A \times B = \emptyset$ se e só se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$;
   (b) $A \times B = B \times A$ se e só se $A \times B = \emptyset$ ou $A = B$;
   (c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ então $A \times B \subseteq C \times D$;
   (d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
   (e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
   (f) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
   (g) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
   (h) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) \cap (A \times D) \cap (B \times C)$;
   (i) Se $C \neq \emptyset$ e $A \times C = B \times C$ então $A = B$.

4. Seja $X = \{\emptyset\}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
   (a) $X = \emptyset$;
   (b) $\emptyset$ é simultaneamente elemento e subconjunto de X;
   (c) $\mathcal{P}(\emptyset) = X$.

5. Indique todos os subconjuntos de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

6. Seja $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é um quadrado perfeito menor que } 10\}$.
   (a) Justifique que se $X = \{4, 9\}$ e $Y = \{-1, 1\}$ então $X \in \mathcal{P}(A)$ e $Y \notin \mathcal{P}(A)$;
   (b) Defina $\mathcal{P}(A)$ em extensão;
   (c) Justifique que se $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

7. Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

8. Sejam A e B dois conjuntos. Prove que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Mostre, com um exemplo, que a igualdade $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ não é verdadeira (em geral).

9. Determine os elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

10. Sejam $X = \{X_i \mid i \in I\}$ e $Y = \{Y_i \mid i \in I\}$ duas famílias não vazias de conjuntos tais que $Y_i \subseteq X_i$, para qualquer $i \in I$. Mostre que:
    (a) $\cup Y \subseteq \cup X$ (i.e. $\bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$);
    (b) $\cap Y \subseteq \cap X$ (i.e. $\bigcap_{i \in I} Y_i \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$).

11. Sejam $X = \{X_i \mid i \in I\}$ uma família de conjuntos e $\emptyset \subsetneq J \subseteq I$. Mostre que:

(a) $\bigcup_{i \in J} X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$;

(b) $\bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \bigcap_{i \in J} X_i$.

12. Seja $I = \{1, 2, 3\}$ e, para cada $i \in I$, seja $A_i = \{i, i+1, i+2, i+3\}$. Determine $\bigcap_{i \in I} A_i$ e $\bigcup_{i \in I} A_i$.

13. Seja $X = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Determine os elementos de $\mathcal{P}(X)$, $\cup X$, $\mathcal{P}(\cup X)$ e de $\cup \mathcal{P}(X)$.

14. Seja $X = \{\{\emptyset\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$. Determine os elementos de $\cup X$ e de $\cap X$.

15. Determine $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} X_n$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} X_n$ em cada um dos seguintes casos:

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $X_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ (intervalo real);

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $X_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$;

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $X_n =]-\frac{1}{n}, 0]$;

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $X_n =]-\frac{1}{n}, 0[$;

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $X_n = \begin{cases} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] & n \text{ é ímpar} \\ ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[& n \text{ é par} \end{cases}$;

(f) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, $X_n = \begin{cases}]-\frac{1}{n}, 0] & n \text{ é ímpar} \\ ]-\frac{1}{n}, 0[& n \text{ é par} \end{cases}$.

16. Seja X um conjunto. Prove que $\cup \mathcal{P}(X) = X$.

17. Seja X uma família não vazia de conjuntos. Mostre que $X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$. Em que condições se verifica a igualdade?

18. Sejam X uma família não vazia de conjuntos e $A \in X$. Mostre que $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup X))$.

19. Indique os domínios e as imagens das seguintes relações sobre os conjuntos indicados:

(a) $R_1 = \{(1,1), (2,2), (1,5), (1,3), (2,3)\}$ de $X = \{1,2,3,4\}$ em $Y = \{1,2,3,4,5\}$;

(b) $R_2 = \{(1,1), (2,2), (1,5), (1,3), (2,3)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em $Y = \{1,2,3,5\}$;

(c) $R_3 = \{(1,1), (2,2), (1,5), (1,3), (2,3)\}$ de $X = \{1,2\}$ em $Y = \{1,2,3,5\}$;

(d) $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,1), (1,3), (3,1)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em X;

(e) $R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,5), (5,1), (5,1), (1,3), (3,1)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em X;

(f) $R_6 = \{(1,5), (5,1), (3,5), (5,1), (1,3), (3,1)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em X;

(g) $R_7 = \{(1,1), (2,2), (5,5), (1,5), (5,1), (3,5), (5,1), (1,3), (3,1)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em X;

(h) $R_8 = \{(1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (1,5), (5,1), (3,5), (5,1)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em X.

20. Considere as relações do Exercício 19 como relações binárias sobre o conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Represente cada das relações por meio de um diagrama.

(b) Represente cada das relações por meio de uma matriz de adjacências.

21. Determine os domínios e imagens das seguintes relações binárias sobre $\mathbb{R}$:

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$;

(b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 1 - \frac{2}{x^2+1}\}$.

22. Indique todas as (dezasseis) relações binárias que se podem definir sobre um conjunto com dois elementos e classifique-as quanto à reflexividade, irreflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

23. Dê um exemplo de uma relação binária definida sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ que seja:

(a) Reflexiva, não simétrica e não transitiva;

(b) Reflexiva, simétrica e não transitiva;

(c) Reflexiva, anti-simétrica e não transitiva;

(d) Reflexiva, não simétrica e transitiva;

(e) Irreflexiva, não simétrica, não anti-simétrica e transitiva;

(f) Irreflexiva, simétrica e transitiva;

(g) Irreflexiva, não simétrica e não transitiva;

(h) Irreflexiva, simétrica e não transitiva;

(i) Irreflexiva, anti-simétrica e não transitiva;

(j) Irreflexiva, não simétrica e transitiva;

(k) Reflexiva, não simétrica, não anti-simétrica e transitiva;

(l) Reflexiva, simétrica e transitiva;

(m) Não irreflexiva, não reflexiva, não simétrica, não anti-simétrica e transitiva;

(n) Não irreflexiva, não reflexiva, simétrica e transitiva.

24. Classifique quanto à reflexividade, irreflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade as seguintes relações R definidas no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros:

(a) $(x, y) \in R$ se e só se $x = y^2$;

(b) $(x, y) \in R$ se e só se $x > y$;

(c) $(x, y) \in R$ se e só se $x \geq y$;

(d) $(x, y) \in R$ se e só se $x = y$;

(e) $(x, y) \in R$ se e só se x divide y;

(f) $(x, y) \in R$ se e só se 3 divide $x - y$.

25. Sejam R e S duas relações binárias definidas sobre um conjunto X. Mostre que:

(a) Se R e S são reflexivas então $R \cap S$ e $R \cup S$ são reflexivas;

(b) Se R e S são irreflexivas então $R \cap S$ e $R \cup S$ são irreflexivas;

(c) Se R e S são simétricas então $R \cap S$ e $R \cup S$ são simétricas;

(d) Se R e S são transitivas então $R \cap S$ é transitiva; (O que pode afirmar acerca da relação $R \cup S$?)

(e) Se R e S são anti-simétricas então $R \cap S$ é anti-simétrica. (O que pode afirmar acerca da relação $R \cup S$?)

26. Seja R uma relação binária definida sobre um conjunto X. Mostre que:

   (a) Se R é reflexiva então R^{-1} é reflexiva;
   (b) Se R é irreflexiva então R^{-1} é irreflexiva;
   (c) Se R é simétrica então R^{-1} é simétrica;
   (d) Se R é transitiva então R^{-1} é transitiva;
   (e) Se R é anti-simétrica então R^{-1} é anti-simétrica.

27. Sejam R e S duas relações binárias definidas sobre um conjunto X.

   (a) Mostre que se R e S são relações reflexivas então $R \circ S$ é reflexiva.
   (b) Indique relações binárias R e S tais que:
      i. R e S são irreflexivas e $R \circ S$ é reflexiva (logo é também não irreflexiva);
      ii. R e S são simétricas e $R \circ S$ não é simétrica;
      iii. R e S são anti-simétricas e $R \circ S$ não é anti-simétrica;
      iv. R e S são transitivas e $R \circ S$ não é transitiva.

28. No conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ considere as relações binárias

$$R = \{(1,1), (1,2), (3,4), (4,2)\} \quad \text{e} \quad S = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,4), (2,2)\}$$

   Indique os elementos das relações $R \circ S$, $S \circ R$, $R^{-1} \circ R$, $R^{-1} \circ S$, $S^{-1} \circ R$, $S^{-1} \circ S$, $S \circ (S^{-1} \circ R)$, $(S \circ S^{-1}) \circ R$, $R \circ (R^{-1} \circ S)$ e $(R \circ R^{-1}) \circ S$.

29. Sejam R uma relação de A em B e S uma relação de B em C.

   (a) Mostre que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$;
   (b) Prove que, se $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathrm{Dom}(S)$ então $\mathrm{Dom}(S \circ R) = \mathrm{Dom}(R)$;
   (c) Enuncie e demonstre resultados análogos aos das alíneas anteriores para $\mathrm{Im}(S \circ R)$.

30. Sejam R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. Mostre que $S \circ R = \emptyset$ se e só se $\mathrm{Im}(R) \cap \mathrm{Dom}(S) = \emptyset$.

31. Sejam R uma relação de A em B e sejam S e T duas relações de B em C. Mostre que

$$(S \circ R) \setminus (T \circ R) \subseteq (S \setminus T) \circ R\,.$$

   Averigúe se a inclusão recíproca (i.e. $(S \setminus T) \circ R \subseteq (S \circ R) \setminus (T \circ R)$) é verdadeira.

32. Seja R uma relação binária definida sobe um conjunto X com pelo menos dois elementos (distintos). Suponhamos que R é simétrica, transitiva e não reflexiva. Averigúe se a relação binária sobre X

$$\overline{R} = (X \times X) \setminus R$$

   é reflexiva, simétrica, transitiva ou anti-simétrica.

33. Sejam R e S duas relações binárias reflexivas sobre um conjunto A. Mostre que $R \circ S$ é reflexiva.

34. Sejam R e S duas relações binárias simétricas sobre um conjunto A. Mostre que $R \circ S$ é simétrica se e só se $R \circ S = S \circ R$.

35. Sejam R e S duas relações binárias transitivas sobre um conjunto A. Prove que, se $R \circ S \subseteq S \circ R$ então $S \circ R$ é transitiva.

36. Indique se cada uma das relações binárias sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a seguir apresentadas é uma relação de equivalência e, em caso afirmativo, determine as respectivas classes de equivalência:

   (a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$;
   (b) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$;
   (c) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
   (d) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$;
   (e) $\{(x, y) \in X \times X \mid 4$ divide $x - y\}$;
   (f) $\{(x, y) \in X \times X \mid 3$ divide $x + y\}$;
   (g) $\{(x, y) \in X \times X \mid x$ divide $2 - y\}$.

37. Determine a relação de equivalência R definida sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que:

   (a) $X/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$;
   (b) $X/R = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$;
   (c) $X/R = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$;
   (d) $X/R = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$;
   (e) $X/R = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

38. Considere a relação binária R definida sobre o conjunto dos pares ordenados de números inteiros, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, do seguinte modo: para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \text{se e só se} \quad a + d = b + c.$$

   Mostre que R é uma relação de equivalência.

39. Seja R uma relação binária reflexiva e transitiva definida sobre um conjunto X. Prove que $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência sobre X.

40. Sejam R e S duas relações de equivalência definidas sobre um conjunto X. Justifique que $R \cap S$ é uma relação de equivalência sobre X (cf. Exercício 25) e relacione as classes de equivalência de $R \cap S$ com as de R e de S.

41. Averigúe se a relação binária R definida sobre $\mathbb{Z}$ por

$$m\, R\, n \quad \text{se e só se} \quad m - n \text{ é par},$$

   para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, é uma relação de equivalência.

42. Averigúe se a relação binária S definida sobre $\mathbb{Z}$ por

$$m\, S\, n \quad \text{se e só se} \quad |m - n| \leq 1,$$

   para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, é uma relação de equivalência.

43. Considere a seguinte relação R definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por

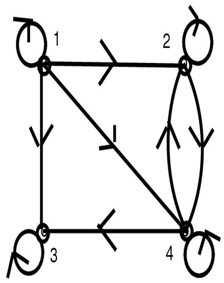
$$(a, b)\ R\ (c, d) \quad \text{se e só se} \quad ad = bc,$$

   para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Verifique se:

   (a) R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(b) $R \cap ((\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\}))$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$.

44. Considere a relação R definida sobre o conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ representada pelo diagrama seguinte:



(a) Determine a matriz das adjacências da relação R.

(b) Indique, justificando, se R é reflexiva, simétrica ou transitiva.

45. Seja R uma relação definida num conjunto X e Y um subconjunto de X. Seja $R_Y = R \cap (Y \times Y)$ (a que chamamos relação induzida em Y por R).

(a) Mostre que:

i. Se R é reflexiva então R_Y é reflexiva;

ii. Se R é simétrica então R_Y é simétrica;

iii. Se R é anti-simétrica então R_Y é anti-simétrica;

iv. Se R é transitiva então R_Y é transitiva.

(b) Conclua que:

i. Se R é uma relação de equivalência sobre X então R_Y é uma relação de equivalência sobre Y;

ii. Se R é uma relação de ordem parcial sobre X então R_Y é uma relação de ordem parcial sobre Y.

46. Seja R a relação definida sobre o conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ cuja matriz das adjacências é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Represente a relação R por meio de um diagrama.

(b) Indique, justificando, se R é reflexiva, simétrica ou transitiva.

47. Considere o conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ e a relação

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(4,1),(4,2),(4,4)\}$$

sobre X.

(a) Represente a relação R por meio de um diagrama.

(b) Indique, justificando, se R é reflexiva, simétrica ou transitiva.

48. Sejam R_1 e R_2 relações de ordem parcial definidas nos conjuntos X_1 e X_2, respectivamente. Defina-se uma relação R no conjunto $X_1 \times X_2$ do seguinte modo: para quaisquer $x_1, y_1 \in X_1$ e $x_2, y_2 \in X_2$,

$$(x_1, x_2)\, R\, (y_1, y_2) \quad \text{se e só se} \quad x_1\, R_1\, y_1 \;\text{ e }\; x_2\, R_2\, y_2.$$

Mostre que R é uma relação de ordem parcial sobre $X_1 \times X_2$. Supondo que R_1 e R_2 são relações de ordem total, podemos ainda garantir que R é uma relação de ordem total?

49. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ e a relação binária

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d), (e, e)\}$$

definida sobre A.

(a) Represente a relação R por meio de um diagrama.

(b) Prove que R é uma relação de ordem parcial sobre A.

(c) Indique, justificando, se R é uma relação de ordem total sobre A.

50. Considere a relação R definida sobre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros do modo seguinte: dados $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a\, R\, b \text{ se e só se existe } c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } ac = b.$$

Verifique se:

(a) R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$;

(b) R é uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{Z}$.

51. Seja X um conjunto. Mostre que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é uma cadeia se e só se X é o conjunto vazio ou X é um conjunto singular (i.e. com um só elemento).

52. Considere em $\mathbb{N}$ a seguinte relação binária:

$$a \mid b \;\; (\text{lê-se } a \textit{ divide } b) \quad \iff \quad (\exists c \in \mathbb{N})\, ac = b,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Mostre que $(\mathbb{N}, |)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

53. Para $n \in \mathbb{N}^+$, sejam $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e D_n o conjunto dos divisores inteiros positivos de n. Considere os conjuntos parcialmente ordenados $(X_n, |)$ e $(D_n, |)$ cujas relações de ordem parciais são as induzidas pela r.o.p. de $(\mathbb{N}, |)$ (cf. os exercícios 45 e 52).

(a) Construa os diagramas de Hasse de $(X_n, |)$, para $n \in \{1, 2, \ldots, 15\}$.

(b) Construa os diagramas de Hasse de $(D_n, |)$, para $n \in \{1, 2, \ldots, 24\}$.

54. Sejam $X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $X_2 = \{1, 2, 3\}$ e considere os conjuntos parcialmente ordenados $(X_1, \leq)$ e $(X_2, \leq)$, em que $\leq$ é a ordem usual. No conjunto $X = X_1 \times X_2$ considere a relação de ordem parcial $\leq_c$ definida por

$$(x_1, x_2) \leq_c (y_1, y_2) \quad \iff \quad x_1 \leq_1 y_1 \wedge x_2 \leq_2 y_2\ ,$$

para quaisquer $x_1, y_1 \in X_1$ e $x_2, y_2 \in X_2$ (cf. Exercício 48). Construa o diagrama de Hasse do c.p.o. $(X, \leq_c)$.

55. Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Construa o diagrama de Hasse do c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

56. Sejam $\leq_1$ e $\leq_2$ relações de ordem parcial definidas nos conjuntos X_1 e X_2, respectivamente. No conjunto $X = X_1 \times X_2$ defina-se uma relação $\leq$ do seguinte modo: para quaisquer $x_1, y_1 \in X_1$ e $x_2, y_2 \in X_2$,

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad \text{se e só se} \quad (x_1 \neq y_1 \wedge x_1 \leq_1 y_1) \ \text{ ou } \ (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq_2 y_2).$$

(a) Mostre que $\leq$ é uma relação de ordem parcial sobre $X_1 \times X_2$. Supondo que $\leq_1$ e $\leq_2$ são relações de ordem total, podemos ainda garantir que $\leq$ é uma relação de ordem total?

(b) Considere os c.p.o.'s $X = \{0, 1\}$ com a ordem usual e $Y = \{a, b, c\}$ com a ordem $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (c, b)\}$.

i. Construa os diagramas de Hasse de Y e do produto cartesiano de X_1 por X_2.

ii. Sendo $A = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 \mid yRc\}$ indique, caso exista, o primeiro elemento de A.

57. Sejam X um conjunto. Uma relação binária sobre X diz-se uma *relação de ordem parcial estrita* se for irreflexiva e transitiva.

(a) Seja $\leq$ um relação de ordem parcial sobre X. Considere a relação binária $<$ sobre X definida por

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq y \wedge x \leq y\ ,$$

para quaisquer $x, y \in X$. Prove que $<$ é uma relação de ordem parcial estrita.

(b) Seja $<$ um relação de ordem parcial estrita sobre X. Considere a relação binária $\leq$ sobre X definida por

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \vee x < y\ ,$$

para quaisquer $x, y \in X$. Prove que $\leq$ é uma relação de ordem parcial.

58. Verifique se R é uma relação de ordem parcial sobre A, em cada um dos casos seguintes:

(a) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$;

(b) $A = \mathbb{R}$ e $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| \leq |y|\}$;

(c) $A = \mathbb{R}$ e $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| < |y| \vee x = y\}$.

Nos casos em que R é uma r.o.p., verifique se também é uma relação de ordem total.

59. No conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, considere a seguinte relação binária

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

(a) Mostre que R é uma r.o.p..

(b) Verifique se R é uma r.o.t..

(c) Represente R por meio de um diagrama.

(d) Represente R por meio de um diagrama de Hasse.

Sendo $B = \{2, 3, 4\}$, determine, se existirem, o mínimo, o máximo, os elementos minimais, os elementos maximais, o ínfimo e o supremo de B.

60. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a ordem usual $\leq$. Determine, se existirem, o mínimo, o máximo, os elementos minimais, os elementos maximais, o ínfimo e o supremo dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $[1,2[$; (b) $[0,1]$; (c) $]-3,7]$; (d) $]-1,1[$; (e) $]-\infty,-3]$; (f) $]-\infty,2[$; (g) $[-2,+\infty[$; (h) $]2,+\infty[$;
(i) $[1,2[\cap\mathbb{Q}$; (j) $[0,1]\cap\mathbb{Q}$; (k) $]-3,\sqrt{7}]\cap\mathbb{Q}$; (l) $]-1,1[\cap\mathbb{Q}$; (m) $]-\infty,-3]\cap\mathbb{Q}$; (n) $]-\infty,2[\cap\mathbb{Q}$; (o) $[-2,+\infty[\cap\mathbb{Q}$; (p) $]2,+\infty[\cap\mathbb{Q}$;
(q) $[1,2[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (r) $[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (s) $]-3,7]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (t) $]-1,1[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (u) $]-\infty,-3]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (v) $]-\infty,2[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (w) $[-2,+\infty[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (x) $]2,+\infty[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$;
(y) $[1,\sqrt{2}[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (z) $[0,\sqrt{3}]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; ($\aleph$) $]-\sqrt{3},7]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; ($\beth$) $]-\sqrt{7},1[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

61. Considere o c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}),\subseteq)$. Determine, se existirem, o mínimo, o máximo, os elementos minimais, os elementos maximais, o ínfimo e o supremo de:

(a) $A=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$;
(b) $B=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\emptyset\}$;
(c) $C=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\{1,2,3,4,5\}\}$;
(d) $D=\{X\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\mid X$ tem três ou quatro elementos$\}$;
(e) $E=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus D$;
(f) $F=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$;
(g) $G=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\}$;
(h) $H=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{1,3,4,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$;
(i) $I=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\{2,3,4,5\},\{1,3,4,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$;
(j) $J=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2,3,4,5\}\}$;
(k) $K=\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\{\emptyset,\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{1,3,4,5\},\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}\}$.

62. Considere o c.p.o. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subseteq)$ e seja $B=\{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\mid X$ tem no máximo cinco elementos$\}$. Determine, se existirem, o mínimo, o máximo, os elementos minimais, os elementos maximais, o ínfimo e o supremo de B.

63. Mostre que uma relação R sobre um conjunto X é simultaneamente simétrica e anti-simétrica se e só se $R\subseteq \mathrm{id}_X$.

64. Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos disjuntos e sejam R_1 uma r.o.p. sobre A_1 e R_2 uma r.o.p. sobre A_2.

(a) Mostre que $R_1\cup R_2$ é uma r.o.p. sobre $A_1\cup A_2$;
(b) Mostre que $R_1\cup R_2\cup(A_1\times A_2)$ é uma r.o.p. sobre $A_1\cup A_2$;
(c) Supondo que R_1 e R_2 são ambas relações de ordem total, alguma das relações de ordem parcial definida nas alíneas anteriores é uma r.o.t.?

65. Seja R uma r.o.p. sobre um conjunto X. Considere o subconjunto $P_x=\{a\in X\mid a\,R\,x\}$, para cada $x\in X$. Sejam $x,y\in A$. Prove que $x\,R\,y$ se e só se $P_x\subseteq P_y$.

66. Sejam $(X,\leq)$ um c.p.o. e A e B dois subconjuntos de X tais que

$$(\forall x\in A)\,(\exists y\in B)\,x\leq y \quad \text{e} \quad (\forall x\in B)\,(\exists y\in A)\,x\leq y\ .$$

Mostre que:

(a) Para qualquer $x\in X$, x é um majorante de A se e só se x é um majorante de B;
(b) Se $A\cap B=\emptyset$ então A e B não possuem elementos maximais.

67. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., B um subconjunto de A e $b \in A$. Prove que:

   (a) b é o mínimo de B se e só se $b \in B$ e b é o ínfimo de B;
   (b) Se b é o mínimo de B então b é o único elemento minimal de B;
   (c) b é o máximo de B se e só se $b \in B$ e b é o supremo de B;
   (d) Se b é o máximo de B então b é o único elemento maximal de B.

68. Utilizando o Princípio de Indução, prove que:

   (a) $4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$.

69. Prove que:

   (a) $\dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)}$, com $n \in \mathbb{N}^+$;
   (b) $\dfrac{1}{2^2 - 1} + \dfrac{1}{3^2 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2 - 1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2(n+2)}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (c) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$.

70. Prove que:

   (a) $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$, com $n \in \mathbb{N}^+$;
   (b) $2n + 1 \leq 2^n$, com $n \geq 3$;
   (c) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$;
   (d) $2^n \geq n^2$, para $n \geq 4$;
   (e) $n^2 > n + 1$, com $n \geq 2$.

71. Prove que:

   (a) $7^n - 1$ é divisível por 6, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (b) $11^n - 4^n$ é divisível por 7, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (c) $7^n - 3^n$ é divisível por 4, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (d) $n^3 + 2n$ é um múltiplo de 3, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (e) $6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ é divisível por 4, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (f) $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ é divisível por 8, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (g) $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ é divisível por 73, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;
   (h) $3^n + 7^n - 2$ é divisível por 8, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$.

72. Prove que $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$.

73. Prove que, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \cdots + \dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n^2}{n+1}$, para $n \geq 2$.

74. Seja $u_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}^+$. Prove que $u_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

75. Mostre, usando o Princípio de Indução, que:

    (a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;

    (b) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (2j-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;

    (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+j} \leq \frac{5}{6}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;

    (d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$;

    (e) $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, para quaisquer números reais não negativos $a_1, \ldots, a_n$ e para qualquer natural $n \in \mathbb{N}^+$.

76. Mostre, usando o Princípio de Indução, que sendo $a_1 = 2$ e $a_n = 3 + a_{n-1}$, para $n \geq 2$, então

$$a_n = 3n - 1,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$.

77. Mostre, usando o Princípio de Indução, que sendo $u_0 = a$ e $u_n = 2u_{n-1} + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$, então

$$u_n = a2^n + b(2^n - 1),$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

78. Considere a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_0 = 2$, $b_1 = 3$ e $b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$, para $n \geq 2$. Mostre que

$$b_n = 1 + 2^n,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

79. Considere a sucessão $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ e $c_n = 4c_{n-1} - 4c_{n-2}$, para $n \geq 2$. Mostre que

$$c_n = 2^n - n2^n,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

80. Considere a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $v_0 = 7$, $v_1 = 16$ e $v_n = 5v_{n-1} - 6v_{n-2}$, para $n \geq 2$. Mostre que

$$v_n = 5 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Funções

1. Indique todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

2. Considere as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = \max\{x, -x\}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f = g$.

3. Considere as funções $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ e $g(x, y) = \max\{x, y\}$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Mostre que $f = g$.

4. Considere as funções $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ e $g(x, y) = \min\{x, y\}$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Mostre que $f = g$.

5. Sejam X e Y dois conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação, A e A' dois subconjuntos de X e, ainda, B e B' dois subconjuntos de Y.

   (a) Mostre que:

   i. $f(\emptyset) = \emptyset$;
   ii. Se $A \subseteq A'$ então $f(A) \subseteq f(A')$;
   iii. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$;
   iv. $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

   (b) Mostre, com um exemplo, que se pode ter:

   i. $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$;
   ii. $f(A) = f(A')$, com $A \neq A'$;
   iii. $f(A \backslash A') \neq f(A) \backslash f(A')$.

   (c) Demonstre que:

   i. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
   ii. $f^{-1}(Y) = X$;
   iii. Se $B \subseteq B'$ então $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$;
   iv. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$;
   v. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$;
   vi. $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$.

   (d) Mostre que:

   i. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$;
   ii. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

   (e) Dê um exemplo em que $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$.

6. Sejam $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação e $C \subseteq B$. Prove que $f^{-1}(B \backslash C) = A \backslash f^{-1}(C)$.

7. Determine todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$. Indique as que são injectivas e as que são sobrejectivas.

8. Determine todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b, c\}$. Indique as que são injectivas e as que são sobrejectivas.

9. Determine todas as aplicações bijectivas do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ no conjunto $Y = \{a, b, c\}$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(\frac{1}{2})$.

11. Sejam X um conjunto e A e A' dois subconjuntos de X. Defina-se uma aplicação $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ da seguinte forma:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

(χ_A designa-se habitualmente por *função característica* de A).

(a) Determine $\chi_A^{-1}(1)$, $\chi_A^{-1}(0)$ e $\chi_A^{-1}(-1)$.

(b) Mostre que, para qualquer $x \in X$, se tem:

i. $\chi_{A\cap A'}(x) = \chi_A(x).\chi_{A'}(x)$;

ii. $\chi_{A\cup A'}(x) = \chi_A(x) + \chi_{A'}(X) - \chi_A(x).\chi_{A'}(x)$;

iii. $\chi_{X\setminus A}(x) = 1 - \chi_A(x)$;

iv. $\chi_{A\setminus A'}(x) = \chi_A(x)\left[1 - \chi_{A'}(x)\right]$.

(c) Mostre que:

i. Se $A \subseteq A'$ então $\chi_A(x) \leq \chi_{A'}(x)$, para qualquer $x \in X$.

ii. $\chi_{A\cup A'}(x) = \chi_A(x) + \chi_{A'}(X)$, para qualquer $x \in X$, se e só se $A \cap A' = \emptyset$.

(d) Indique uma expressão para $\chi_{A\triangle A'}$.

12. Dê exemplo de uma aplicação que seja:

(a) Sobrejectiva mas não injectiva;

(b) Não sobrejectiva mas injectiva;

(c) Não sobrejectiva nem injectiva.

13. Considere as seguintes aplicações:

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
- $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $h : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ definida por $h(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
- $k : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ definida por $k(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Estude f, g, h e k quanto à sobrejectividade e injectividade.

14. Considere as aplicações $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ e

$$g(x) = (1 + (1-x)^{\frac{1}{3}})^2,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(a) Indique se f ou g é sobrejectiva ou injectiva e, se a aplicação for invertível, determine a sua inversa.

(b) Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

(c) Escreva g como composição de quatro aplicações, sem que nenhuma delas seja a aplicação identidade.

15. Considere as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.

16. Considere as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = 2x^2 + 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.

    (b) Calcule as imagens das funções f, g, $g \circ f$ e $f \circ g$.

17. Sejam $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{2, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ a aplicação definida por

    $$f(X) = \text{soma dos elementos de } X,$$

    para qualquer $X \in \mathcal{A}$. Considere ainda a aplicação $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

    $$g(n) = \begin{cases} \text{o maior primo menor ou igual a } n & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

    (a) Determine $g \circ f$.

    (b) Calcule as imagens de f e de $g \circ f$.

    (c) A aplicação g é injectiva? E a aplicação $g \circ f$?

18. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Mostre que:

    (a) f é sobrejectiva se e só se, para qualquer subconjunto B de Y, se tem $f(f^{-1}(B)) = B$;

    (b) f é injectiva se e só se, para qualquer subconjunto A de X, se tem $f^{-1}(f(A)) = A$;

    (c) f é injectiva se e só se, para quaisquer subconjuntos A e A' de X, se tem

    $$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A');$$

    (d) f é injectiva se e só se, para quaisquer subconjuntos A e A' de X, se tem

    $$A \subsetneq A' \Rightarrow f(A) \subsetneq f(A').$$

19. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações. Mostre que:

    (a) Se f e g são sobrejectivas então $g \circ f$ é sobrejectiva;

    (b) Se f e g são injectivas então $g \circ f$ é injectiva;

    (c) Se f e g são bijectivas então $g \circ f$ é bijectiva e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

20. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações. Mostre que:

    (a) Se $g \circ f$ é injectiva então f é injectiva;

    (b) Se $g \circ f$ é sobrejectiva então g é sobrejectiva.

21. Dê um exemplo de aplicações f e g tais que:

    (a) $g \circ f$ é injectiva e g não é injectiva;

    (b) $g \circ f$ não é injectiva e g é injectiva.

22. Dê um exemplo de aplicações $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ e $h : Y \longrightarrow X$ tais que:

    (a) $f \circ g = f \circ h$ e $g \neq h$;

    (b) $g \circ f = h \circ f$ e $g \neq h$.

23. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Mostre que:

(a) f é injectiva se e só se existe uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$;

(b) f é sobrejectiva se e só se existe uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$;

(c) f é bijectiva se e só se existe uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

24. Determine todas as aplicações invertíveis do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ e indique as respectivas aplicações inversas.

25. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ duas aplicações. Mostre que f é invertível com $g = f^{-1}$ se e só se, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$,

$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad g(y) = x \ .$$

26. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação. Demonstre que as condições seguintes são equivalentes:

(a) $f \circ f = \mathrm{id}_X$;

(b) f é bijectiva e $f^{-1} = f$.

27. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Mostre que:

(a) f é injectiva se e só se, para quaisquer aplicações g e g' de um conjunto arbitrário Z em X, se tem

$$f \circ g = f \circ g' \quad \Longrightarrow \quad g = g';$$

(b) f é sobrejectiva se e só se, para quaisquer aplicações h e h' de Y num conjunto arbitrário Z, se tem

$$h \circ f = h' \circ f \quad \Longrightarrow \quad h = h'.$$

28. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ diz-se *idempotente* se $f = f \circ f$. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação, $\mathrm{Im} f$ a imagem de f e $\mathrm{Fix} f$ o conjunto dos pontos fixos de f (i.e. $\mathrm{Fix} f = \{x \in X \mid \ f(x) = x\}$). Mostre que:

(a) f é idempotente se e só se $\mathrm{Im} f = \mathrm{Fix} f$;

(b) Se f é idempotente e sobrejectiva então f é a aplicação identidade.

29. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação e R_f o *núcleo* de f, i.e. a relação binária sobre X definida do seguinte modo:

$$R_f = \{(x, y) \mid \ x, y \in X \text{ e } f(x) = f(y)\}.$$

Prove que:

(a) R_f é uma relação de equivalência sobre X;

(b) Para qualquer $x \in X$, $[x]_{R_f} = f^{-1}(\{f(x)\})$;

(c) f é injectiva se e só se R_f é a relação de identidade sobre X.

1.3 Divisibilidade

1. Sejam m, n e c três inteiros. Mostre que:

   (a) Se $c|m$ e $c|n$ então $c|\,(m+n)$;

   (b) Se $c|m$ ou $c|n$ então $c|mn$.

2. Dê exemplo de inteiros positivos a, b e c tais que a não divide b, a não divide c e a divide bc.

3. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $m \neq 0$ e $n = mq + r$, com $0 \leq r < |m|$. Prove que

$$\text{mdc}\{m, n\} = \text{mdc}\{m, r\}.$$

4. Sejam a e b dois inteiros positivos. Mostre que mdc$\{a, b\} =$ mdc$\{a, a+b\}$.

5. Sejam a e b dois inteiros tais que $a > b > 0$. Mostre que mdc$\{a, b\} =$ mdc$\{a-b, b\}$.

6. Determine o cociente q e o resto r da divisão inteira do inteiro n pelo inteiro m seguintes:

   (a) $n = 106$ e $m = 12$;

   (b) $n = 221$ e $m = 17$;

   (c) $n = 0$ e $m = 31$;

   (d) $n = -20$ e $m = 3$;

   (e) $n = 19$ e $m = 5$;

   (f) $n = -7$ e $m = 5$;

   (g) $n = 13$ e $m = 20$;

   (h) $n = 50$ e $m = 6$.

7. Utilizando o Algoritmo de Euclides, determine:

   (a) mdc$\{6, 14\}$;

   (b) mdc$\{-75, 105\}$;

   (c) mdc$\{60, 90\}$;

   (d) mdc$\{20, 0\}$;

   (e) mdc$\{-371, 65\}$;

   (f) mdc$\{-371, -65\}$.

8. Sejam a e b dois inteiros não nulos. Mostre que a e b são primos entre si se e só se existem inteiros m e n tais que $1 = am + bn$.

9. Para os valores inteiros m e n indicados a seguir, determine mdc$\{m, n\}$ e coeficientes da Igualdade de Bézout associados (i.e. inteiros u e v tais que mdc$\{m, n\} = mu + nv$):

   (a) $n = 20$ e $m = 14$;

   (b) $n = 72$ e $m = 17$;

   (c) $n = 8359$ e $m = 9373$;

   (d) $n = 1001$ e $m = 33$;

   (e) $n = 56$ e $m = 26$;

(f) $n = -90$ e $m = 1386$;

(g) $n = -2860$ e $m = -2310$.

10. Sejam a e b dois números inteiros não nulos. Prove que:

    (a) O conjunto $S = \{ax + by \mid \ x, y \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ ax + by > 0\}$ é não vazio;

    (b) S tem elemento mínimo (designemo-lo por d);

    (c) Se $k \in S$ então $d|k$;

    (d) Se $c|a$ e $c|b$ então $c|d$.

11. Determine a forma standard dos seguintes números inteiros:

    (a) 105;

    (b) 684;

    (c) 1375;

    (d) 139.

12. Sejam

$$m = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} \quad \text{e} \quad n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$$

($k \in \mathbb{N}^+$), em que $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ são números primos e s_i e t_i são números inteiros não negativos, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Prove que $m|n$ se e só se $s_i \leq t_i$, para qualquer $i = 1, 2, \ldots, k$.

13. Sejam m e n tal como no enunciado do exercício anterior. Sejam

$$u_i = \min\{s_i, t_i\} \quad \text{e} \quad v_i = \max\{s_i, t_i\},$$

para qualquer $i = 1, 2, \ldots, k$. Prove que:

    (a) $\text{mdc}\{m, n\} = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}$;

    (b) $\text{mmc}\{m, n\} = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k}$.

14. Use o resultado do exercício anterior para calcular o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum dos seguintes pares de números inteiros:

    (a) $10, 105$;

    (b) $-39, 54$;

    (c) $56, 126$;

    (d) $-2860, -2310$.

15. Determine todos os divisores positivos dos seguintes números inteiros:

    (a) 16;

    (b) 27;

    (c) $2^3 \cdot 3^2$;

    (d) $2^r \cdot 3^s \ \ (r, s \in \mathbb{N})$.

1.4 Congruências lineares

1. Indique as classes de equivalência determinadas em $\mathbb{Z}$ pela relação congruência módulo 4.

2. Quantas classes de equivalência são determinadas em $\mathbb{Z}$ pela relação de congruência módulo 73?

3. Indique três elementos de $\mathbb{Z}$ que sejam congruentes módulo 5 com 0, 1, 2 e 3.

4. Indique o único inteiro $b \in \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ tal que $a \equiv b \pmod 4$, com:

   (a) $a = 17$;
   (b) $a = 7$;
   (c) $a = -7$;
   (d) $a = 2$;
   (e) $a = -88$;
   (f) $a = -1503$.

5. Mostre que se $a, b \in Z$ e $a \equiv b \pmod m$ então $a^2 \equiv b^2 \pmod m$.

6. Determine se cada uma das congruências lineares seguintes tem soluções e, em caso afirmativo, determine todas as suas soluções em $\mathbb{Z}_{26}$.

   (a) $5x \equiv 1 \pmod{26}$;
   (b) $9x \equiv 1 \pmod{26}$;
   (c) $4x \equiv 1 \pmod{26}$;
   (d) $13x \equiv 1 \pmod{26}$;
   (e) $5x \equiv 3 \pmod{26}$;
   (f) $4x \equiv 8 \pmod{26}$;
   (g) $2x \equiv 16 \pmod{26}$;
   (h) $13x \equiv 13 \pmod{26}$.

7. Determine a congruência linear $a'x \equiv b' \pmod m$, com $a', b' \in Z_m$, que possui exactamente as mesmas soluções que a congruência linear $ax \equiv b \pmod m$, com:

   (a) $a = 2000,\ b = 5,\ m = 21$;
   (b) $a = 1647,\ b = 20,\ m = 4$;
   (c) $a = 500,\ b = 200,\ m = 3$.

   Em cada um dos casos, determine as soluções da congruência linear em $\mathbb{Z}_m$.

8. Determine todas as soluções da congruência linear

$$4x \equiv 16 \pmod{24}$$

   no conjunto $\{-32, -31, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 28\}$.

9. Determine todas as soluções da congruência linear

$$2x \equiv 8 \pmod{14}$$

   no conjunto $\{0, 1, \ldots, 27\}$.

10. Determine todas as soluções da congruência linear

$$3x \equiv 12 \ (\mathrm{mod}\ 15)$$

no conjunto $\{-14, -13, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 14\}$.

11. Determine todas as soluções da congruência linear

$$8x \equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 12)$$

no conjunto $\{0, 1, \ldots, 35\}$.

12. Determine, se existir, uma solução em $\mathbb{Z}_{mn}$ comum às congruências lineares

$$ax \equiv b \ (\text{mod } m) \quad \text{e} \quad a'x \equiv b' \ (\text{mod } n),$$

com:

(a) $a = 1,\ b = 8,\ m = 13$ e $a' = 1,\ b' = 0,\ n = 99$;

(b) $a = 8,\ b = 4,\ m = 12$ e $a' = 5,\ b' = 10,\ n = 25$;

(c) $a = 10,\ b = 5,\ m = 25$ e $a' = 12,\ b' = 6,\ n = 9$;

(d) $a = 2,\ b = 4,\ m = 8$ e $a' = 3,\ b' = 6,\ n = 9$;

(e) $a = 3,\ b = 6,\ m = 24$ e $a' = 3,\ b' = 9,\ n = 39$.

13. Consideremos $n = abcd$ onde $abcd$ é a representação do número n na base 10, isto é,

$$n = a.1000 + b.100 + c.10 + d.$$

Mostre que:

(a) n é divisível por 9 se, e só se, $a + b + c + d$ é divisível por 9;

(b) n é divisível por 2 se, e só se,o último dígito d é divisível por 2;

(c) n é divisível por 5 se, e só se,o último dígito d é divisível por 5;

(d) n é divisível por 11 se, e só se, $a - b + c - d$ é divisível por 11.

14. Determine *uma solução* do sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 5) \\ 2x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 3) \end{cases}$$

no conjunto $\{0, 1, \ldots, 14\}$.

1.5 Relações de recorrência

1. Resolva as seguintes relações de recorrência:

(a) $a_n = -3a_{n-1}$, com a condição inicial $a_0 = 2$;

(b) $a_n = 2n\ a_{n-1}$, com a condição inicial $a_0 = 1$;

(c) $a_n = a_{n-1} + n$, com a condição inicial $a_0 = 0$;

(d) $a_n = a_{n-1} + 1 + 2^{n-1}$, com a condição inicial $a_0 = 0$;

(e) $a_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$, com a condição inicial $a_1 = 1$.

2. Resolva as seguintes relações de recorrência:

   (a) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, com as condições inicias $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$;
   (b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, com as condições inicias $a_0 = 5$ e $a_1 = 16$;
   (c) $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$, com as condições inicias $a_0 = 4$ e $a_1 = 10$;
   (d) $2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2}$, com as condições inicias $a_0 = a_1 = 1$;
   (e) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, com as condições inicias $a_0 = a_1 = 1$;
   (f) $a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2}$, com as condições inicias $a_0 = 2$ e $a_1 = -20$;
   (g) $9a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$, com as condições inicias $a_0 = 6$ e $a_1 = 5$;
   (h) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, com as condições iniciais $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$.

3. Resolva a relação de recorrência
$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},$$
sujeita às condições iniciais $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$
(sucessão de Fibonacci).

4. Resolva a relação de recorrência
$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2},$$
sujeita às condições iniciais $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = -1 \ . \end{cases}$

5. Resolva a relação de recorrência
$$x_n = 14x_{n-1} - 49x_{n-2}$$
sujeita às condições iniciais $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 7 \ . \end{cases}$

6. Resolva a relação de recorrência
$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$$
sujeita às condições iniciais $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 5 \ . \end{cases}$

7. Resolva a relação de recorrência
$$a_n = 49a_{n-2}$$
sujeita às condições iniciais $\begin{cases} a_0 = -7 \\ a_1 = 7. \end{cases}$

8. Resolva relação de recorrência
$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$$
sujeita às condições iniciais $a_0 = a_1 = 1$.
Sugestão: utilize a substituição $b_n = \sqrt{a_n}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta
2010-2011

Lista de Exercícios

Parte 2. Grafos e Aplicações

Jorge André & Vítor Hugo Fernandes
(com base na lista de exercícios do ano lectivo de 2007/2008)

2.1 Generalidades

1. Seja $G = (X, U)$ um multigrafo com n vértices e m arcos. Sejam ainda $\delta(G) = \min_{x \in X} d_G(x)$ e $\Delta(G) = \max_{x \in X} d_G(x)$. Justifique que $\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$.

2. Seja G um multigrafo com n vértices, t dos quais têm grau k e os restantes têm grau $k+1$. Justifique que, sendo m o número de arcos de G, se tem $t = (k+1)n - 2m$.

3. Seja G um multigrafo com n vértices e m arcos. Seja k o menor inteiro positivo tal que $k \geq \frac{2m}{n}$. Justifique que G tem pelo menos um vértice com grau superior ou igual a k.

4. Seja G um multigrafo com n vértices e $n-1$ arcos. Conclua que G tem pelo menos um vértice com grau 1 ou um vértice isolado.

5. Quantos vértices tem um grafo simples G com:

   (a) 12 arcos e com todos os vértices de grau 2?

   (b) 15 arcos, 3 vértices de grau 4 e todos os outros com grau 3?

6. É possível ter um grupo de 7 pessoas em que cada uma delas conhece exactamente 3 pessoas do grupo?

   Compare esta questão com o seguinte problema: Sete estudantes vão de férias e cada um deles decide enviar um postal a três dos outros. É possível cada estudante receber postais exactamente das três pessoas para quem enviou?

7. Indicando primeiro uma formulação em termos de grafos, responda às seguintes questões:

   (a) O número de pessoas que, numa festa, não conhecem um número ímpar das outras pessoas da festa é sempre um número par?

   (b) O número de pessoas nascidas até hoje que tiveram ou têm um número ímpar de irmãos é um número par?

8. Justifique que não existe nenhum grafo simples com 12 arcos, 28 arcos e em que o grau de cada vértice é 3 ou 4.

9. Qual é o maior número possível de vértices num grafo com 19 arcos em que todos os vértices tem grau superior ou igual a 3?

10. Um digrafo $G = (X, U)$ diz-se um *isografo* se, para todo o $x \in X$ $d^+(x) = d^-(x)$. Indique um isografo em que nem todos os vértices têm o mesmo grau.

11. Um digrafo $G = (X, U)$ diz-se exteriormente (respectivamente interiormente) regular de grau r se, para todo o $x \in X$, $d^+(x) = r$ (respectivamente, $d^-(x) = r$).

    (a) Indique um digrafo exteriormente regular que não seja interiormente regular.

    (b) Mostre que se G é um digrafo exteriormente regular de grau r e interiormente regular de grau k então $k = r$.

12. Um digrafo $G = (X, U)$ diz-se regular de grau r ou r-regular se, para todo o $x \in X$, $d^+(x) = d^-(x) = r$.

    (a) Dê o exemplo de um digrafo 1-regular, com n vértices, para cada $n \geq 2$.

    (b) Dê o exemplo de um digrafo 2-regular, com 5 vértices.

(c) Mostre que, quaisquer que sejam os inteiros n e r, com $0 \leq r \leq n$, existe um digrafo r-regular com n vértices.

13. (a) Justifique que em qualquer grafo simples existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

    (b) Indique um grafo que ilustre que é falsa a afirmação que se obtém de (a) retirando a hipótese do grafo ser simples.

14. Justifique que a sequência com n elementos $(n-1, n-1, 1, \ldots, 1)$ não é uma sequência gráfica.

15. Indique, se existir, um multigrafo com a sequência de graus $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$. Existe algum grafo simples com a sequência de graus indicada?

16. Determine se cada uma das sequências seguintes é gráfica e, em caso afirmativo, indique um grafo simples que a admita como sequência de graus:

    (a) $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1^3)$;

    (b) $(9, 7, 5, 3^5, 2^2, 1^3)$;

    (c) 4^6;

    (d) 4^7;

    (e) 5^6;

    (f) 5^8;

    (g) $(3^2, 2^9)$;

    (h) $(4^2, 2^4)$.

17. Indique, caso existam, cinco grafos simples não isomorfos, com a sequência de graus $(3^2, 2^2, 1^2)$.

18. Considere as sequências, não crescentes

    (a) $(5, 4, 4, 3, k, 1, 1)$ e

    (b) $(8, k, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1, 1, 1)$.

    Determine se existem valores de k para os quais as sequências são gráficas.

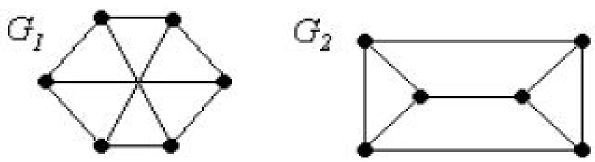
19. Justifique que existe um grafo simples com 7 vértices, 12 arcos, contendo vértices de grau 2, 3 e 4 e não contendo vértices com outros graus.

    Sugestão: Mostre que a unica sequência de graus possível para este grafo é $(4, 4, 4, 4, 3, 3, 2)$.

20. Justifique que $(k, 3^k)$ é uma sequência gráfica, para todo o inteiro k, com $k \geq 3$.

21. Por indução, mostre que, para todo o número inteiro positivo n, a sequência com $2n$ elementos $(n, n, n-1, n-1, \ldots, 2, 2, 1, 1)$ é uma sequência gráfica.

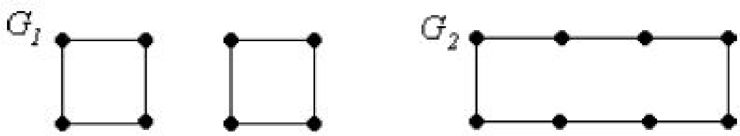
22. Justifique que os seguintes grafos têm a mesma sequência de graus, mas não são isomorfos:



23. Sejam G_1, G_2 e G_3 três grafos simples com 4 vértices e dois arcos. Justifique que pelo menos dois desses grafos são isomorfos.

24. Indique, a menos de isomorfismo, todos os grafos simples com 4 vértices.

25. Considere os grafos não isomorfos (mas com a mesma sequência de graus):



Existe algum grafo com a mesma sequência de graus dos anteriores e que não seja isomorfo a nenhum deles?

26. Mostre que $\overline{K}_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ e $K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_r}$ são isomorfos.

27. Indique dois digrafos, não isomorfos, com 4 vértices e 6 arcos.

28. Dê um exemplo, caso seja possível, de dois grafos simples regulares de grau r com o mesmo número de vértices e não isomorfos, para $r = 1, 2, 3$.

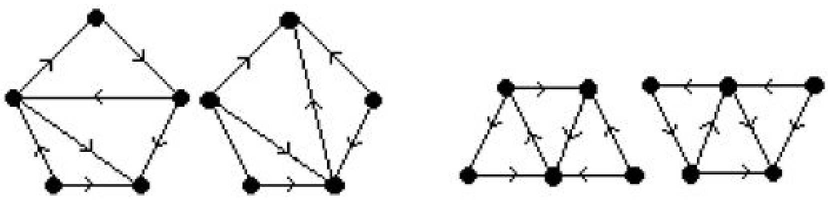
29. Seja G um grafo simples r-regular, com n vértices e m arcos.

   (a) Exprima m em função de n e de r.

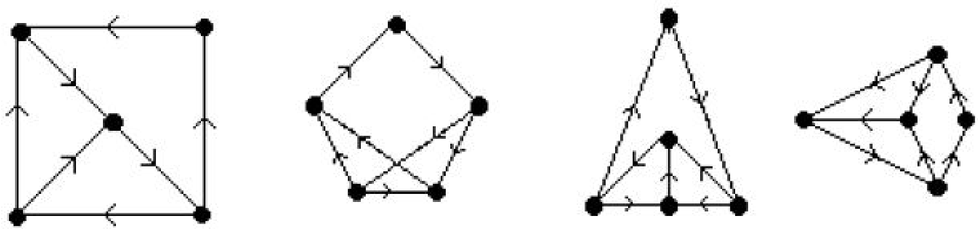
   (b) Qual o valor de m se $G = K_n$?

30. Apenas dois dos grafos seguintes são isomorfos. Determine-os.

   (a)



   (b)



31. Qual o número mínimo de vértices necessário para construir um grafo completo com pelo menos, 1000 arcos?

32. Seja G um grafo simples r-regular, com r ímpar. Justifique que r divide o número de arcos de G.

33. Um grafo simples diz-se *birregular* se G tem n_1 vértices com grau d_1 e os restantes n_2 vértices têm grau d_2.

   (a) Mostre que se G é um grafo nas condições indicadas atrás, com n vértices e m arcos, então $n_1(d_2 - d_1) = nd_2 - 2m$.

   (b) Seja G um grafo birregular com 9 vértices e em que cada vértice tem grau 5 ou 6. Justifique que G tem, pelo menos, 5 vértices com grau 6 ou, pelo menos, 6 vértices com grau 5.

34. Justifique que se $G = (X_1 \dot\cup X_2, U)$ é um grafo bipartido regular então $|X_1| = |X_2|$.

35. Indique uma condição necessária e suficiente para que o grafo tripartido completo $K_{r,s,t}$ seja regular.

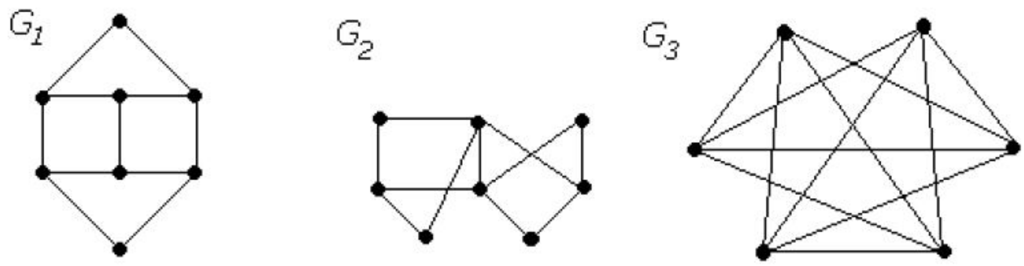
36. Indique, a menos de um isomorfismo, todos os grafos bipartidos de ordem 4.

37. Mostre que um grafo simples $G = (X, U)$, não nulo, é um grafo r-partido completo para algum $r \geq 2$ se, e só se, para quaisquer três vértices distintos x, y, z, se $\{x, y\} \notin U$ e $\{y, z\} \notin U$ então $\{x, z\} \notin U$.

38. (a) Justifique que um grafo bipartido de ordem 10 tem, no máximo, 25 arcos.
    (b) Determine o número máximo de arcos de um grafo bipartido de ordem n, com $n \geq 2$.

39. Num campeonato de futebol 26 equipas estão divididas em dois grupos de 13 equipas. O regulamento diz que cada uma das equipas deve jogar 14 jogos: 11 contra equipas do seu grupo e 3 jogos com equipas do outro grupo.
    Justifique que este regulamento não pode ser aplicado.

40. Determine quais dos seguintes grafos são bipartidos e, para esses, apresente uma representação geométrica que torne evidente a correspondente partição do conjunto dos vértices.



41. Justifique as afirmações:
    (a) Se $T = (X, U)$ é um torneio e $X' \subseteq X$ então $T - X'$ é um torneio ou um vértice isolado.
    (b) Um torneio tem, no máximo, uma fonte (respectivamente, poço).

42. Indique, a menos de um isomorfismo, todos os torneios de ordem 4.

43. Mostre que num torneio G se verifica a igualdade $\sum_{x \in X} (d^+(x))^2 = \sum_{x \in X} (d^-(x))^2$.

44. Um digrafo $G = (X, U)$ diz-se regular de grau r se $d^+(x) = d^-(x) = r$, para todo o $x \in X$. Mostre que:
    (a) Não existem torneios regulares com um número par de vértices.
    (b) Existem torneios regulares com n vértices, para todo o inteiro n é ímpar, com $n \geq 3$.

45. (a) Dê um exemplo de dois torneios regulares com a mesma ordem não isomorfos.
    (b) Mostre que é possível cinco equipas disputarem um torneio e ficarem todas com o mesmo número de vitórias e derrotas.
    (c) Justifique que a situação anterior não pode ocorrer se o torneio for disputado com seis equipas.
    (d) Mostre que num torneio com n equipas, $n \geq 3$, é possível todas as equipas ficarem com o mesmo número de vitórias e derrotas se, e só se, n é ímpar.

46. Seja G um grafo simples e $\overline{G}$ o seu grafo complementar. Se G e $\overline{G}$ são ambos bipartidos o que pode concluir sobre G ?

47. Seja G um grafo simples r-regular, com n vértices. O seu grafo complementar $\overline{G}$ é ainda regular? Em caso afirmativo, de que grau?

48. Indique o número de arcos do:

    (a) Grafo complementar do grafo r-partido completo $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$.

    (b) Grafo complementar de um grafo simples, r-regular, com n vértices.

49. Sejam G_1 e G_2 grafos simples e $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$ os respectivos grafos complementares. Justifique que G_1 é isomorfo a G_2 se, e só se, $\overline{G}_1$ é isomorfo a $\overline{G}_2$.

50. Seja G um grafo simples. Se $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, com $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, é a sequência de graus de G, qual a sequência de graus do grafo complementar de G ?

51. Considere a tabela

n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
0	0	2	3	0	1

em que n_i, com $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, representa o número de vértices de grau i de um grafo simples G em que não existem vértices com grau superior a 5. Indique:

    (a) A sequência de graus de G.

    (b) Uma tabela idêntica para o grafo complementar de G.

2.2 Conexidade

1. Dê um exemplo de uma cadeia num grafo $G = (X, U)$ que seja elementar e não seja simples.

2. Sejam $G = (X, U)$ um grafo simples e x_i e x_j vértices de G. Justifique que:

    (a) G possui uma cadeia $x_i - x_j$ se, e só se, possui uma cadeia $x_i - x_j$ elementar.

    (b) Se G possui duas cadeias $x_i - x_j$ elementares distintas, com $x_i \neq x_j$, então G possui um ciclo.

    (c) G pode ter duas cadeias $x_i - x_i$ não triviais elementares distintas sem ter ciclos.

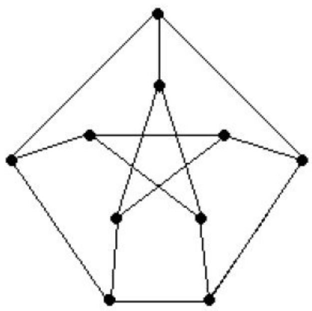
3. Seja G um grafo com ciclos. Designa-se por contorno de G o comprimento mínimo dos ciclos de G. Determine o contorno dos seguintes grafos:

    (a) K_9

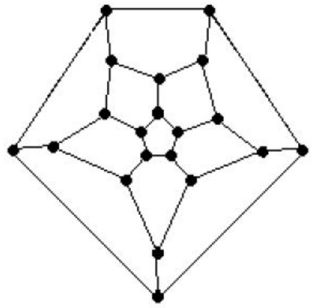
    (b) $K_{5,7}$

    (c) C_8

    (d) Grafo de Petersen



(e) Grafo do dodecaedro



4. Sejam $G = (X, U)$ um grafo simples e R a relação binária definida em U por $u_i R u_j$ se, e só se, u_i e u_j pertencem ao mesmo ciclo elementar. Mostre que R é uma relação de equivalência.

5. (a) Justifique que se um grafo G admite um grafo parcial conexo então G é conexo.

   (b) Indique um grafo conexo G tal que todo o grafo parcial G' , com $G' \neq G$, seja desconexo.

6. (a) Justifique que um grafo simples G e o seu grafo complementar $\overline{G}$ não podem ser simultaneamente desconexos.

   (b) Indique um grafo simples conexo com $n \geq 2$ vértices, cujo complementar também seja conexo.

7. Seja $G = (X, U)$ um grafo conexo, não completo. Justifique que existe $X' \subseteq X$ tal que $G - X'$ é desconexo ou possui um único vértice.

8. Mostre que se $G = (X, U)$ é um grafo simples conexo com $n \geq 3$ vértices, não completo, então em G possui vértices x, y, z, distintos dois a dois, tais que $\{x, y\} \in U$, $\{y, z\} \in U$ e $\{x, z\} \notin U$.

9. Justifique que um grafo $G = (X, U)$ é conexo se, e só se, para toda a partição $\{X_1, X_2\}$ de X existe um arco de G com uma extremidade num vértice de X_1 e a outra extremidade num vértice de X_2.

10. Justifique que:

    (a) Num grafo bipartido conexo $G = (X, U)$ existe uma unica partição $\{X_1, X_2\}$ de X com a propriedade de todo o arco $u \in U$ ter uma extremidade num vértice de X_1 e a outra extremidade num vértice de X_2.

    (b) A propriedade (a) é falsa se G é desconexo.

11. Um grafo simples $G = (X, U)$ diz-se *localmente conexo* se, para todo o $x \in X$, o subgrafo de G gerado pelos vértices adjacentes a x é um grafo conexo. Indique:

    (a) Um grafo conexo que não seja localmente conexo.

    (b) Um grafo localmente conexo que não seja conexo.

12. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples. Define-se a *distância* $d(x_i, x_j)$ do vértice x_i ao vértice x_j da seguinte forma:

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G \text{ não possui cadeias } x_i - x_j \\ \text{menor comprimento das cadeias } x_i - x_j \text{ de } G & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Justifique as afirmações:

    (a) Para quaisquer $x_i, x_j \in X$, $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) \leq n - 1$.

    (b) Para quaisquer vértices $x_i, x_j, x_k \in X$ tem-se $d(x_i, x_j) = d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)$.

(c) Se $d(x_i, x_j) > 1$ então existe um vértice x_k, com $x_k \neq x_i$ e $x_k \neq x_j$, tal que $d(x_i, x_j) = d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)$.

13. Sejam x, y, z vértices de um grafo simples conexo $G = (X, U)$ tais que $d(x, y) = r$, $d(y, z) = s$ e $d(x, z) = r + s$. Seja $B_s(x) = \{w \in X \mid d(x, w) \leq s\}$. Mostre que $B_s(x) \cup B_r(z) \subseteq B_{r+s}(y)$.

14. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples conexo e $\partial(G)$ o máximo dos comprimentos das cadeias elementares abertas existentes em G.

    (a) Mostre que duas quaisquer cadeias elementares abertas de comprimento máximo têm um vértice em comum.

    (b) Justifique que se G é conexo, com n vértices, então $\partial(G) \geq \min\{n-1, 2\delta(G)\}$, onde denota $\delta(G)$o menor dos graus dos vértices de G.

    (c) Determine $\partial(G)$ para $G = K_{1,n}$ e para $G = K_{n,n}$.

15. Seja G um grafo com 15 vértices e 4 componentes conexas.

    (a) Justifique que G tem pelo menos uma componente conexa com 4 ou mais vértices.

    (b) Qual o número máximo de vértices que uma componente conexa de G pode ter?

16. Seja G um grafo em que existem exactamente dois vértices x_i e x_j com grau ímpar. Mostre que x_i e x_j pertencem à mesma componente conexa e, portanto, em G, existe a uma cadeia $x_i - x_j$.

17. Indique o número de componentes conexas do grafo bipartido completo $K_{r,s}$ e do seu grafo complementar $\overline{K}_{r,s}$.

18. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples com $n \geq 2$ vértices tal que $d_G \geq \frac{n-1}{2}$, para qualquer $x \in X$. Mostre que G é conexo.
Sugestão: Suponha que G é desconexo. O que pode afirmar sobre o número de vértices em cada componente conexa?

19. Indique um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices, tal que:

    (a) Todo o arco é uma ponte.

    (b) Nenhum arco é uma ponte.

20. É evidente que existem cadeias elementares que não são simples. Justifique se existem caminhos elementares que não são simples.

21. Seja $G = (X, U)$ um grafo orientado e x_i e x_j dois vértices de G. Justifique que G possui um caminho $x_i - x_j$ se, e só se, possui um caminho $x_i - x_j$ elementar.

22. Seja $G = (X, U)$ um digrafo conexo sem circuitos. Justifique que cada vértice com grau exterior nulo é a extremidade final de um caminho com extremidade inicial num vértice de grau interior nulo.

    Enuncie a propriedade análoga em relação aos vértices com grau interior nulo.

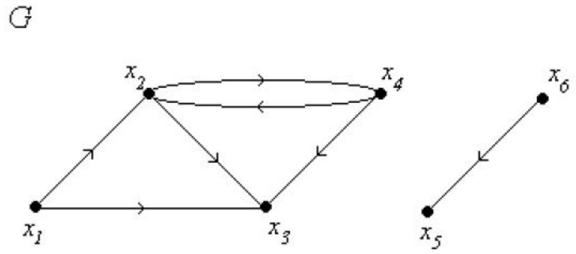
23. Seja $G = (X, U)$ um digrafo tal que, para todo o $x \in X$, $d^-(x) \geq r$, em que r é um inteiro positivo. Mostre que G tem um circuito de comprimento superior ou igual a $r + 1$.

24. Indique um digrafo fortemente conexo com dois vértices não adjacentes.

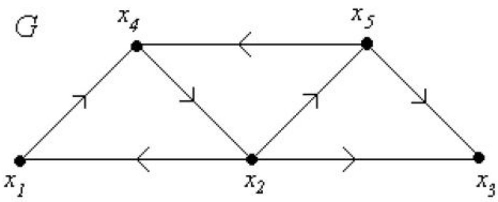
25. Se x_i é uma fonte (respectivamente, um poço) de um grafo orientado G, o que pode afirmar sobre a componente fortemente conexa a que x_i pertence?

26. Determine as componentes conexas e as componentes fortemente conexas dos digrafos:

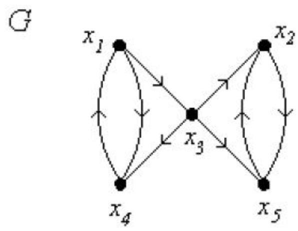
    (a)



    (b)



    (c)



27. Mostre que um digrafo fortemente conexo não tem fontes nem poços.

28. Sejam $G = (X, U)$ um digrafo e R a relação binária definida em X por $x_i R x_j$ se, e só se, G possui um circuito elementar que inclui os vértices x_i e x_j.

    Indique um digrafo fortemente conexo para o qual a relação R não seja transitiva.

    Compare com o Exercício 4.

29. Mostre que todo o torneio tem um caminho elementar gerador.

2.3 Árvores

1. Existe alguma árvore cuja sequência de graus seja $(3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$?

2. Os graus dos vértices de uma árvore T são $5, 4, 3, 2, 1, \ldots, 1$. Determine a ordem de T.

3. Seja T uma árvore que tem apenas vértices de grau 3 e vértices de grau 1. Se T tem 10 vértices de grau 3, quantos vértices tem de grau 1?

4. Uma árvore T tem 14 vértices de grau 1 e os restantes vértices têm graus 4 ou 5.

    (a) Quantos vértices de grau 4 tem T?

    (b) Quantos arcos tem T?

5. A média dos graus dos vértices de uma árvore T é $1,99$. Determine o tamanho de T.

6. A média dos graus dos vértices de uma árvore T é $\frac{21}{11}$. Supondo que T tem apenas vértices de grau 1 e vértices de grau 3, determine a sequência de graus de T.

7. A média dos graus dos vértices de um grafo conexo G é inferior a 2. Conclua que G é uma árvore.

8. Uma árvore T, com n vértices, tem exactamente um vértice com grau 2 e cada um dos restantes vértices tem grau 1 ou grau 3. Mostre que n é ímpar e determine, em função de n, o número de vértices de grau 1 de T.

9. Seja T uma árvore cujos vértices têm graus 1 e 3. Mostre que T tem tamanho ímpar.

10. Seja G uma árvore em que todos os vértices têm grau ímpar.

    (a) Mostre que o número de arcos de G é também um número ímpar.

    (b) Justifique que a afirmação anterior é falsa se G não é uma árvore.

11. Seja $G = (X, U)$ uma árvore, com $n \geq 2$ vértices. Sendo $X_1 = \{x \in X : d_G(x) = 1\}$ e $X_3 = \{x \in X : d_G(x) \geq 3\}$, mostre que $|X_1| = 2 + \sum_{x \in X_3}(d_G(x) - 2)$.

12. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples com n vértices e m arcos.

    (a) Mostre que se G satisfaz duas quaisquer das propriedades seguintes então também satisfaz a propriedade restante:

        i. G é conexo.

        ii. G tem um e um só ciclo.

        iii. $n = m$.

    (b) Indique, se existir, um grafo simples que verifique iii. e não verifique ii..

13. Seja G um grafo simples com n vértices e $n + 1$ arcos. Mostre que G tem pelo menos dois ciclos.

14. Seja G um grafo simples conexo em que a média aritmética dos seus graus é superior a 2. Mostre que:

    (a) G não é uma árvore.

    (b) G tem, pelo menos, dois ciclos.

15. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples conexo e $x \in X$ tal que $G - x$ é uma arvore. Justifique as afirmações:

    (a) Se $d_G(x) = 1$ então G é uma árvore.

    (b) Se $d_G(x) = 2$ então G tem um, e um só, ciclo.

16. Justifique que toda a árvore, com $n \geq 2$, vértices, é um grafo bipartido.

17. Existem grafos bipartidos completos que são árvores? Quais?

18. Seja $G = (X, U)$ uma árvore, com n vértices, tal que $d_G(x) \neq n-1$, para todo o $x \in X$. Justifique que:

    (a) G é um grafo bipartido mas não é bipartido completo.

    (b) G é conexo.

19. (a) Justifique que uma árvore não pode ter três vértices distintos a uma distância ímpar uns dos outros.
    (b) Indique um grafo simples que mostre que a afirmação recíproca é falsa.

20. (a) Indique, a menos de um isomorfismo, todos os grafos simples com 4 vértices e 3 arcos.
    (b) Quais os valores de n para os quais pode existir uma árvore, com n vértices, cujo complementar também seja uma árvore?
    (c) Conclua que, a menos de um isomorfismo, existem apenas duas árvores com a propriedade referida em (b).

21. Seja $G = (X, U)$ uma árvore e $G_1 = (X_1, U_1)$ e $G_2 = (X_2, U_2)$ duas subárvores de G (isto é, subgrafos de G que são árvores). Mostre que se $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ então o subgrafo gerado por $X_1 \cap X_2$ é ainda uma árvore.

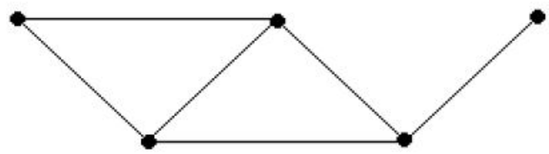
22. O que pode afirmar sobre o número de vértices de grau 1 de uma floresta com p componentes conexas?

23. Mostre que uma árvore $G = (X, U)$ tem pelo menos $\Delta(G) = \max\limits_{x \in X} d_G(x)$ vértices de grau 1.

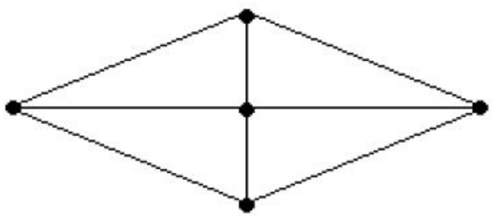
24. Mostre que uma árvore com pelo menos 3 vértices que tenha exactamente dois vértices com grau 1 é um grafo cadeia.

25. Determine todas as árvores maximais, não isomorfas, dos seguintes grafos:

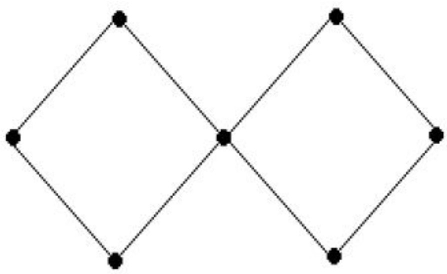
    (a)



    (b)



    (c)



26. Justifique que se G é um grafo simples que tem, a menos de um isomorfismo, exactamente uma árvore maximal, então G é uma árvore.

27. Sejam G um grafo simples conexo e T uma árvore maximal de G. Mostre que todo o a ciclo de G tem, pelo menos, um arco em comum com o grafo complementar de T.

28. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples conexo e $u \in U$. Mostre que u é uma ponte se, e só e o se, u pertence a toda a árvore maximal de G.

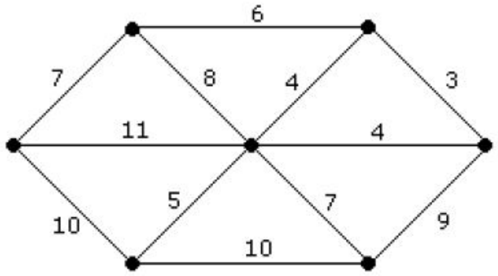
29. Justifique que qualquer arco de um grafo conexo G é um arco de alguma árvore maximal G.

    Dado um subgrafo parcial $G' = (X, U')$ de um grafo $G = (X, U)$, a um arco $u \in U \setminus U'$ chama-se *corda* de G relativamente a G'.

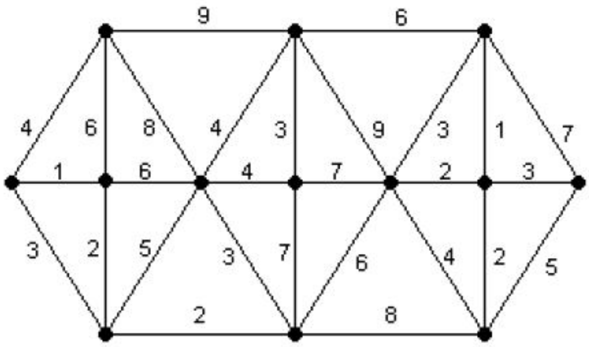
    É também verdade que qualquer arco de um grafo conexo $G = (X, U)$ é uma corda relativamente a alguma árvore maximal? Justifique.

30. Determine uma árvore maximal de valor mínimo e uma árvore maximal de valor a máximo para cada um dos seguintes grafos ponderados, utilizando o algoritmo de Kruskal e o algoritmo de Prim:

    (a)

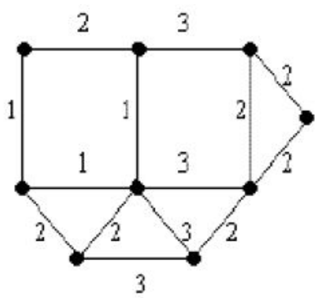


    (b)



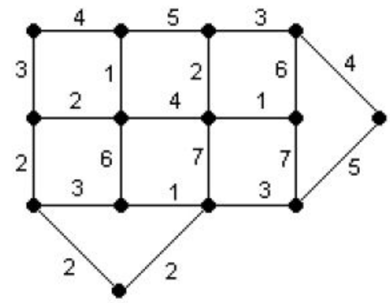
31. Justifique que um grafo ponderado conexo em que não existem dois arcos com o a mesmo peso tem uma unica árvore maximal de valor mínimo (respectivamente de valor máximo).

32. Considere o seguinte grafo ponderado G:



    Determine uma árvore maximal de valor mínimo usando o algoritmo de Prim.

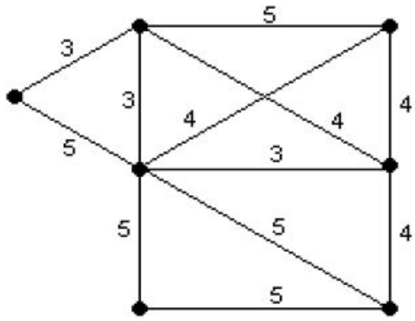
33. Considere o seguinte grafo ponderado G:



(a) Determine uma árvore maximal de valor máximo utilizando o algoritmo de Prim.

(b) Indique o valor da árvore obtida na alínea anterior.

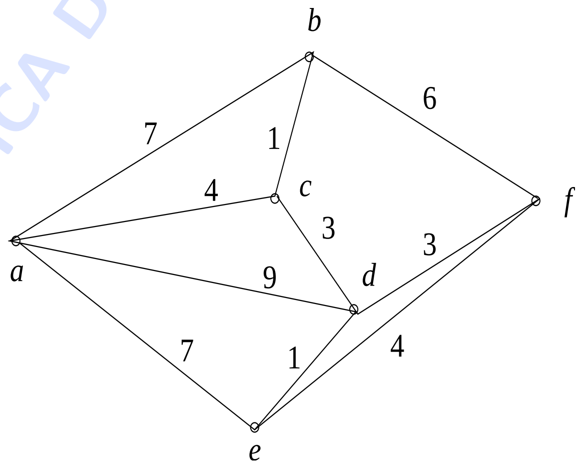
34. Considere o seguinte grafo ponderado G:



(a) Determine uma árvore maximal de G, de valor mínimo, usando o algoritmo de Kruskal.

(b) Indique o valor da árvore obtida na alínea anterior.

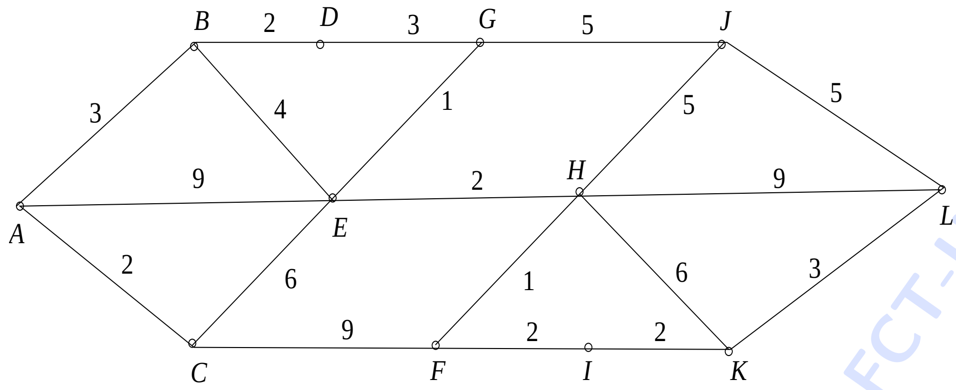
35. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Aplique o Algoritmo da Cadeia mais Curta para mostrar que o valor de uma cadeia $a - f$ mínima é igual a 10.

(b) Determine uma cadeia $b - e$ mínima e indique o seu valor.

36. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Aplique o Algoritmo da Cadeia mais Curta para mostrar que o valor de uma cadeia $A - L$ mínima é igual a 17. Indique uma tal cadeia.

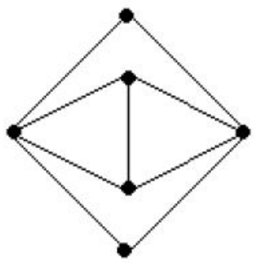
(b) Determine uma cadeia $J - A$ mínima e indique o seu valor.

(c) Determine uma cadeia $K - B$ mínima e indique o seu valor.

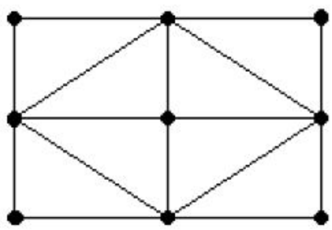
2.4 Grafos Eulerianos

1. Classifique os seguintes grafos qaunto a serem eulerianos ou semi-eulerianos.

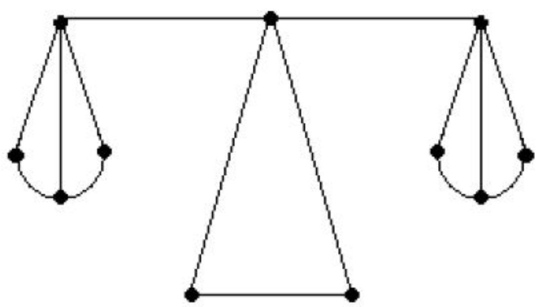
(a)



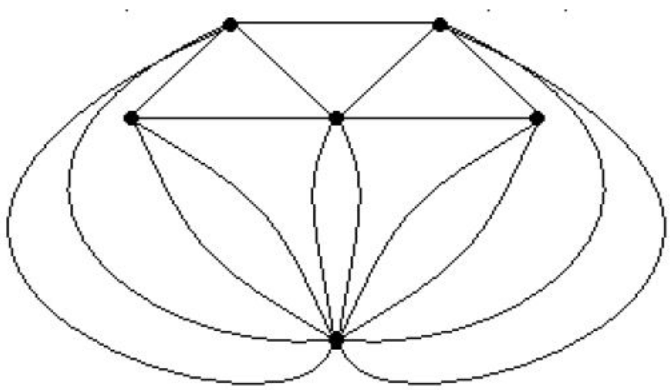
(b)



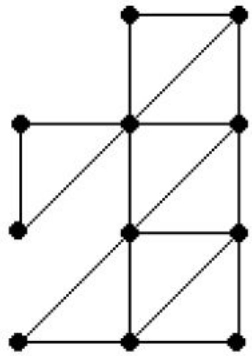
(c)



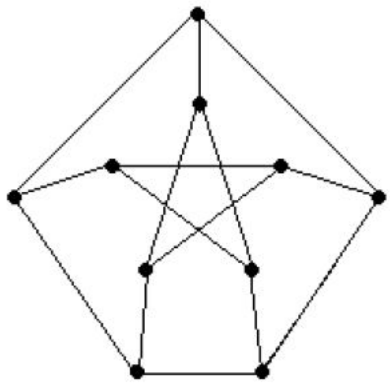
(d)



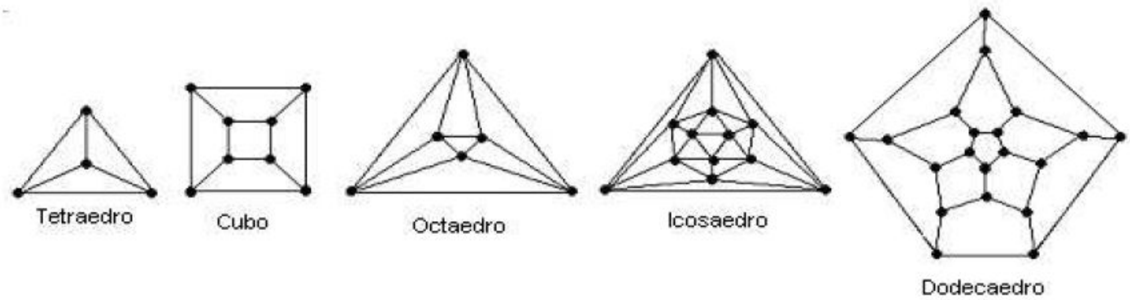
(e)



(f)

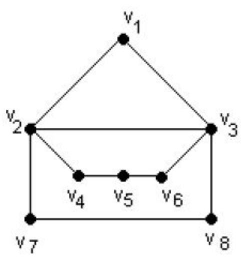


2. Os grafos conexos a seguir apresentados designam-se por grafos platónicos. Indique quais são eulerianos.

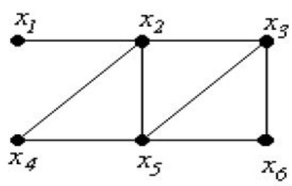


3. Sejam G_1 e G_2 dois grafos eulerianos conexos sem vértices em comum. Sejam x um vértice de G_1 e y um vértice de G_2. Seja G o grafo que se obtém de $G_1 \cup G_2$ acrescentando o arco $\{x, y\}$. O que pode afirmar sobre a existência de cadeias eulerianas em G?

4. Determine os valores de n para os quais:
   (a) K_n é euleriano;
   (b) K_n é semi-euleriano.
5. Justifique que é possível dispor todas as peças de um dominó normal, respeitando as regras usuais de colocação e de forma a que a última peça colocada se possa ligar à peça colocada inicialmente. (Sugestão: Considere um grafo $G = (X, U)$, com $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.)
6. Indique os grafos bipartidos completos que são:
   (a) Eulerianos;
   (b) Semi-eulerianos
7. Justifique as afirmações:
   (a) O único grafo bipartido completo com número par de vértices e semi-euleriano é $K_{1,1}$;
   (b) Não existem grafos tripartidos completos com cadeias eulerianas abertas com ambas as extremidades na mesma classe de vértices.
8. Indique para que valores de r, s e t o grafo tripartido completo $K_{r,s,t}$ é:
   (a) Euleriano;
   (b) Semi-euleriano.
9. Considere o grafo 4-partido completo $K_{2,r,s,t}$. Indique uma condição necessária e suficiente para a existência neste grafo de:
   (a) Um ciclo euleriano;
   (b) Uma cadeia euleriana aberta com ambas as extremidades na primeira classe de vértices.
10. Seja $G = (X, U)$ um multigrafo, não orientado, em que todo o vértice tem grau par. Mostre que é possível atribuír uma orientação aos arcos de G de forma a obter um isografo, isto é um grafo orientado G' tal que $d^+_{G'}(x) = d^-_{G'}(x)$, para qualquer $x \in X$.
11. Considere o seguinte grafo G:



   (a) Determine a ordem e o tamanho de G.
   (b) Indique uma sequência de graus de G. O grafo G é regular?
   (c) Mostre que G é euleriano e determine, usando o algoritmo de Fleury, um ciclo euleriano de G.
12. Considere o grafo simples G:

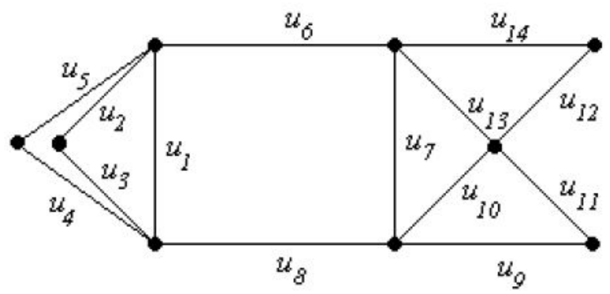


(a) Justifique que G é semi-euleriano.

(b) Considerando $G' = G + \{x_1, x_3\}$, verifique que G' é euleriano e utilize o algoritmo e de Fleury para determinar um ciclo euleriano de G'.

(c) Utilizando o ciclo euleriano de G determinado na alínea anterior indique uma cadeia euleriana aberta de G.

13. Considere o grafo simples G:

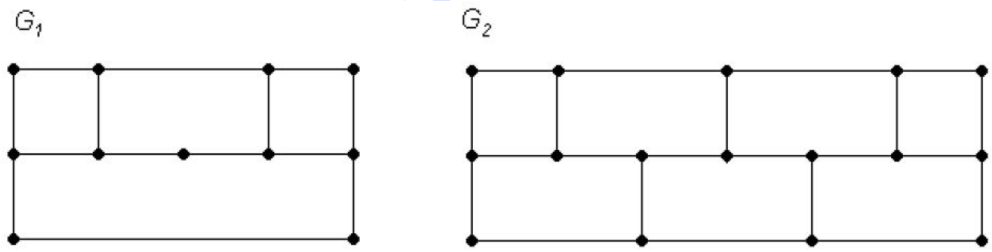


(a) Justifique que G é euleriano.

(b) Seja $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$ uma sequência de arcos obtida pela aplicação do algoritmo de Fleury ao grafo G. Justifique que u_8 não pode ser escolhido no passo seguinte da aplicação deste mesmo algoritmo.
Indique a restante sequência de arcos obtida por aplicação do algoritmo.

2.5 Grafos Hamiltonianos

1. Considere os grafos



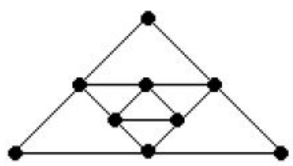
Justifique que:

(a) G_1 é hamiltoniano;

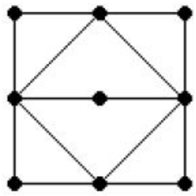
(b) G_2 não é hamiltoniano mas é semi-hamiltoniano.
(Sugestão: Considere os vértices com grau 2.)

2. Indique se cada um dos grafos seguintes é hamiltoniano ou semi-hamiltoniano:

(a)



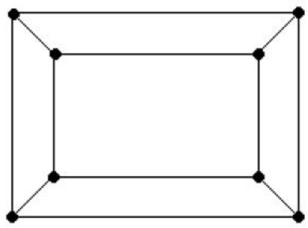
(b)



3. Quais são os grafos platónicos (indicados no Exercício 2.4.2) hamiltonianos?

4. Justifique que o grafo de Petersen não é hamiltoniano mas é semi-hamiltoniano.

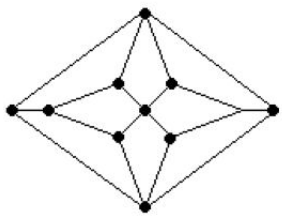
5. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples. Denomina-se por k-factor de G qualquer subgrafo parcial de k-regular de G. Os arcos de um ciclo hamiltoniano são, assim, os arcos de um 2-factor de G. Para o grafo seguinte indique um 2-factor que não tenha apenas os arcos de um ciclo hamiltoniano:



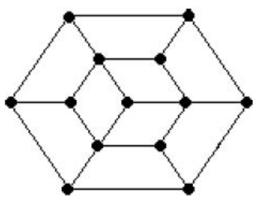
6. Justifique as afirmações:

   (a) Não existem grafos bipartidos hamiltonianos com número ímpar de vértices.

   (b) O grafo de Herschel

   e o grafo

   não são hamiltonianos.

7. Para que valores de r e s, o grafo $K_{r,s}$ é hamiltoniano?

8. Justifique que, para todo o inteiro positivo r, o grafo tripartido completo $K_{r,r,r}$ é euleriano e hamiltoniano.

9. Indique um grafo bipartido completo com $2n$ vértices que:

   (a) Seja euleriano mas não seja hamiltoniano.

   (b) Não seja euleriano mas seja hamiltoniano.

10. Justifique que:

    (a) $K_{r,2r,3r}$ é hamiltoniano, para todo o inteiro positivo r.

    (b) Não existe nenhum inteiro positivo r tal que $K_{r,2r,3r+1}$ seja hamiltoniano.

11. Utilizando apenas grafos tripartidos completos, indique grafos dos seguintes tipos:

    (a) Eulerianos e hamiltonianos.

    (b) Eulerianos e não hamiltonianos.

    (c) Não eulerianos e hamiltonianos.

    (d) Não eulerianos e não hamiltonianos.

12. Seja G um grafo simples em que todo o vértice é extremidade de uma cadeia hamiltoniana aberta. Justifique que se G não é hamiltoniano, então cada vértice de G é adjacente a, no máximo, dois vértices com grau dois.

13. Seja G um grafo simples, com n vértices, não hamiltoniano e tal que, para quaisquer vértices x e y, distintos e não adjacentes, o grafo $G + \{x, y\}$ é hamiltoniano. Mostre que:

    (a) G é conexo.

    (b) Se x e y são dois vértices distintos e não adjacentes então são vértices consecutivos de qualquer ciclo hamiltoniano de $G + \{x, y\}$.

    (c) Se x é um vértice de grau 1 de G então $G - x$ é isomorfo a K_{n-1}.

14. Justifique as afirmações:

    (a) Se um digrafo tem um circuito hamiltoniano então é fortemente conexo.

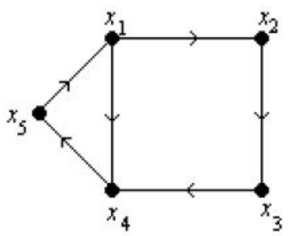
    (b) A implicação recíproca de (a) é falsa.

15. Quais os grafos que admitem circuitos eulerianos que são simultaneamente circuitos hamiltonianos?

16. Seja $G = (X, U)$ um digrafo com n vértices, tal que $d^+(x) \geq \frac{n}{2}$ e $d^-(x) \geq \frac{n}{2}$, para qualquer $x \in X$. Mostre que G é fortemente conexo.

2.6 Matrizes e grafos

1. Considere o digrafo G:



   Indique a matriz de adjacências de G em relação à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e em relação à marcação $(x_5, x_3, x_2, x_1, x_4)$ dos seus vértices.

2. Como determinar o valor do grau de um vértice de um grafo G, a partir da matriz de adjacências, se:

    (a) G é um grafo simples?

    (b) G é um digrafo?

3. Indique dois grafos simples, com n vértices não isomorfos que tenham a propriedade da matriz de adjacências não depender da marcação de vértices considerada. Indique, para cada um, a correspondente matriz de adjacências.

4. Um digrafo $G = (X, U)$ diz-se simétrico se, para quaisquer $x, y \in X$, $(x, y) \in U$ se e só se $(y, x) \in U$. O que pode afirmar sobre a matriz de adjacências de um digrafo simétrico?

5. Seja G um grafo simples, com matriz de adjacências $A(G)$. Como obter, a partir de $A(G)$, a matriz de adjacências do seu grafo complementar $\overline{G}$?

6. O converso de um digrafo $G = (X, U)$ é o digrafo $\widetilde{G} = (X, \widetilde{U})$ em que, para quaisquer $x, y \in X$, $(x, y) \in \widetilde{U}$ se e só se $(y, x) \in U$.

   (a) Dê exemplo de um digrafo isomorfo ao seu converso.

   (b) Qual a relação entre as matrizes de adjacências de G e de $\widetilde{G}$?

7. Como obter, a partir da matriz de adjacências de um digrafo $G = (X, U)$, o número de predecessores simultâneos de dois vértices x e y?

8. Seja $G = (X, U)$ um digrafo tal que $\Gamma^+(x) = \Gamma^-(x)$, para qualquer $x \in X$. O que pode afirmar sobre a matriz de adjacências de G?

9. Seja A a matriz de adjacências de um grafo simples G, em relação a uma marcação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dos seus vértices.

   (a) Justifique que, sendo $[b_{ij}] = A^2$, se tem $b_{ii} = d_G(x_i)$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$.

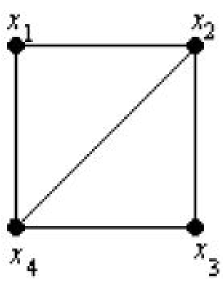
   (b) Com um exemplo, mostre que a propriedade (a) é falsa se A é a matriz das adjacências de um digrafo.

10. Sejam J_n a matriz de ordem n com todos os elementos iguais a 1 e I_n a matriz identidade de ordem n. Mostre que uma matriz booleana A, de ordem n, é a matriz de adjacências de um torneio com n vértices se e só se $A + A^T = J_n - I_n$.

11. Seja G um grafo simples em que todo o arco tem uma extremidade num vértice de grau ímpar e a outra extremidade num vértice de grau par. Justifique que existe uma marcação dos vértices de G em relação a qual a matriz de adjacências de G tem a forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Considere o grafo



   (a) Determine a matriz A de adjacências de G em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4).

   (b) Indique A^2 e A^3, sem efectuar multiplicação de matrizes.

13. Considere o grafo $K_{r,s}$ com as classes de vértices $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$.

    (a) Determine a matriz A das adjacências de $K_{r,s}$ em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$.

    (b) Indique A^2 e A^3, sem efectuar multiplicação de matrizes.

14. Seja G um digrafo cuja matriz das adjacências em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4) dos seus vértices é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    Justificando apenas com propriedades de matrizes, indique:

    (a) A sequência de graus exteriores de G;

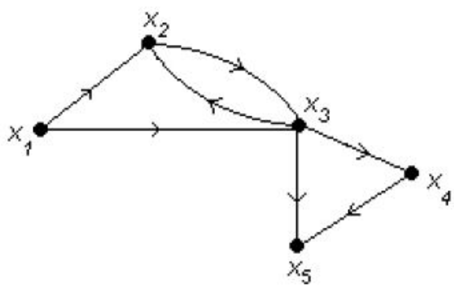
    (b) Se G tem vértices isolados;

    (c) Se G admite como subgrafo um torneio com 3 vértices;

    (d) Se existem caminhos $x_1 - x_4$;

    (e) Se existem sucessores simultâneos de x_1 e x_2.

15. Considere o digrafo



    Indique, em relação à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dos seus vértices:

    (a) A matriz de adjacências de G.

    (b) A matriz de distâncias de G.

16. Seja A a matriz de adjacências de um digrafo G, em relação a uma marcação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dos seus vértices. Indique como determinar a partir da matriz A, ou das suas potências, se:

    (a) G tem fontes/poços;

    (b) G é fortemente conexo;

    (c) G tem circuitos eulerianos;

    (d) G tem caminhos eulerianos abertos.

17. Indique uma condição suficiente, em termos de matrizes, para que um digrafo G não tenha:

    (a) Circuitos hamiltonianos;

    (b) Caminhos hamiltonianos abertos.

18. Sem efectuar multiplicação de matrizes justifique que, para todo o inteiro $n \geq 2$, existe um digrafo G, com n vértices, cuja matriz de adjacências A satisfaz a propriedade: $A^k \neq 0$, para todo o inteiro positivo k.