

Proposição: $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$, $\forall u \in X$

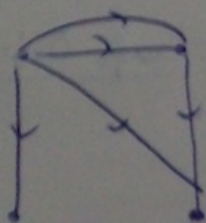
TAM (Teorema do Aperto de Mão):

seja $G = (\{u_1, \dots, u_n\}, E)$ um grafo e $|E| = m$. Então:

i) $\sum_{i=1}^n d(u_i) = 2m$

↳ Grafo com m arestas
e n vértices.

ii) $\sum_{i=1}^n d^+(u_i) = m = \sum_{i=1}^n d^-(u_i)$



Multigrafo orientado

↓
pode ter
laços



Grafo em que há repetição de arestas

Multigrafo

→ não tem laços

✓ ⑤ Quantos vértices tem um grafo simples G com:

✓ a) 12 arestas e com todos os vértices de grau 2

Pelo TAM temos:

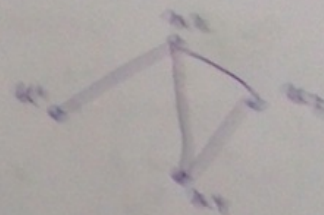
$$\sum_{i=1}^n d(u_i) = 2m \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 2 = 2 \times 12 \Leftrightarrow 2n = 24 \Leftrightarrow n = 12$$

$\underbrace{2+2+\dots+2}_{n \text{ vezes}}$

3.2 CONEXIDADE

Recondan ①:

ex ①:



Graph

L1: $u_1, \{u_1, u_2\}, u_2, \{u_2, u_3\}, u_3$

cadeia fechada

comprimento 2 (nº de arestas)

não é simples

elementar (não há repetição de vértices a não ser, eventualmente, os vértices terminais que podem ser iguais entre si)

L2: $u_1, \{u_1, u_2\}, u_2, \{u_2, u_3\}, u_3, \{u_3, u_4\}, u_4, \{u_4, u_1\}, u_1$

ciclo

- cadeia elementar
- simplex (não há repetição de arestas)
- comprimento 3
- fechada (começa e termina no mesmo vértice)

ex ②:

L3: $u_1, (u_1, u_2), u_2$

caminho

comprimento 1

simplex

elementar

fechado

L6: $u_1, (u_1, u_2), u_2, (u_2, u_3), u_3, (u_3, u_4), u_4, (u_4, u_1), u_1$

cadeia

simplex

fechado

ciclo

L4: $u_1, (u_1, u_2), u_2, (u_2, u_3), u_3$

cadeia

comprimento 2

simplex

elementar

aberto

L7: $u_1, (u_1, u_2), u_2, (u_2, u_3), u_3, (u_3, u_4), u_4, (u_4, u_1), u_1$

caminho

ciclo

circuito

(ciclo não caminho)

L5: $u_1, (u_1, u_2), u_2, (u_2, u_3), u_3, (u_3, u_4), u_4$

cadeia caminho (cadeia que segue as arestas)

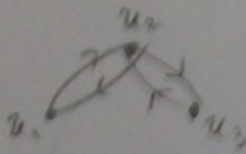
comprimento 2

simplex, elementar, aberto

(24) Indique um digrafo fortemente conexo que não seja fortemente conexo.

não há
a ligá-los

Grafo orientado
s/ laços



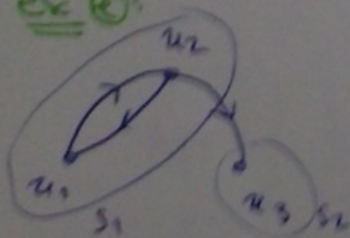
Recordar (3):

Definição: Grafo fortemente conexo

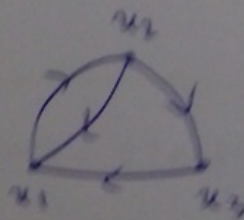
$\forall u, v \in V \exists$ caminho $u \rightarrow v$

$\wedge \exists$ caminho $v \rightarrow u$

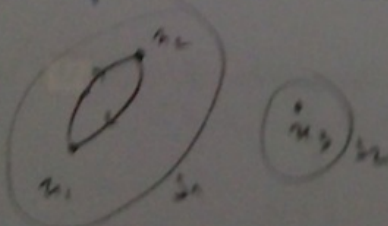
Ex (1):



Grafo conexo
não fortemente conexo

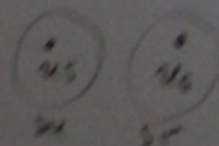
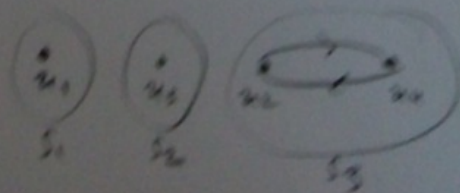
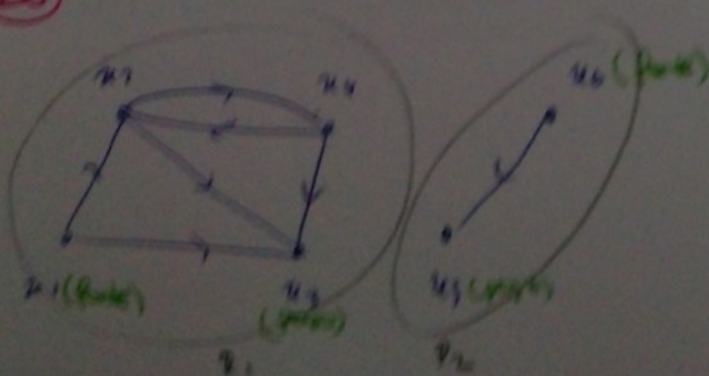


(Grafo conexo)
fortemente conexo



S_1 e S_2 são as componentes
fortemente conexas

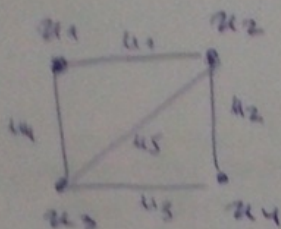
(26)



componentes fortemente
conexas

7.45

(8)



G

$$B(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

• todas as colunas têm duas entradas não nulas

→ no caso do grafo simples: todas a 1

→ no caso do digrafo: uma e' 1, a outro e' -1

(9) G simples

$$A = BB^T - D$$

A: matriz de adjacências

B: matriz de incidência

D diagonal e $d_{ii} = d_G(u_i)$ ← grau

$$B = [b_{ij}] \quad B^T = [b^T_{ij}] = [b_{ji}]$$

$$BB^T = [p_{ij}]$$

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^3 b_{ik} \cdot b^T_{kj} =$$

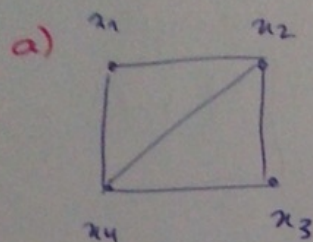
$$= \sum_{k=1}^3 b_{ik} \times b_{jk}$$

$$\begin{matrix} & & & & j \\ & & & & \downarrow \\ \text{linha } i & \left[\text{---} \right] & \left[\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \right] & = i & \left[\text{---} \right] \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & u_1 & \dots & u_k & \dots & u_m \\ \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} & \left[\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right] & & \left[\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right] & & \left[\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

$$u_i \xrightarrow{u_k} u_j \quad c \neq j$$

12) Considere o grafo simples



A = matriz de adjacências para o marcado (u_1, u_2, u_3, u_4)

$$=_{\text{def}} \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

↑ simétrica ↑ simétrica

b) Sem multiplicar matrizes determine A^2 e A^3 .

A^2_{11} = nº de cadeias de $u_1 - u_1$ de comprimento 2

$u_1, \{u_1, u_2\}, u_2, \{u_1, u_2\}, u_1$

$u_1, \{u_1, u_4\}, u_4, \{u_1, u_4\}, u_1$

A^2_{12} = nº de cadeias de $u_1 - u_2$ de comprimento 2

$u_1, \{u_1, u_4\}, u_4, \{u_2, u_4\}, u_2$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Grau dos vértices}$$

$$A^2_{ii} = d(u_i)$$

$$R = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

diagonal sempre 1's (consideramos a cadeia nula)

simétrica

Grafo conexo $\Rightarrow R$ tudo a 1's

Capítulo 3: Grafos e Aplicações

Reconstrua (A):

$$(A) \quad G_1 = (\underbrace{\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}}_X, \underbrace{\{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_1, u_4), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_4)\}}_U)$$

Ordem de $G_1 := n^{\circ}$ de vértices $= |X| = 5$

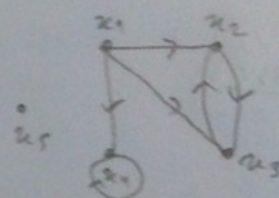
Tamanho de $G_1 := n^{\circ}$ de arestas $= |U| = 6$

(u_4, u_4) é um laço ou lacete

u_1 é uma fonte

u_5 é um vértice isolado

G não tem pesos



Grafo Orientado

Grau (ou ordem) de um vértice $:= n^{\circ}$ de arestas incidentes no vértice
 $:= d(x)$

$d(u_1) = 3$	$\equiv$	$d^+(u_1) = 3$	$\oplus$	$d^-(u_1) = 0$
$d(u_2) = 3$	$\equiv$	$d^+(u_2) = 1$	$\oplus$	$d^-(u_2) = 2$
$d(u_3) = 3$	$\equiv$	$d^+(u_3) = 1$	$\oplus$	$d^-(u_3) = 2$
$d(u_4) = 3$	$\equiv$	$d^+(u_4) = 1$	$\oplus$	$d^-(u_4) = 2$
$d(u_5) = 0$	$\equiv$	$d^+(u_5) = 0$	$\oplus$	$d^-(u_5) = 0$

Grau exterior $:= n^{\circ}$
de arestas que saem
do vértice

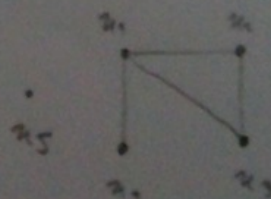
Grau interior $:= n^{\circ}$
de arestas que chegam
ao vértice

$$(B) \quad G_2 = (\underbrace{\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}}_X, \underbrace{\{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_1, u_4), (u_2, u_3)\}}_U)$$

G_2 é o grafo subjacente (ou induzido) a G_1

Ordem de $G_2 := 5$

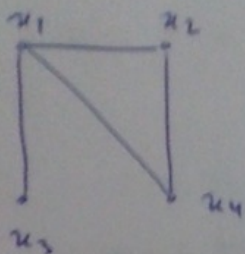
Tamanho de $G_2 := 4$



Grafo Simples

Recordar (3):

Ex 1:



$$\begin{aligned} d(u_1) &= 3 \\ d(u_2) &= 2 \\ d(u_3) &= 1 \\ d(u_4) &= 2 \\ d(u_5) &= 0 \end{aligned}$$

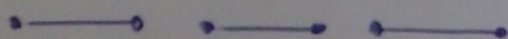
$$(3, 2, 2, 1, 0)$$

sequência gráfica



sequência decrescente dos graus de um grafo simples

Ex 2: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ é sequência gráfica do grafo simples:

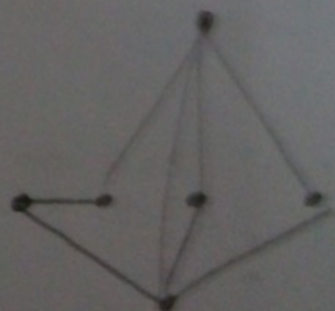
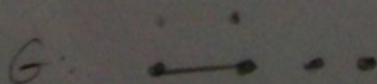


Ex 3: $(2, 0, 0)$ não é sequência gráfica de nenhum grafo simples pois um dos vértices teria grau 2; logo estaria ligado aos outros dois e assim estes não teriam grau 0.

Ex 4: $(4, 4, 2, 2, 2, 2)$ (*)

Proposição: $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ sequência gráfica $\Leftrightarrow$
 $(\underbrace{d_2-1, \dots, d_{d_1+1}-1}_{d_1 \text{ elementos}}, \dots, d_n)$ sequência gráfica

(*) $(4, 4, 2, 2, 2, 2)$ sequência gráfica
 $\Downarrow$ Prop
 $3, 1, 1, 1, 2$
 $(3, 2, 1, 1, 1)$ sequência gráfica
 $\Downarrow$ Prop
 $1, 0, 0, 1$
 $(1, 1, 0, 0)$ seq. gráfica pois



✓ 15) $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$ sequência gráfica? Não

Teo $(4, 4, 4, 2, 2)$ é seq. gráfica?

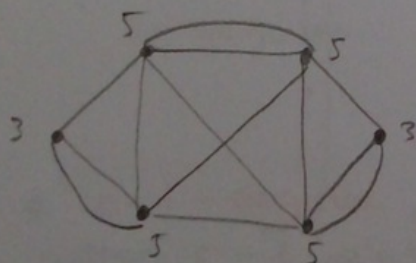
Teo $(3, 3, 1, 1)$ é seq. gráfica?

Teo $(2, 0, 0)$ é seq. gráfica? Não

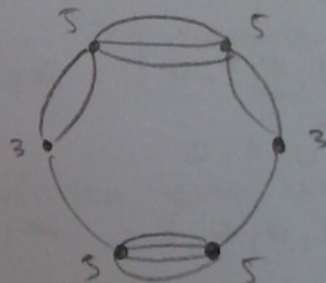
seq. de graus de um grafo simples

Pois teríamos um grafo com 3 vértices em que um deles tem grau 2 logo está ligado aos outros 2 vértices e assim estes não têm grau 0.

$(5, 5, 5, 5, 3, 3)$ é sequência de graus de um multigrafo? Sim



$\cong$



16

✓ a) $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1^3)$ é sequência gráfica? Não

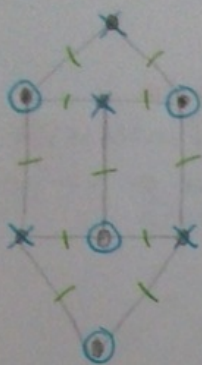
$(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1)$

Teo $(5, 4, 3, 2, 1, 1, 0, 0)$

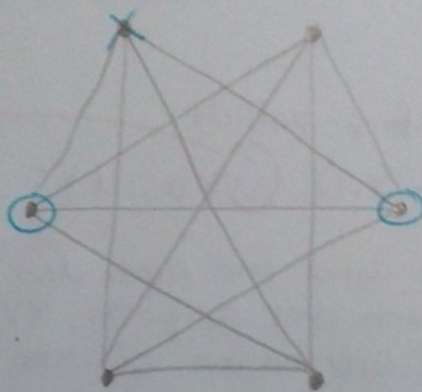
Teo $(3, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$ é seq. gráfica? Não

Pois teríamos um vértice de grau 7, logo ligado a outros 7 vértices e assim estes teriam grau ≥ 1 e só há 2 vértices nessa condição.

✓ 40 São bipartidos?



É bipartido.



Não é bipartido.

Os grafos que têm um polígono com um nº ímpar de lados (arcs) não são bipartidos.

Recordar (+):

Definição: $G_1 = (X_1, U_1)$ e $G_2 = (X_2, U_2)$ são isomorfos $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \varphi: X_1 \rightarrow X_2$ bijeção (só há 1 bijeção)

$\{u_i, u_j\} \in U_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u_i), \varphi(u_j)\} \in U_2$

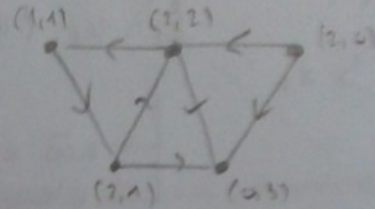
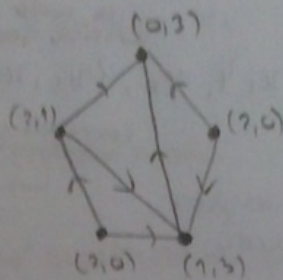
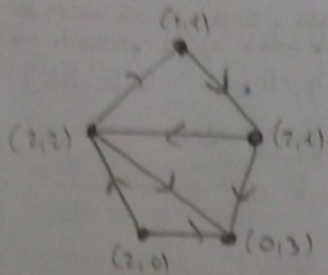
Proposição: G_1 e G_2 isomorfos $\Rightarrow$ têm a msm sequência de graus

- têm de ter o msm nº de vértices e o msm nº de arcos

Condição: Não tem a mesma sequência de graus $\Rightarrow$ não são isomorfos

(30)

a) Quais são isomorfos?



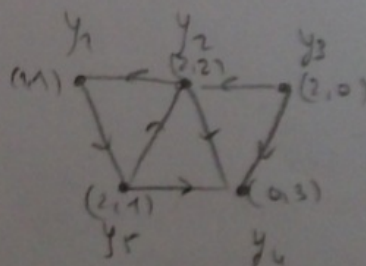
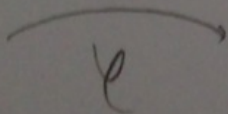
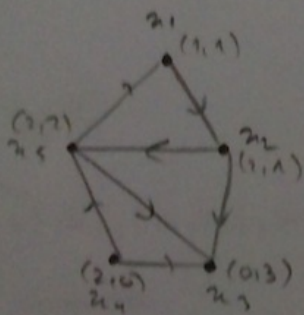
(+, -)
↓
gra
erva
gra
intia

$$+ (1, 2, 2, 1, 0) + (2, 2, 2, 1, 0) \\ - (3, 2, 1, 1, 0) \neq - (3, 3, 1, 0, 0)$$

G_1 e G_2
não são isomorfos

$$+ (1, 2, 2, 1, 0) \\ - (3, 2, 1, 1, 0)$$

G_3 pode ser isomorfo
a G_1



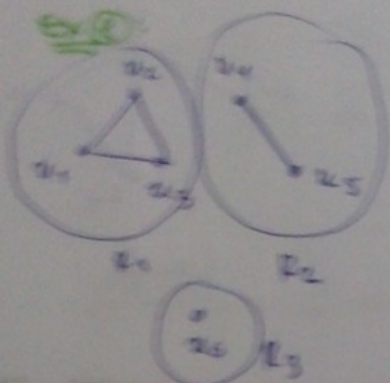
$$\varphi: \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \longrightarrow \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$$

$$\begin{cases} \varphi(u_1) = y_1 & (\text{pois } u_1 (1,1) \text{ e } y_1 (1,1)) \\ \varphi(u_2) = y_5 \\ \varphi(u_3) = y_4 & \text{e' bijeção} \\ \varphi(u_4) = y_3 \\ \varphi(u_5) = y_2 \end{cases}$$

Assim:

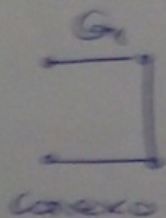
$$(u_5, u_1) \in U_1 \Leftrightarrow (\varphi(u_5), \varphi(u_1)) = (y_2, y_1) \in U_2 \\ (\dots)$$

Definição: Grafo conexo de V, E e X $\exists$ cadeia que começa em x e termina em y
 $x-y$



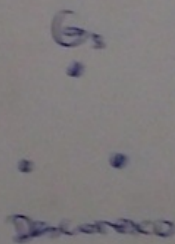
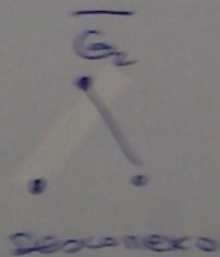
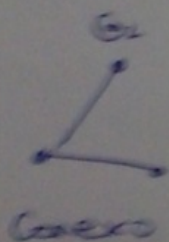
• G não é conexo: $\nexists u_2 - u_4$
 e tem três componentes conexos R_1, R_2, R_3

Ex 2

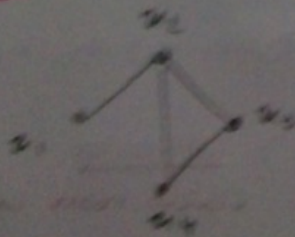


$\rightarrow$ Grafo complementar

• Não pode acontecer ambos desconexos



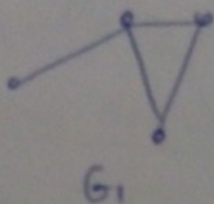
1



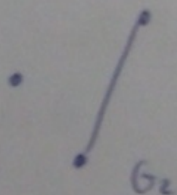
3.3 Árvores

Revisão ①:

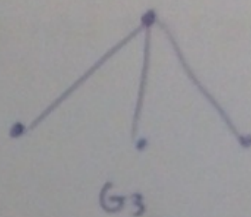
Ex ①:



G_1
Não é árvore
(tem 1 ciclo)



G_2
Não é árvore
(não é conexo)



G_3
Árvore
↓
Grafo conexo
sem ciclos

Proposição ①: Num árvore, o nº de arestas = nº de vértices - 1
 $m = n - 1$.

TAM:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2(n-1)$$

✓ ① Existe alguma árvore cuja sequência de graus seja
(3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)? **NÃO**

$$n = 8$$

Árvore

$$m = n - 1 = 8 - 1 = 7$$

⇒ TAM $3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 2 \times 7$
16 14

(F)

- ✓ ② Os graus das vértices de uma árvore T são $5, 4, 3, 2, 1, \dots, 1$.
 Determine o número de T ,
 $\downarrow$
 nº de vértices = n

$$\begin{aligned} \text{TAM} &\Rightarrow 5 + 4 + 3 + 2 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-4} = 2(n-1) \quad (\text{se } 14 \in \text{Ard} \Rightarrow 2(n-1) \text{ (se) } \\ \text{árvore} &\quad \text{Ard} \\ &\Leftrightarrow 14 + n = 2n - 2 \Rightarrow 12 = n \end{aligned}$$

- ✓ ④ Uma árvore T tem n vértices de grau 1 e as restantes vértices têm grau 4 ou 5. (Ho' pelo menos 1 vértice de grau 4 e um de grau 5).

a) Quantos vértices tem grau 4?

$$\text{TAM} \Rightarrow \underbrace{1 + \dots + 1}_{14} + \underbrace{4 + \dots + 4}_2 + \underbrace{5 + \dots + 5}_p = 2(n-1)$$

árvore

$$\Leftrightarrow 14 + 4x + 5p = 2n - 2 \Leftrightarrow 14 + 4x + 5p = 2(14 + x + p) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 + 4x + 5p = 28 + 2x + 2p - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3p = 12$$

Ho' pelo menos
 1 vértice de grau 4
 e 1 vértice de grau 5

O nº de vértices
 de grau ímpar
 é par

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow p = 2 \\ \parallel \\ 2 = 3 \end{array} \right\}$$

b) Qual o número de ramos de T ? $\frac{14 + 3 + 2 - 1}{2} = 18$
 nº de arestas = $n - 1$

→ Matriz de adjacências: A (caminhos de comprimento 1)

→ Matriz de alcançabilidade: R ($R_{ij} = 1$ qd. existe um caminho de u_i para u_j)

p. 44

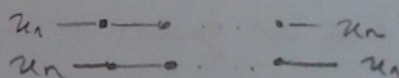
✓ (2) $G = (X, U)$ simples, conexo, n vértices

Matriz das distâncias de G

$D = [d_{ij}]_{n \times n}$ onde d_{ij} é igual à distância do vértice u_i ao vértice u_j

[O menor comprimento das cadeias $u_i - u_j$]

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & \dots & u_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \end{matrix}$$



D é simétrica, ou seja, $d_{ij} = d_{ji}$

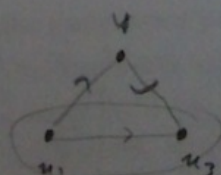
✓ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

sem pontas

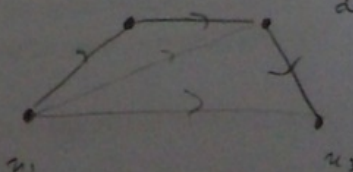
a matriz de alcançabilidade de G dignafo:

$$(x, y) \in U \wedge (y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U \quad \textcircled{A}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

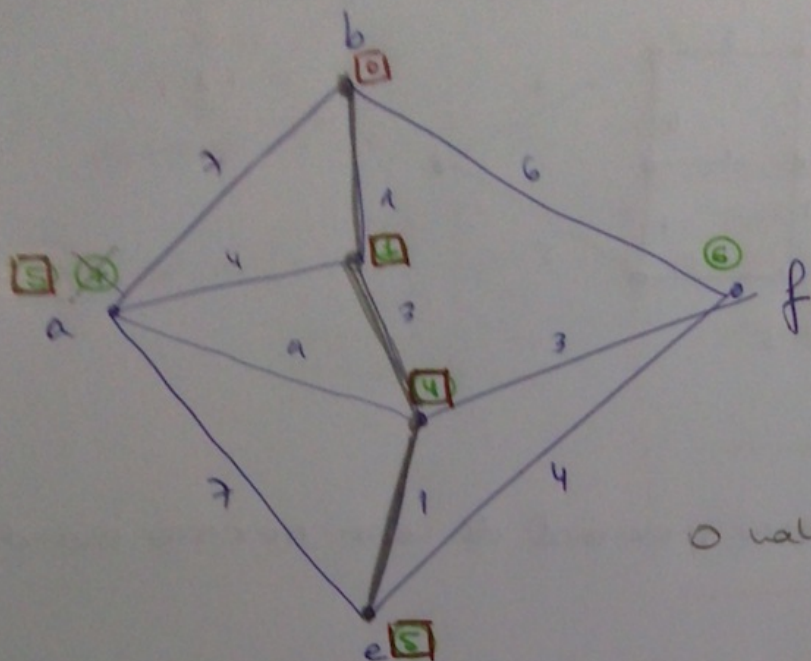


usando o resultado $\textcircled{A}$ conseguimos sempre obter um caminho de comprimento 1



- Não é fortemente conexo (R tirado de seu todo 1's)
- É conexo (há 1 ponto que está ligado a todos)

b) Determine uma cadeia b-e mínima e indique o seu valor



O valor da cadeia é 5.

TDC ex (37)

a) > 16

b) > 16

c) 12

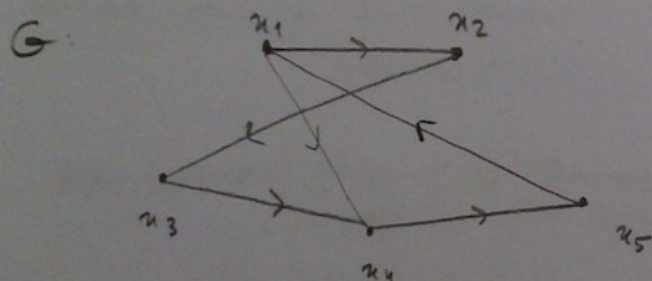


A' = matriz de adjacências para o grafo $(u_5, u_3, u_2, u_1, u_4)$

$$= \begin{matrix} & u_5 & u_3 & u_2 & u_1 & u_4 \\ \text{def} \begin{matrix} u_5 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Como obter A' a partir de A :

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \xrightarrow[\text{troca linha}]{\text{troca coluna}} \begin{matrix} & u_5 & u_3 & u_2 & u_1 & u_4 \\ \begin{matrix} u_5 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{troca coluna}} A'$$



Isomorfismo ao grafo onde partimos

Num grafo simples:

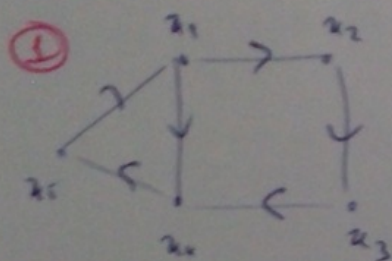
Cada arco contribui para um 1 na posição ij e outro na posição ji da matriz.

A matriz de adjacências de um grafo simples é simétrica e o n° de 1's corresponde ao dobro do número de arcos.

A soma da linha u de coluna e' : $d(u)$

Seja $G=(X, U)$ um digrafo. Chama-se **matriz de alcançabilidade** de G em relação à marcação usual $(u_1, \dots, u_n)$ dos seus vértices, a matriz $R(G)=[r_{ij}]$ de ordem $n=|X|$ tal que:

$$\begin{cases} 1 & \text{se existe em } G \text{ um caminho } u_i \rightarrow u_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \text{Grafo fortemente conexo}$$

Matriz Booleana Associada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz booleana associada a } A$$

✓b) 15 areos, 3 vértices de grau 4 e todos os outros de grau 3

Pelo TAM temos:

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2m \Leftrightarrow \underbrace{4+4+4}_{\times 3} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{\times (n-3)} = 2 \times 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 + 3(n-3) = 30 \Leftrightarrow 3n = 27 \Leftrightarrow n = 9$$

✓c) justifique que não existe nenhum grafo simples com 12 vértices, 28 areos e em que o grau de cada vértice é 3 ou 4.

① $n = 12, m = 28$

$$\underbrace{4+\dots+4}_{\times k} + \underbrace{3+\dots+3}_{\times (12-k)} = 2 \times 28 = 56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k + 3(12-k) = 56 \Leftrightarrow 4k + 36 - 3k = 56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 56 - 36 \Leftrightarrow k = 20 \quad \text{impossível pois só há 12 vértices}$$

logo não pode haver 20 vértices de grau 4.

ou

② $12 \times 3 \leq 2m \leq 12 \times 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 36 \leq 56 \leq 48 \quad \text{impossível}$$

① Seja $G = (X, U)$ um multigrafo com n vértices e com m grafos (ou seja, ordem n e tamanho m). Sejam $A = \min_{x \in X} d(x)$ e $B = \max_{x \in X} d(x)$. Prove que $A \leq \frac{2m}{n} \leq B$.

$$A \leq d(x) \leq B, \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow nA \leq \sum_{x \in X} d(x) \leq nB \quad \Rightarrow \quad \text{TAM} \quad \Rightarrow \quad nA \leq 2m \leq nB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{2m}{n} \leq B$$

Recordar ②:

Corolário TAM: Num grafo, o nº de vértices de grau ímpar é par.

Obs: u é par $\Leftrightarrow \exists k \quad u = 2k$
 u é ímpar $\Leftrightarrow \exists k \quad u = 2k + 1$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^m d(u_i) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) = 2m$$

- X_1 é o conjunto dos vértices de grau ímpar, ou seja, $d(x) = 2k + 1$
- X_2 é o conjunto dos vértices de grau par, ou seja, $d(x) = 2k$

$$\left. \begin{array}{l} 2m \text{ é par} \\ \sum_{x \in X_2} d(x) \text{ é par} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |X_1| \text{ tem de ser um nº par} \Rightarrow \\ d(x) \text{ ímpar} \Rightarrow \sum_{x \in X_1} d(x) \text{ é par} \end{array}$$

ex 10: (5, 4, 4, 3, 3) pode ser a sequência dos graus dos vértices de um grafo?

- Não pois temos 3 vértices de grau ímpar e 3 não é um número par (Corolário)

ou

- Não pois (por TAM) $5 + 4 + 4 + 3 + 3 = 19 \neq 2 \times m$

7) Indicando primeiro uma formulação em termos de grafos, responda às seguintes questões:

- ✓ a) O número de pessoas que, numa festa, não conhecem um número ímpar das outras pessoas é sempre um número par? sim.

Consideremos o grafo cujos vértices são as pessoas da festa e existe um arco entre as duas pessoas se elas não se conhecem.

Então, pelo Corolário, o nº de vértices de grau ímpar é par, ou seja, o nº de pessoas com um nº ímpar de arcos, a saber, o nº de pessoas que não conhece um nº ímpar das outras é par.

b)

8) Determine se existem valores de k para os quais a sequência seja gráfica.

/a) $(5, 4, 4, 3, k, 1, 1)$

2ª ordemada

$k \in \{1, 2, 3\}$

condição: O n.º de vértices de grau ímpar é um número par

$k=2$

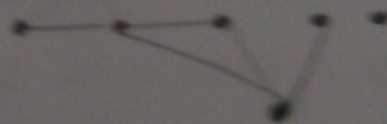
com $k=2$ temos:

- ① $(5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ seq. gráfica?
 $5, 3, 2, 1, 0, 1$
- ② $(3, 3, 2, 1, 1, 0)$ seq. gráfica?
 $2, 1, 0, 1, 0$
- ③ $(2, 1, 1, 0, 0)$ seq. gráfica?

Este grafo tem seq. $(2, 1, 1, 0, 0)$



Este grafo tem seq. de grau $(3, 3, 2, 1, 1, 0)$



Este grafo tem seq. de grau $(5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$



Revisão ③:

N_3

• • •

regular de grau 0
(todas as vértices têm grau 0)

L_3 grafo nulo com 3 vértices

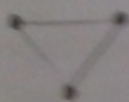
K_2



1-regular

L_2 grafo completo com 2 vértices

K_3



2-regular

K_4



3-regular

- K_n é $n-1$ -regular pois cada vértice está ligado aos outros $n-1$ vértices



$$\forall x \in V \quad d(x) = n-1$$

2ª) Seja G um grafo R -regular, com n vértices e m arestas.

✓ a) Expresse m em função de n e R .

$$\text{TAM} \Rightarrow \sum_{i=1}^n d(u_i) = 2m \Leftrightarrow nR = 2m \Leftrightarrow m = \frac{nR}{2}$$

✓ b) $E \subseteq G = K_n$?

$$m = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ porque } K_n \text{ é } n-1\text{-regular}$$

Recordar 6:

Definição: Grafo p -partido

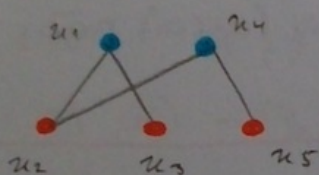
$$\text{se } G = (X = X_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} X_p, U)$$

União disjunta

não há interseção
entre os conjuntos

e qualquer arco tem uma das extremidades num dos conjuntos X_i e a outra extremidade noutro conjunto X_j com $i \neq j$.

Ex 1: G_1 é 2-partido (ou bi-partido)



$$X = \{u_1, u_4\} \dot{\cup} \{u_2, u_3, u_5\}$$

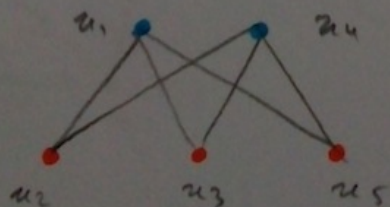
$$\{u_1, u_2\}$$

$$\{u_1, u_3\}$$

$$\{u_4, u_3\}$$

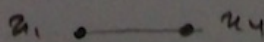
$$\{u_4, u_5\}$$

Ex 2: $K_{2,3}$ (bi-partido completo)

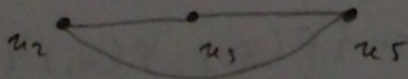


$$K_{2,3}$$
$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ |X_1| & |X_2| \end{matrix}$$

$\overline{K_{2,3}}$



↓
grafo complementar
de $K_{2,3}$

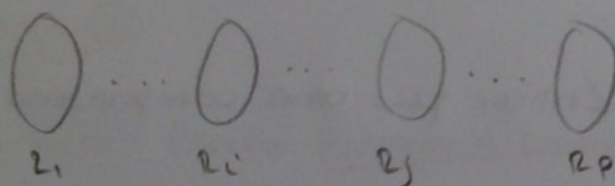


✓ ⑥ [Proposição: Um grafo e o seu complementar não podem ser simultaneamente desconexos.]

ou seja G desconexo $\Rightarrow \bar{G}$ conexo

$\bar{G}$ desconexo $\Rightarrow \bar{\bar{G}} = G$ conexo

• G desconexo $\Rightarrow \exists p > 1$ componentes conexas



• Queremos provar que $\bar{G}$ conexo, ou seja, $\forall x, y \in X \exists u-y$ em $\bar{G}$.

Sejam $x, y \in X$:

① $x \in R_i$ e $y \in R_j \Rightarrow \nexists \{x, y\}$ em $G \stackrel{\text{def } \bar{G}}{\Rightarrow} \exists \{x, y\}$ em $\bar{G} \Rightarrow \exists \underbrace{x, \{x, y\}, y}_{u-y}$ em $\bar{G}$

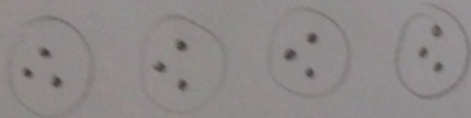
② $x, y \in R_i \stackrel{p > 1}{\Rightarrow} \exists z \in X \ z \in R_j \ (i \neq j) \Rightarrow \{x, z\}, \{z, y\} \notin G \Rightarrow$

$\stackrel{\text{def } \bar{G}}{\Rightarrow} \{x, z\}, \{z, y\} \in \bar{G} \Rightarrow \exists \underbrace{x, \{x, z\}, z, \{z, y\}, y}_{u-y}$ em $\bar{G}$

15) Seja G um grafo com 15 vértices e 4 componentes conexas.

a) Justifique que G tem pelo menos uma componente conexa com 4 ou mais vértices.

O caso menos favorável (em que não há componentes conexas e tem poucas vértices por isto aumenta o nº de vértices nas outras) é quando distribuímos equitativamente os vértices pelas 4 componentes conexas.



$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 3} \\ \underline{3} \end{array}$$

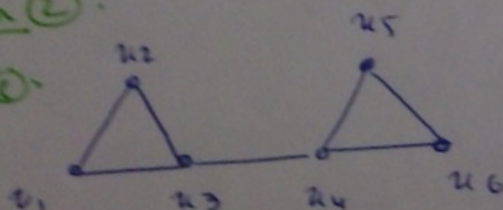
Assim ficamos com 3 vértices em cada uma e 3 vértices por distribuição pelas 4 componentes. ok

b) Qual o nº máximo de vértices que uma componente conexa de G pode ter? 12

$$\begin{array}{l} \text{ok} \quad R_1 \rightarrow 3+3 \\ R_2 \rightarrow 3 \\ R_3 \rightarrow 3 \\ R_4 \rightarrow 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} R_1 \rightarrow 3+2 \\ R_2 \rightarrow 3+1 \\ R_3 \rightarrow 3 \\ R_4 \rightarrow 3 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} R_1 \rightarrow 3+1 \\ R_2 \rightarrow 3+1 \\ R_3 \rightarrow 3+1 \\ R_4 \rightarrow 3 \end{array} \right|$$

Recordar (2):

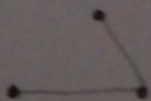
Ex (2):



ponte $\rightarrow \{u_3, u_4\}$

✓ 19) Indique um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices tal que

a) Todo o arco é uma ponte



b) Nenhum arco é uma ponte



Teorema:

G conexo $\Leftrightarrow G$ contém uma árvore maximal



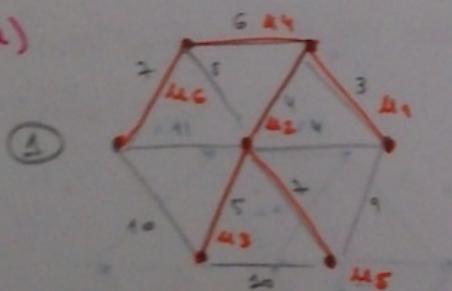
árvore que é designado parcial de G



árvore que contém todos os vértices de G

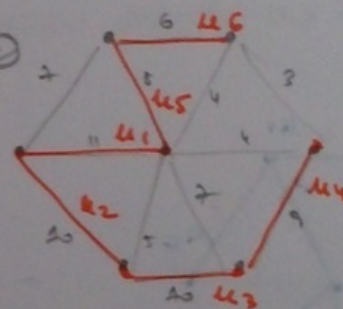
(é uma árvore que contém os n vértices de G e os $n-1$ arcos de G)

30 a)



Kruskal
(árvore maximal de valor mínimo)

2



Kruskal
(árvore maximal de valor máximo)

$$V(G) = 7 + 11 + 10 + 5 + 10 + 7 + 9 + 4 + 3 + 4 + 8 + 6$$

$$\textcircled{1} V(A_m) = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 7 = 32$$

$$\textcircled{2} V(A_m) = 11 + 10 + 10 + 9 + 8 + 6 = 54$$

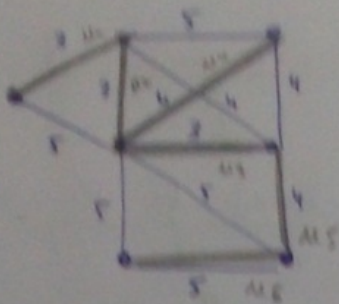
G : Grafo conexo com ciclos (logo não é uma árvore)

$n=7$ vértices



árvore maximal tem 7 vértices e 6 arcos

✓ 29) Construa o grafo

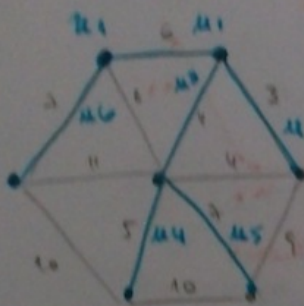


a) Determine uma árvore maximal de valor mínimo usando KRUSKAL.

b) Indique o valor da árvore obtida na linha anterior.

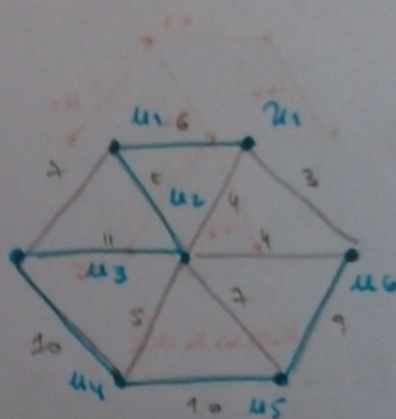
$$V(A_m) = 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 22$$

30)



PRIM

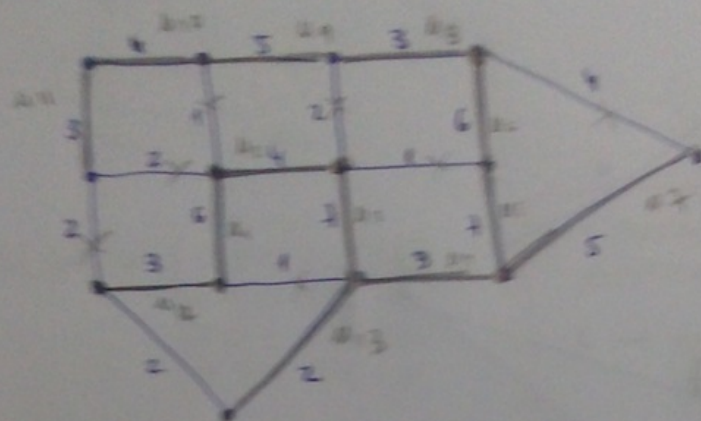
(árvore maximal de
valor mínimo)



PRIM

(árvore maximal de
valor máximo)

✓ 33) Considere o grafo

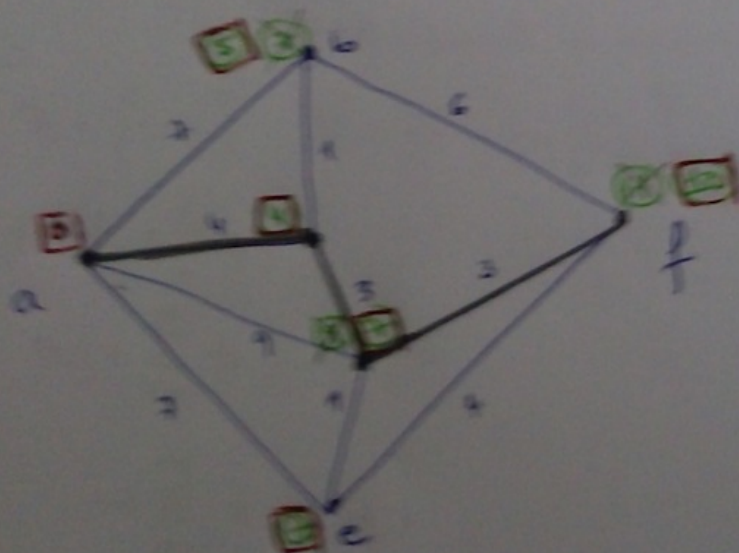


a) Determine uma árvore maximal do valor máximo usando Prim .

b) Indique o valor da árvore obtida no passo anterior.

$$V(A_M) = 58$$

✓ 35)



a) Aplique o algoritmo para justificar que o valor de uma árvore a-f mínima é 10.

30) G grafo. B matriz de incidências.
 $C/n \geq 2$ vértices,
conexo

linhas a jama

$$\begin{matrix} u_1 & u_j & u_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_L \\ x_k \\ x_p \\ x_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ - & 1 & -1 \\ & 0 & \\ - & 1 & -1 \\ & 0 & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\sum_{i=1}^k L_i$ tem pelo menos um elemento não nulo

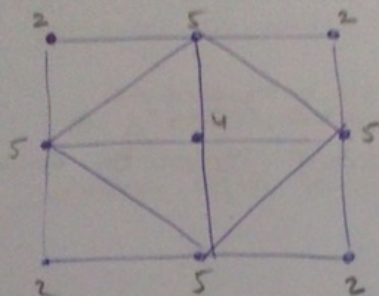
$\downarrow$

$$(\dots, 1, \dots)$$

posição j ($1 \leq j \leq n$)

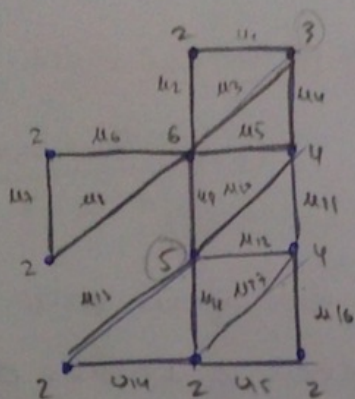
$$\begin{matrix} u_1 & & u_{k+1} \\ x_L & \xrightarrow{u_j} & x_p \\ u_k & & u_n \end{matrix} \rightarrow \text{pois } G \text{ conexo}$$

✓ b)



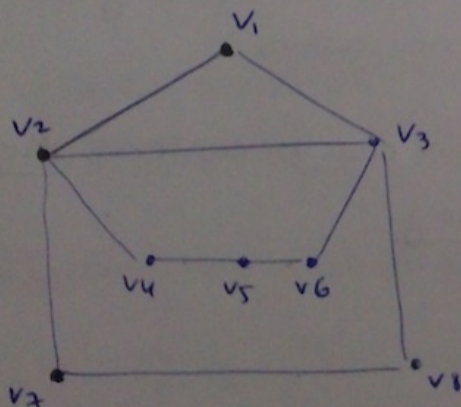
G é conexo pois $\forall u, v \in X \exists u-v$. G tem vértices de grau ímpar, logo não é euleriano e G tem mais do que 2 vértices de grau ímpar, logo também não é semi-euleriano.

✓ e)



G é conexo pois $\forall u, v \in X \exists u-v$. pelo Teo de Euler, como G tem 2 e apenas 2 vértices de grau ímpar, G é semi-euleriano.

✓
(11)



Grafo simples

Fleury:

$v_1, v_2, v_7, v_8, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2, v_3, v_1$

a) Qual a ordem e o tamanho de G ? ordem = 8; tamanho = 10
nº de vértices nº de arestas

b) Indique uma sequência de graus de G . G é regular?

$d(v_1) = 2$
 $d(v_2) = 4$
 $d(v_3) = 4$
 $d(v_4) = 2$
 $d(v_5) = 2$
 $d(v_6) = 2$
 $d(v_7) = 2$
 $d(v_8) = 2$

seq. gráfica (grafo simples)
 $\Rightarrow$ seq. de graus = $(4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2) = (4^2, 2^6)$

G não é regular

c) Mostre que G é euleriano e determine, usando Fleury, um ciclo euleriano.

G é conexo pois $\forall x, y \in X \exists x-y$ e em b) todos os vértices têm grau par $\implies G$ é euleriano

↓
Teo Euler

Matrizes e Grafos

MH DIGRAFO:

$A =$ matriz de adjacências para a marcação $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$

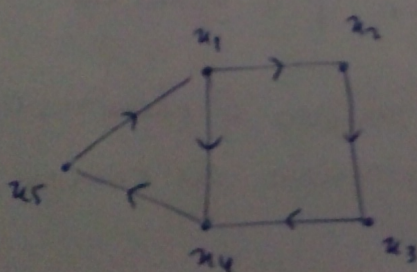
=
adj. $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_1 & & & & \\ u_2 & & & & \\ u_3 & & & & \\ u_4 & & & & \\ u_5 & & & & \end{bmatrix}$

→ cada entrada a 1 corresponde a um arco do grafo

diagonal principal sempre zero (porque não há laços)

- soma linha: $d^+(u)$
- soma coluna: $d^-(u)$

✓ ③ Considere o digrafo



$$(u_1, u_2) \implies A_{12} = 1$$

$$(u_2, u_3) \implies A_{23} = 1$$

$$(u_3, u_4) \implies A_{34} = 1$$

$$(u_4, u_1) \implies A_{41} = 1$$

$$(u_5, u_1) \implies A_{51} = 1$$

$$(u_5, u_4) \implies A_{54} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ $d^+(u_1) = 2$

$d^-(u_1) = 1$

$d(u_1) = d^+(u_1) + d^-(u_1) = 3$

Revisão 5

Definição: G digrafo (grafo orientado sem laços)

G é externamente R -regular $\Leftrightarrow \forall u \in X \quad d^+(u) = R$

G é internamente S -regular $\Leftrightarrow \forall u \in X \quad d^-(u) = S$



$$d^+(u_1) = 1$$

$$d^+(u_2) = 1$$



externamente
1-regular

$$d^-(u_1) = 1$$

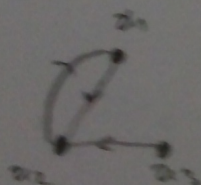
$$d^-(u_2) = 1$$



internamente
1-regular

Ex 2

Exemplo de um grafo externamente regular mas não internamente regular.



$$d^+(u_1) = 1$$

$$d^+(u_2) = 1$$

$$d^+(u_3) = 1$$



externamente
1-regular

$$d^-(u_1) = 1$$

$$d^-(u_2) = 2$$

$$d^-(u_3) = 0$$



não é internamente regular

6) Mostre que se um digrafo é externamente R -regular e internamente S -regular então $R = S$.

$$\text{TAM} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{d^+(u_i)}_R = \sum_{i=1}^n \underbrace{d^-(u_i)}_S = n$$

$$\Rightarrow nR = nS$$

$$\Rightarrow R = S$$

$$n \neq 0$$

$$d^+(u_1) = 1$$

$$d^+(u_2) = 4$$

$$d^+(u_3) = 0$$

$$d^+(u_4) = 0$$

$$d^+(u_5) = 1$$

$$d^-(u_1) = 1$$

$$d^-(u_2) = 0$$

$$d^-(u_3) = 2$$

$$d^-(u_4) = 2$$

$$d^-(u_5) = 1$$

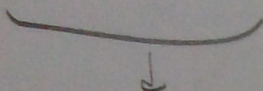
$$d(u_1) = 2$$

$$d(u_2) = 4$$

$$d(u_3) = 2$$

$$d(u_4) = 2$$

$$d(u_5) = 2$$



Somar o nº de 1's
das linhas da matriz
de adjacências



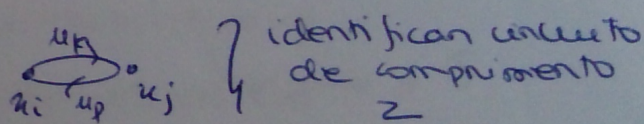
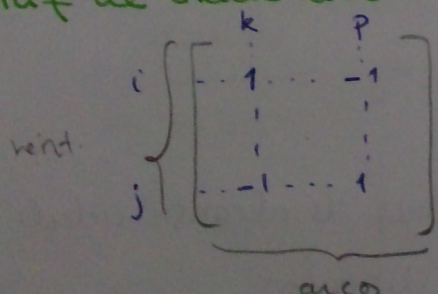
Somar o nº de 1's
das colunas da matriz
de adjacências

Ser. gráfica dos graus externos: (4, 1, 1, 0, 0)

Ser. gráfica dos graus internos: (2, 2, 1, 1, 0)

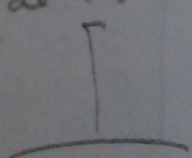
Ser. gráfica dos graus: (4, 2, 2, 2, 2)

→ Matriz de incidências: B

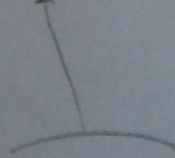


contar o nº
de ocorrências
de 1's

contar o nº de
ocorrências de
-1's

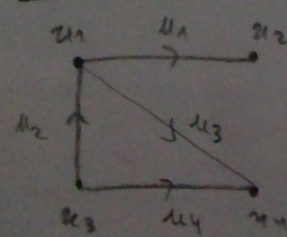


$$d^+(u_1) = 2$$



$$d^-(u_1) = 1$$

Ex:



	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	1	-1	1	0
u_2	-1	0	0	0
u_3	0	1	0	1
u_4	0	0	-1	-1

Grafos Eulerianos e Semi-Eulerianos

Def: G euleriano $\Leftrightarrow \exists$ ciclo que contém todos os arcos

- cadeia
- simples
- fechada

→ Começa e termina no mesmo vértice

• G semi-euleriano $\Leftrightarrow \exists$ cadeia simples e aberta que contém todos os arcos

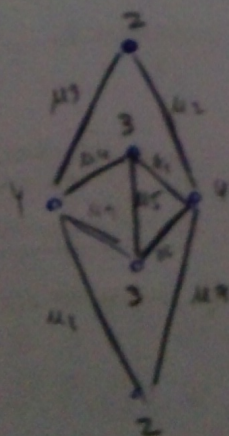
Teorema Euler: G conexo

- G euleriano $\Leftrightarrow$ Todos os vértices têm grau par
- G semi-euleriano $\Leftrightarrow$ Tem 2 e apenas 2 vértices de grau ímpar, e neste caso a cadeia começa num dos vértices de grau ímpar e termina no outro.

• G euleriano: para descobrir o ciclo aplicar Algoritmo de Fleury.

① Classifique quanto a serem eulerianos ou semi-eulerianos.

Va)



G é conexo e pelo Teorema de Euler, como tem dois e apenas dois vértices de grau ímpar é semi-euleriano (logo não é euleriano).

→ pois $\forall x, y \in V \exists x-y$