Matemática Discreta
2011

Departamento Matemática (FCT/UNL)

Capítulo 2

2.1 Grafos e Aplicações. Generalidades

O nosso estudo vai centrar-se em duas espécies de grafos:
- Grafos orientados;
- Grafos não orientados.

Definição 2.1.1:

Chamamos grafo orientado, G, a um par $(X, \mathcal{U})$ em que:

(i) X *é um conjunto finito, não vazio e* → **Conjunto de vértices de G**

(ii) $\mathcal{U}$ *é um subconjunto do produto cartesiano* $X \times X$.

Conjunto dos arcos de G

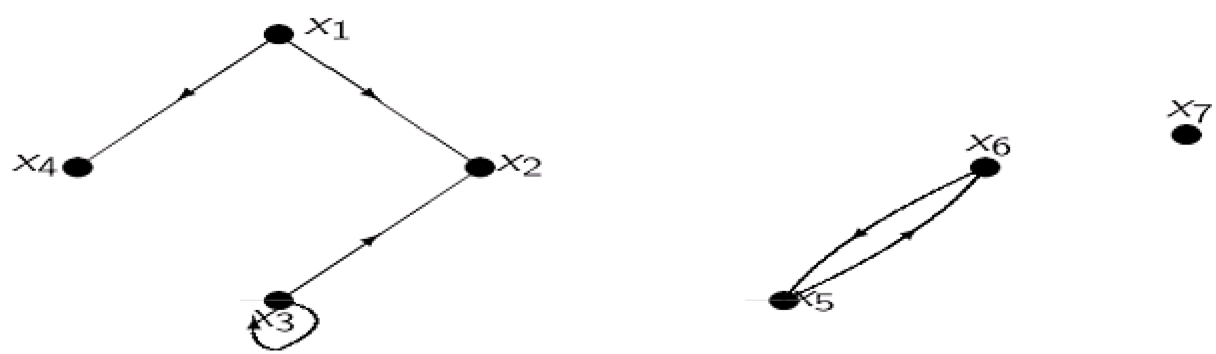
$|X|$ = número de vértices de G = Ordem de G

$|\mathcal{U}|$ = número de arcos de G = Tamanho de G

Exemplo: Uma representação possível para o grafo $G = (X, \mathcal{U})$, em que

$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$ e

$\mathcal{U} = \{(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_4),\ (x_5,\ x_6),\ (x_6,\ x_5),\ (x_3,\ x_3),\ (x_3,\ x_2)\}$



Grafo orientado de ordem 7

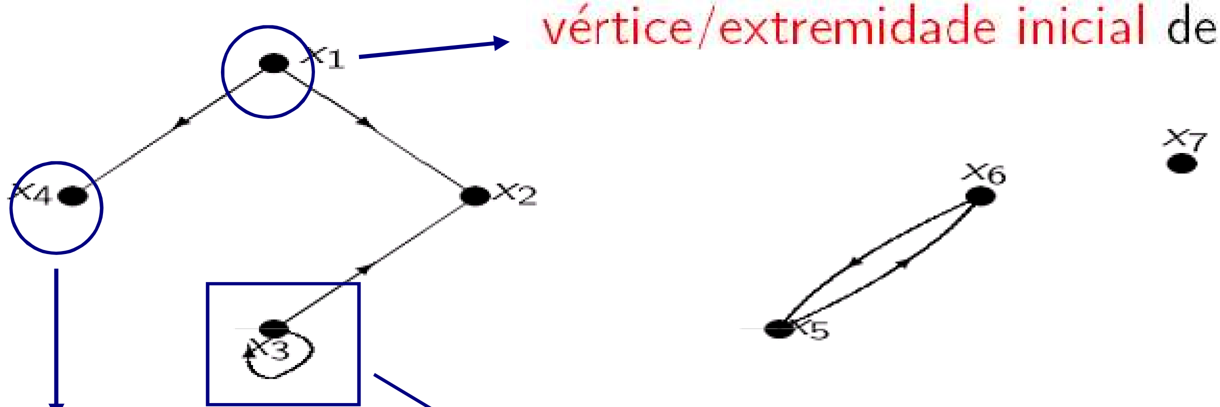
de tamanho 6

Exemplo: Uma representação possível para o grafo $G = (X, \mathcal{U})$, em que

$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$ e

$\mathcal{U} = \{(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_4),\ (x_5,\ x_6),\ (x_6,\ x_5),\ (x_3,\ x_3),\ (x_3,\ x_2)\}$

vértice/extremidade inicial de u

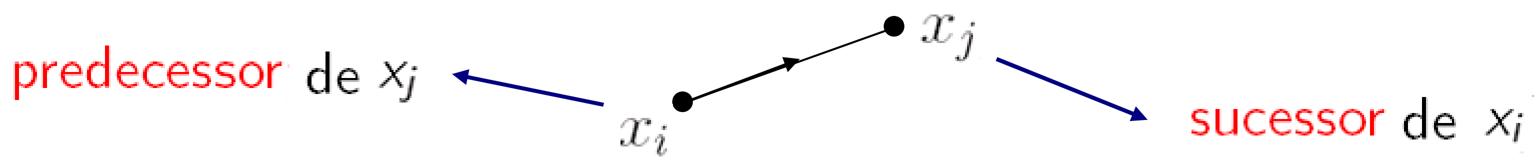


vértice/extremidade final de u

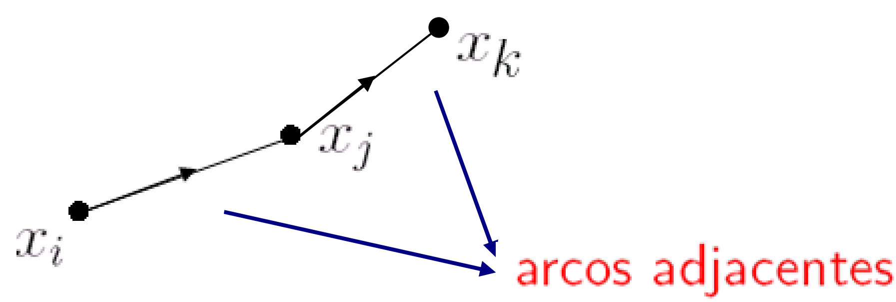
Um arco da forma $(x_i,\ x_i)$ diz-se um laço.

- $u = (x_i, x_j) \in \mathcal{U}$
  - u é um arco de x_i para x_j
  - x_i e x_j são os vértices terminais ou as extremidades de u

- Num grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ dois vértices distintos x_i e x_j dizem-se vértices adjacentes se existir, pelo menos, um arco neles incidentes, isto é, x_i e x_j, com $i \neq j$, são vértices adjacentes se $(x_i, x_j) \in \mathcal{U}$ ou $(x_j, x_i) \in \mathcal{U}$. Considera-se que um vértice x_i é adjacente a si próprio se, e só se, $(x_i, x_i) \in \mathcal{U}$.



- Dois arcos distintos dizem-se arcos adjacentes se têm, pelo menos, uma extremidade comum. Considera-se que um arco u é adjacente a si próprio se, e só se, u é um laço.



- O conjunto dos sucessores e o conjunto dos predecessores de x serão designados, respectivamente, por:

$$\Gamma^{+}(x) = \{y \in X : (x, y) \in \mathcal{U}\}$$

Conjunto dos sucessores de x

$$\Gamma^{-}(x) = \{y \in X : (y, x) \in \mathcal{U}\}.$$

Conjunto dos predecessores de x

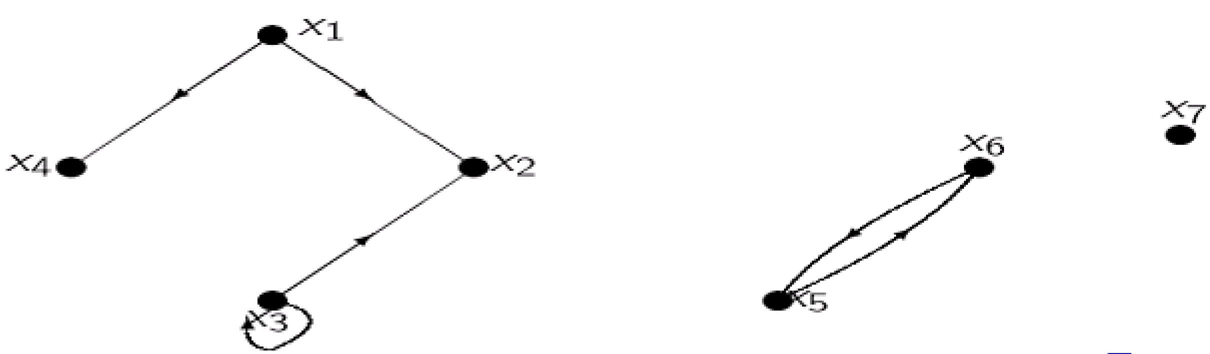
- Designaremos por $\Gamma(x)$ o conjunto dos vértices adjacentes a x. Num grafo orientado tem-se

$$\boxed{\Gamma(x) = \Gamma^{+}(x) \cup \Gamma^{-}(x).}$$

Conjunto dos vértices adjacentes a x

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$ $\quad X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$ e

$$\mathcal{U} = \{(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_4),\ (x_5,\ x_6),\ (x_6,\ x_5),\ (x_3,\ x_3),\ (x_3,\ x_2)\}$$



$$\boxed{\Gamma^+(x_1) = \{x_2, x_4\} \qquad \Gamma^-(x_1) = \emptyset}$$ **Fonte**

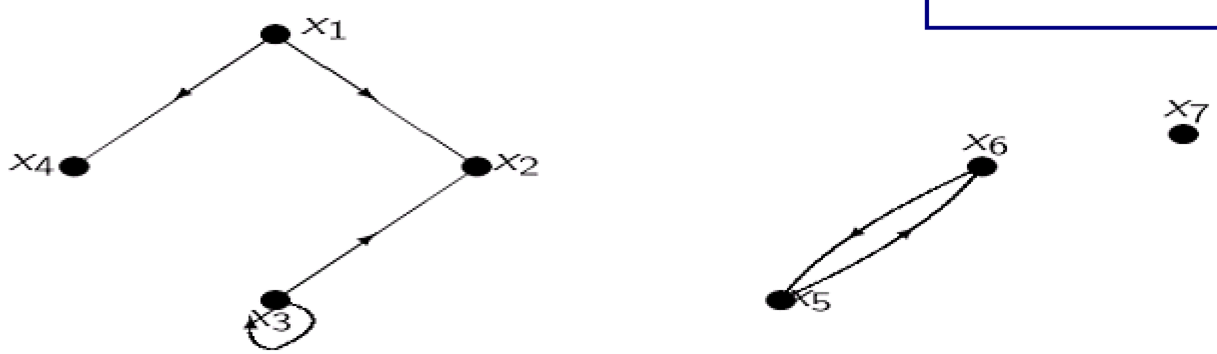
$$\Gamma^+(x_3) = \{x_2, x_3\} \qquad \Gamma^-(x_3) = \{x_3\}$$

$$\boxed{\Gamma^+(x_2) = \emptyset \qquad \Gamma^-(x_2) = \{x_1, x_3\}}$$ **Poço**

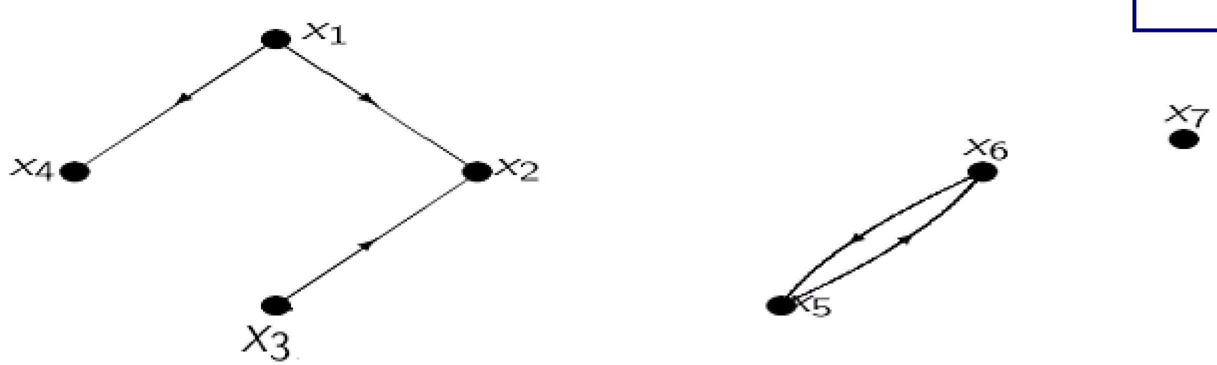
$$\boxed{\Gamma^+(x_7) = \emptyset \qquad \Gamma^-(x_7) = \emptyset}$$ **Vértice isolado**

- De entre os grafos orientados, existe uma classe muito importante, os grafos orientados sem laços que se designam por digrafos.

Grafo orientado



Grafo orientado que é digrafo



Definição 2.1.2:

Dizemos que $G = (X, \mathcal{U})$ *é um grafo não orientado ou, ainda, que* $G = (X, \mathcal{U})$ *é um grafo simples se:*

(i) X *é um conjunto finito, não vazio e*

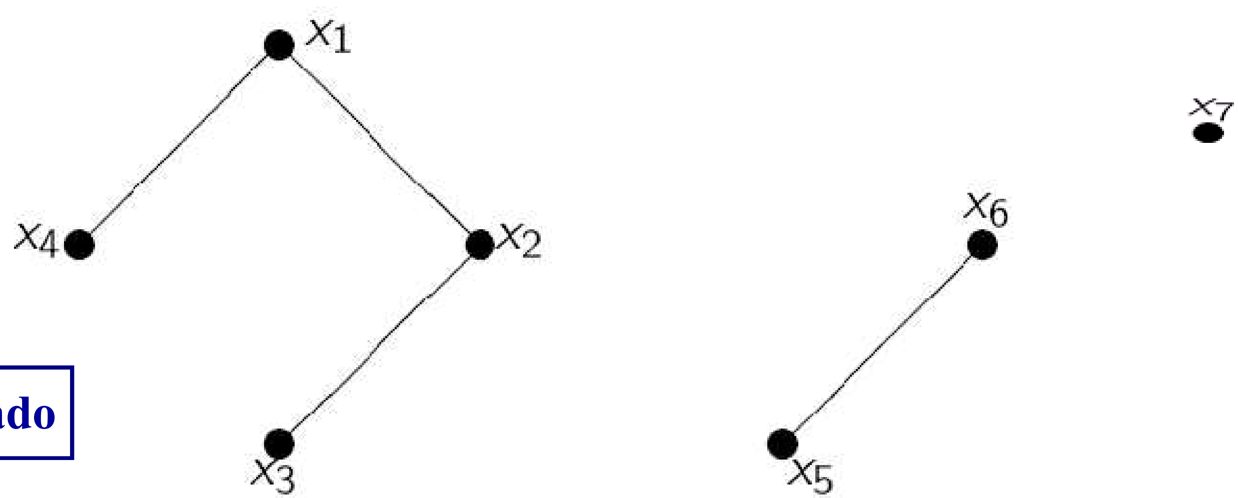
(ii) $\mathcal{U}$ *é um subconjunto de*

Atenção: não há laços

$$X \otimes X = \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}.$$

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$ $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ e

$$\mathcal{U} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_3, x_2\}\}$$

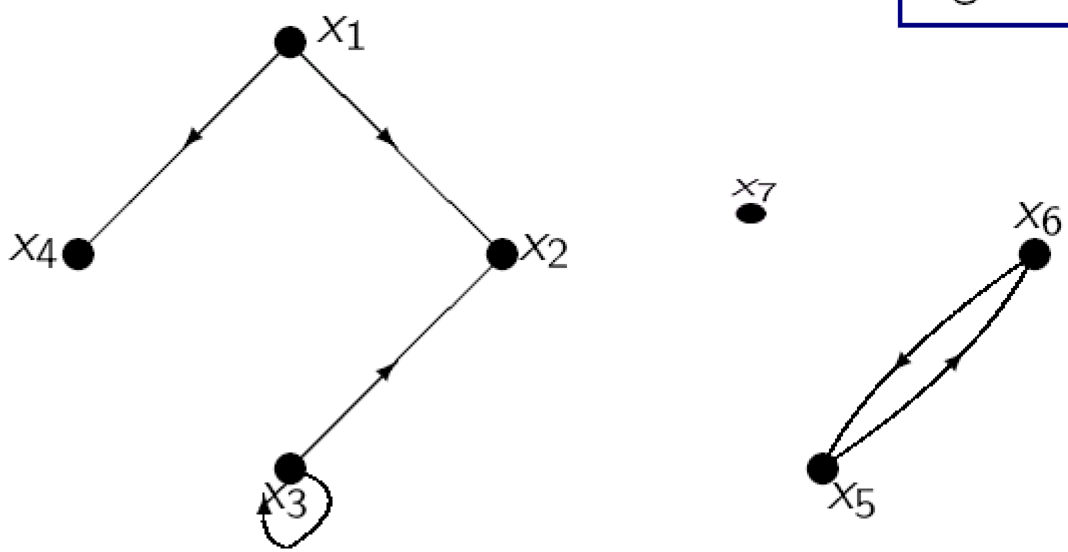


Grafo não orientado

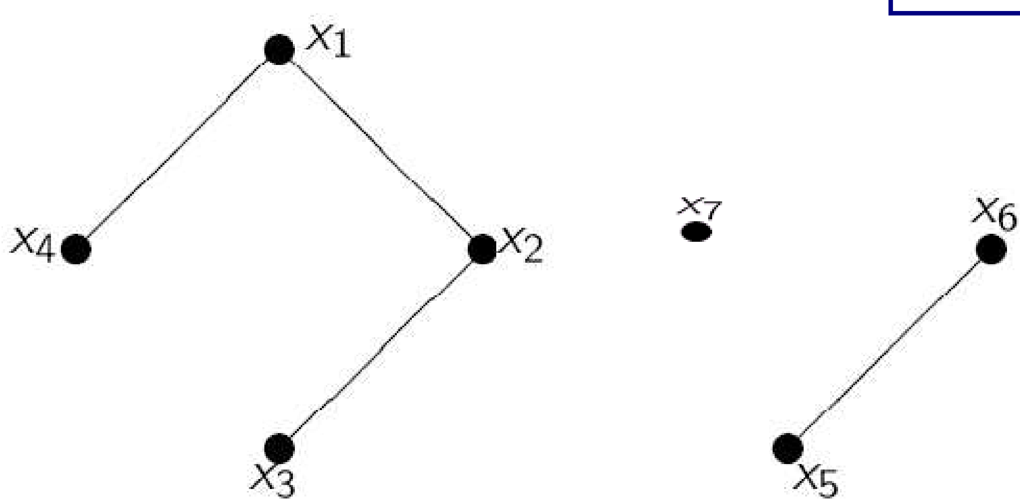
(1)

grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$

tem sempre associado



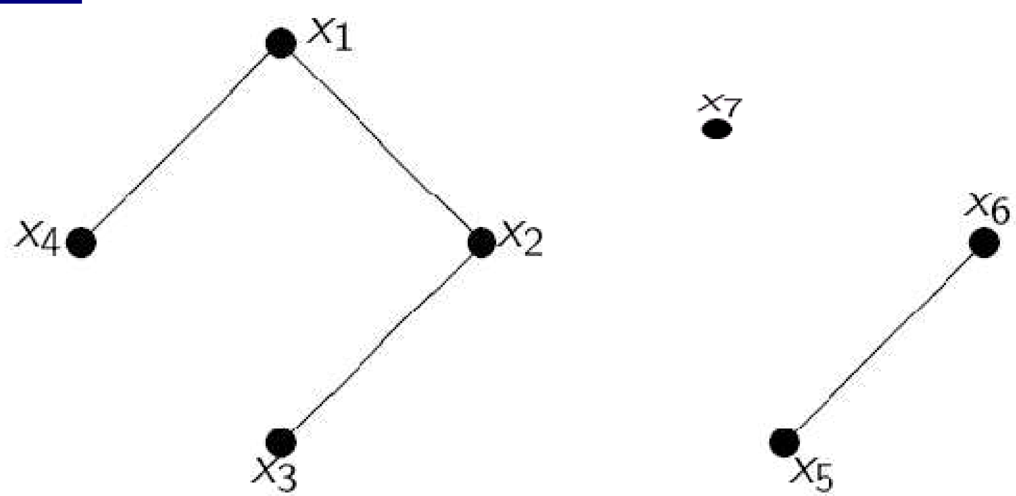
grafo simples $G' = (X, \mathcal{U}')$



G' é o grafo subjacente a G

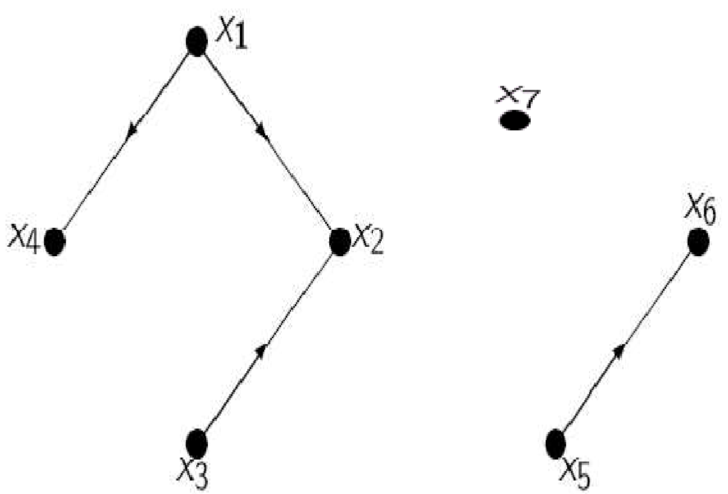
$G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples

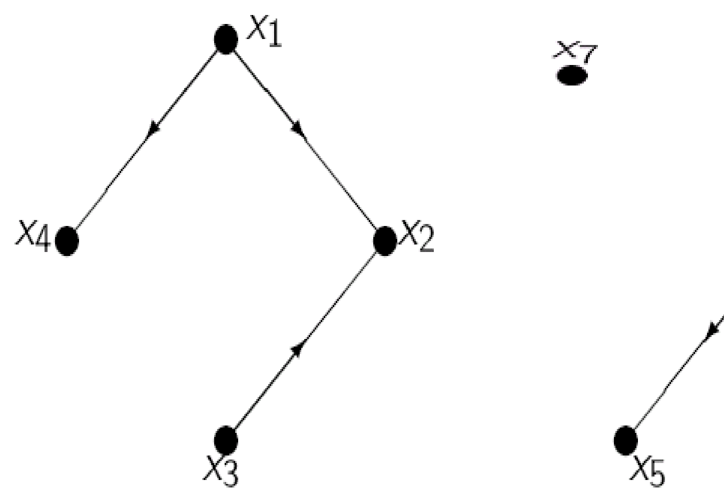
(2)



Por orientação dos arcos

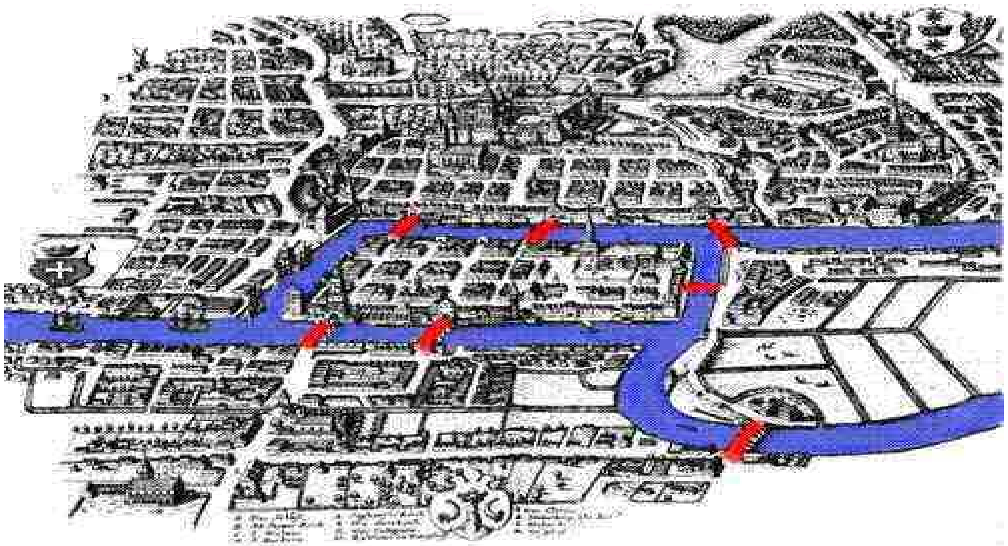
$G' = (X, \mathcal{U}')$ grafo orientado





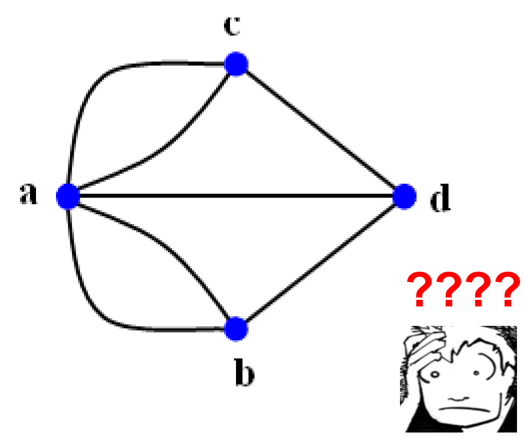
grafo resultante da orientação de G

Na quase totalidade dos problemas que estudaremos, as definições anteriores de grafo orientado e de grafo simples são as que interessam considerar. Contudo para estudarmos problemas do mesmo tipo do das pontes de Königsberg, teremos que considerar uma outra definição de grafo, que permita a um arco ocorrer repetido.



Pontes de Konigsberg (1736 Euler)

multigrafo



Definição 2.1.3:

Um multiconjunto é um par ordenado (A, m) onde A é um conjunto e $m : A \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função.

Para cada $a \in A$, chamamos multiplicidade de a (ou nº de ocorrências de a) ao número natural $m(a)$.

Exemplo: Consideremos o multiconjunto $M = (A, m)$, com

$A = \{a, b, c\}$, $\quad m : A \longrightarrow \mathbb{N}$ com $m(a) = 3$, $m(b) = 1$, $m(c) = 2$

Então

$$\boxed{M = \{a, a, a, b, c, c\}.}$$

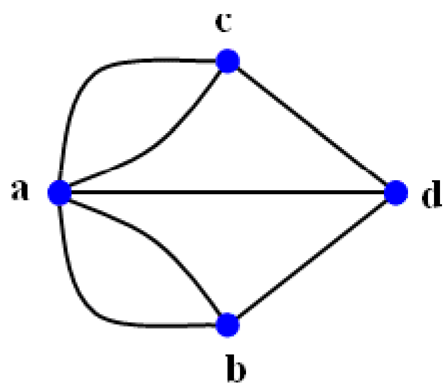
Definição 2.1.4:

Chamamos multigrafo (respectivamente, multigrafo orientado) a um par $G = (X, \mathcal{E})$ em que:

(i) *X é um conjunto finito, não vazio e*

(ii) *$\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$ é um multiconjunto com $\mathcal{U} \subseteq X \otimes X$ (respectivamente, $\mathcal{U} \subseteq X \times X$).*

Exemplo: A figura



2-grafo não orientado

é uma representação do multigrafo não orientado $G = (X, \mathcal{E})$ onde,

X={a, b, c, d },

$\mathcal{U} = \{\{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{b,d\}\}$

$\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$

multiconjuntos dos arcos

$m(\{a,c\}) = 2$ $\quad m(\{a,d\}) = 1$

$m(\{a,b\}) = 2$ $\quad m(\{c,d\}) = 1$

$m(\{b,d\}) = 1$

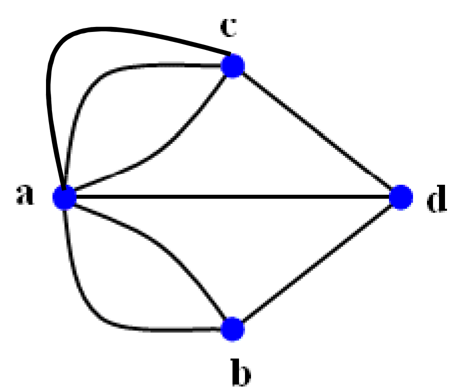
Definição 2.1.4:

Chamamos multigrafo (respectivamente, multigrafo orientado) a um par $G = (X, \mathcal{E})$ *em que:*

(i) X *é um conjunto finito, não vazio e*

(ii) $\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$ *é um multiconjunto com* $\mathcal{U} \subseteq X \otimes X$ *(respectivamente,* $\mathcal{U} \subseteq X \times X$*).*

Exemplo: A figura



3-grafo não orientado

é uma representação do multigrafo não orientado $G = (X, \mathcal{E})$ onde,

X={a, b, c, d },

$\mathcal{U} = \{\{a,c\},\{a,d\},\{a,b\},\{c,d\},\{b,d\}\}$

$\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$

multiconjuntos dos arcos

$m(\{a,c\}) = 3$ $\quad m(\{a,d\}) = 1$

$m(\{a,b\}) = 2$ $\quad m(\{c,d\}) = 1$

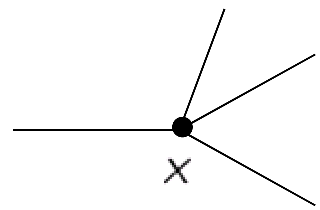
$m(\{b,d\}) = 1$

- Se a multiplicidade máxima dos elementos (arcos) do multiconjunto $\mathcal{E}$ é p dizemos que G é um p-grafo (o grafo do problema das pontes de Königsberg é um 2-grafo não orientado).

- Aos elementos do multiconjunto $\mathcal{E}$ que são "iguais" (considerando a representação "por extensão" de $\mathcal{E}$) chamamos arcos paralelos.

Grau de um vértice

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo (respectivamente, multigrafo orientado).



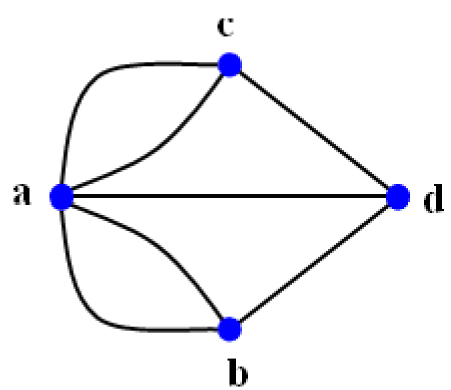
O grau de um vértice x define-se como o número de arcos incidentes em x

2 vezes

(respectivamente, o número de arcos incidentes em x mais o número de laços incidentes em x).

$$\boxed{d_G(x) = \text{ grau de um vértice } x = d(x)}$$

Exemplo: No multigrafo



tem-se:

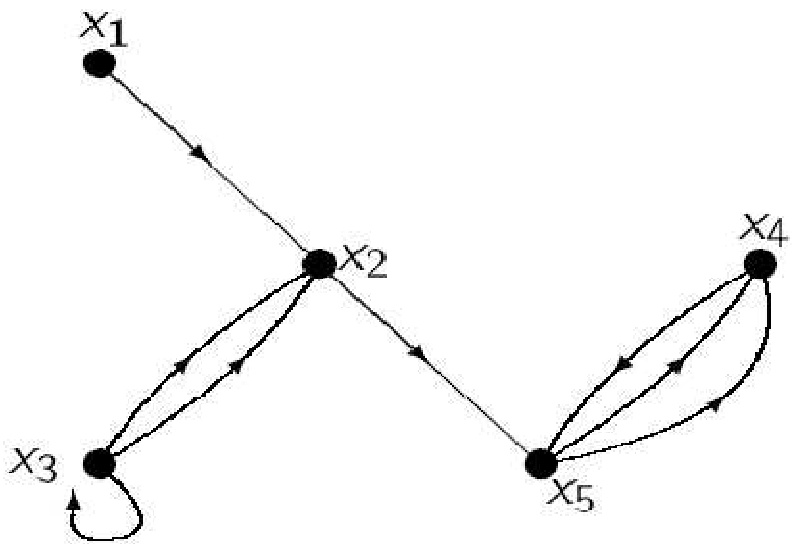
$d(\text{a}) = 5$

$d(\text{b}) = 3$

$d(\text{c}) = 3$

$d(\text{d}) = 3$

Exemplo: No multigrafo orientado



tem-se:

$d(x_1) = 1$

$d(x_2) = 4$

$\boxed{d(x_3) = 4}$

$d(x_4) = 3$

$d(x_5) = 4$

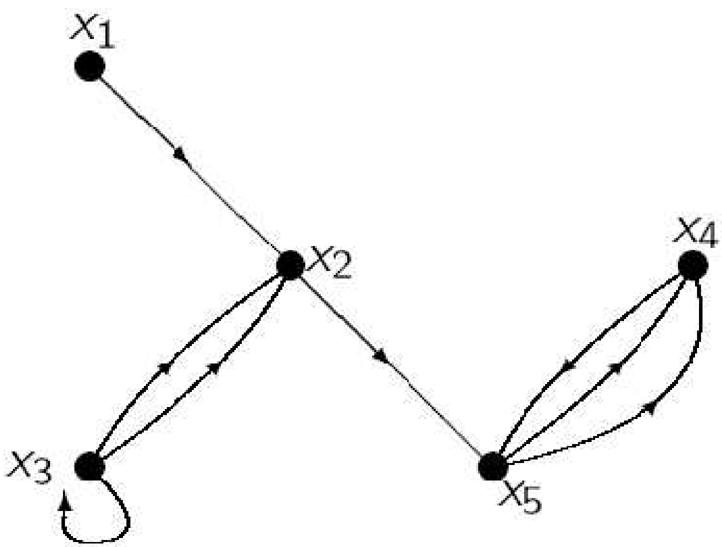
- Se G é um multigrafo orientado denomina-se $\boxed{d_G^+(x)}$

grau exterior do vértice x = número de arcos de G que têm x como extremidade inicial

grau interior do vértice x = número de arcos de G que têm x como extremidade final

$\boxed{d_G^-(x)}$

Exemplo: Para o multigrafo orientado em baixo tem-se:



$$d^+(x_1) = 1 \quad , \quad d^-(x_1) = 0$$
$$d^+(x_2) = 1 \quad , \quad d^-(x_2) = 3,$$
$$\boxed{d^+(x_3) = 3 \quad , \quad d^-(x_3) = 1,}$$
$$d^+(x_4) = 1 \quad , \quad d^-(x_4) = 2,$$
$$d^+(x_5) = 2 \quad , \quad d^-(x_5) = 2.$$

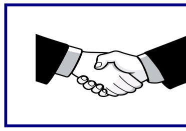
Nota:

(i) Num multigrafo orientado tem-se obviamente que

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x), \qquad \text{para todo o } x \in X.$$

(ii) Num grafo orientado tem-se

$$d^+(x) = |\Gamma^+(x)| \qquad \text{e} \qquad d^-(x) = |\Gamma^-(x)|, \qquad \text{para todo o } x \in X.$$

Teorema do 

Teorema 2.1.5:

(i) *Num multigrafo* $G = (X, \mathcal{U})$ *com* m *arcos tem-se* $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$.

(ii) *Se* $G = (X, \mathcal{U})$ *é um multigrafo orientado com* m *arcos então* $\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = m$.

"Dem.": A demonstração da afirmação (ii) é imediata, se atendermos a que cada arco, independentemente de ser ou não um laço, tem uma, e uma só, extremidade inicial (respectivamente, final) contribuindo, assim, com uma parcela igual a 1 para o somatório $\sum_{x \in X} d^+(x)$ (respectivamente, $\sum_{x \in X} d^-(x)$).
A demonstração de (i) para multigrafos orientados, pode fazer-se utilizando (ii), pois

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} (d^+(x) + d^-(x)) = \sum_{x \in X} d^+(x) + \sum_{x \in X} d^-(x) = 2m,$$

ou observando que para qualquer multigrafo, orientado ou não, cada arco tem duas extremidades (que podem ser iguais, no caso dos laços) e, portanto, por cada arco existe uma parcela igual a 2 no somatório $\sum_{x \in X} d(x)$.