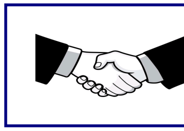
Teorema do 

Teorema 2.1.5:

(i) *Num multigrafo* $G = (X, \mathcal{U})$ *com* m *arcos tem-se* $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$.

(ii) *Se* $G = (X, \mathcal{U})$ *é um multigrafo orientado com* m *arcos então* $\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = m$.

"Dem.": A demonstração da afirmação (ii) é imediata, se atendermos a que cada arco, independentemente de ser ou não um laço, tem uma, e uma só, extremidade inicial (respectivamente, final) contribuindo, assim, com uma parcela igual a 1 para o somatório $\sum_{x \in X} d^+(x)$ (respectivamente, $\sum_{x \in X} d^-(x)$).
A demonstração de (i) para multigrafos orientados, pode fazer-se utilizando (ii), pois

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} (d^+(x) + d^-(x)) = \sum_{x \in X} d^+(x) + \sum_{x \in X} d^-(x) = 2m,$$

ou observando que para qualquer multigrafo, orientado ou não, cada arco tem duas extremidades (que podem ser iguais, no caso dos laços) e, portanto, por cada arco existe uma parcela igual a 2 no somatório $\sum_{x \in X} d(x)$.

Consequências imediatas do teorema do aperto de mão:

(1) A soma dos graus de todos os vértices de um multigrafo é sempre par;

(2) O número de vértices de grau ímpar é sempre par.

Proposição 2.1.6:

Num multigrafo, orientado ou não, $G = (X, \mathcal{U})$ é sempre par o número de vértices de G que têm grau ímpar.

Dem: Sejam m o número de arcos de G,

$$X_1 = \{x \in X : \ d(x) \text{ é ímpar}\} \quad \text{e} \quad X_2 = \{x \in X : \ d(x) \text{ é par}\}.$$

Tem-se

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) = 2m.$$

Como $2m$ e $\sum_{x \in X_2} d(x)$ são números pares, concluímos que $\sum_{x \in X_1} d(x)$ é par. Dado que a paridade da soma de $k = |X_1|$ números ímpares é a paridade de k, concluímos que $k = |X_1|$ é um número par. Como $|X_1|$ é o número de vértices de G com grau ímpar, tem-se o resultado pretendido. $\square$

Definição 2.1.7:

Define-se sequência de graus de um multigrafo ou multigrafo orientado G, com n vértices, como sendo a sequência

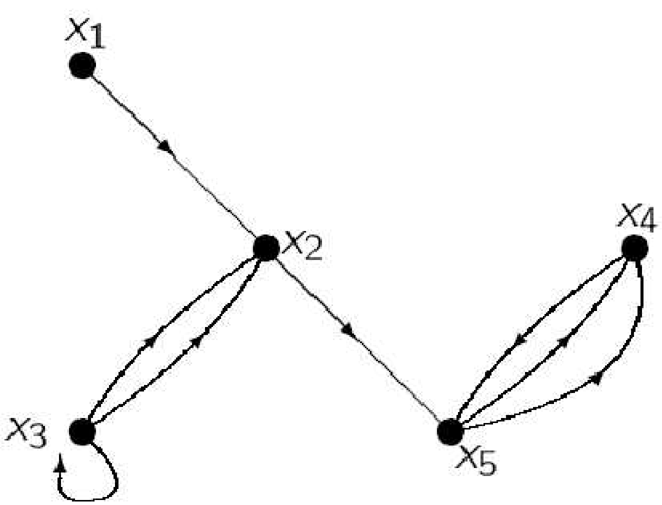
$$(d_1,\ d_2, \ldots,\ d_n),$$

~~*não crescente*~~ *(isto é, com* **decrescente em sentido lato**

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$$

cujos elementos são os graus dos vértices de G.

Exemplo: Para o multigrafo orientado em baixo tem-se:



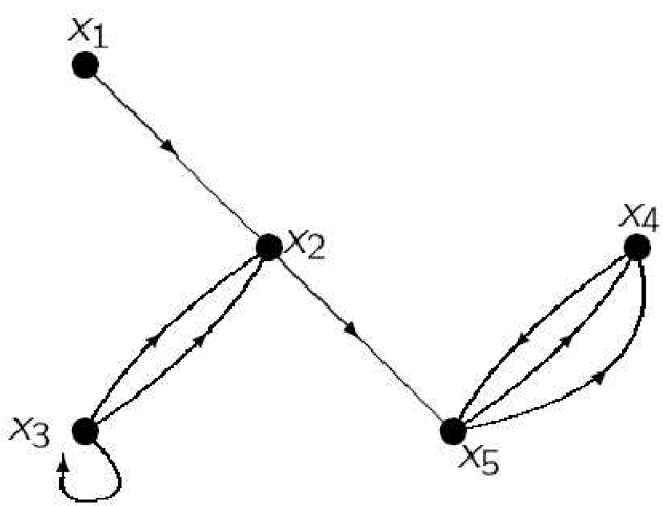
$$d(x_1) = 1$$
$$d(x_2) = 4$$
$$d(x_3) = 4$$
$$d(x_4) = 3$$
$$d(x_5) = 4$$

(4, 4, 4, 3, 1)

é a sequência de graus de G

Observação: No caso dos multigrafos orientados define-se de forma análoga os conceitos de sequência de graus exteriores e sequência de graus interiores.

Exemplo: Para o multigrafo orientado anterior tem-se:



$d^+(x_1) = 1$	$d^-(x_1) = 0$
$d^+(x_2) = 1$	$d^-(x_2) = 3$
$d^+(x_3) = 3$	$d^-(x_3) = 1$
$d^+(x_4) = 1$	$d^-(x_4) = 2$
$d^+(x_5) = 2$	$d^-(x_5) = 2$

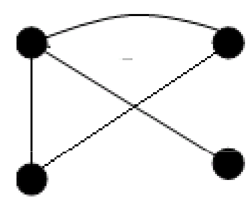
$(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$ é a sequência de graus exteriores de G

$(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0)$ é a sequência de graus interiores de G

Definição 2.1.8:

Uma sequência não crescente de inteiros não negativos $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ *diz-se uma sequência gráfica se existir um* **grafo simples** *cuja sequência de graus seja* $(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Exemplo: (3, 2, 2, 1) é uma sequência gráfica pois existe um grafo simples cujos vértices têm os graus da sequência.



Proposição 2.1.9:

Se $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ *é uma sequência gráfica então* $d_1, d_2, \dots, d_n$ *são inteiros tais que:*

(i) $0 \leq d_i \leq n-1$, *para todo o* $i \in \{1, \dots, n\}$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ *é um número par.*

Observação: A Proposição diz que dada uma sequência não crescente de números inteiros $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, se existe um gráfo simples com a sequência de vértices $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ então a sequência satisfaz (i) e (ii).

No entanto, satisfazer (i) e (ii) não implica que exista um grafo com tal sequência de vértices.

Exemplo

A sequência (2, 2, 0) satisfaz as condições (i) e (ii) mas não existe um grafo simples com 3 vértices e com esta sequência de graus.

Um exemplo para n=4 ?
$(3, 1, 0, 0)$

Um exemplo para n=5 ?
$(4, 0, 0, 0, 0)$

- A proposição é importante porque nos permite excluir casos.

$(3, 2, 2, 1, 1, 0)$ → Não é sequência grafica pois não satisfaz (ii)

Proposição 2.1.10:

Num grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

Dem. Se não existissem dois vértices com o mesmo grau, a sequência de graus do grafo seria

$$(n-1,\ n-2, \ldots,\ 1,\ 0),$$

que não é uma sequência gráfica. $\square$

Exemplo: (3, 2, 1, 0) não é uma sequência gráfica.

Teorema 2.1.11:

A sequência de inteiros não negativos

$$S: \qquad d_1, d_2, \ldots, d_n$$

com $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, $n \geq 2$ e $d_1 \geq 1$ é uma sequência gráfica se, e só se, a sequência

$$S': \qquad d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

(depois de ordenada por ordem não crescente) é uma sequência gráfica.

Dem.(parcial) Suponhamos que S' é uma sequência gráfica e seja G' um grafo simples cuja sequência de graus é S'. Sejam $x_2, \ldots, x_n$ os vértices de G' e considere-se que

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1 & \text{se } 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i & \text{se } d_1 + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Seja G o grafo que se obtem de G' acrescentando um novo vértice x_1 e os d_1 arcos $\{x_1, x_i\}$, para $2 \leq i \leq d_1 + 1$. Então, G é um grafo simples cuja sequência de graus é S e, portanto, S é uma sequência gráfica. $\square$

Exemplo: Determinemos se a sequência $(6,\ 5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2)$ é uma sequência gráfica.

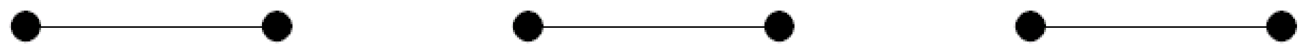
$$
\begin{array}{lrl}
S_1 & : & 6,\ 5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2 \\
S_1' & : & 4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2 \\
S_2 & : & 4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1 \\
S_2' & : & 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1 \\
S_3 & : & 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1 \\
S_3' & : & 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1
\end{array}
$$

em que de S_i para S_i', $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, se aplicou o teorema e de S_i' para S_{i+1}, $i \in \{1,\ 2\}$, se ordenou a sequência por ordem não crescente.

G_3'

Embora possamos continuar a aplicar o teorema, concluímos facilmente, que S_3' é uma sequência gráfica, pois um grafo simples da forma

G_3'



tem S_3' como sequência de graus.

Conclusão: De acordo com o teorema 2.1.11, como

(1,1,1,1,1,1) é sequência gráfica $\qquad G_3'$

$\Downarrow$

(3,2,2,2,1,1,1) é sequência gráfica $\qquad G_3$ = **?**

$\Downarrow$

(4,4,3,2,2,2,2,1) é sequência gráfica $\qquad G_2$ = **?**

$\Downarrow$

(6,5,5,4,3,3,2,2,2) é sequência gráfica $\qquad G_1$ = **?**

Partindo de G_3' obtenha grafos simples G_3 , G_2 e G_1 para as sequências indicadas

(1,1,1,1,1,1) é sequência gráfica G_3'

$\Downarrow$

(3,2,2,2,1,1,1) é sequência gráfica G_3 = ?

$\Downarrow$

(4,4,3,2,2,2,2,1) é sequência gráfica G_2 = ?

$\Downarrow$

(6,5,5,4,3,3,2,2,2) é sequência gráfica G_1 = ?

G_3'

$(1,1,1,1,1,1)$ é sequência gráfica G'_3

$\Downarrow$

$(3,2,2,2,1,1,1)$ é sequência gráfica G_3 = ?

$\Downarrow$

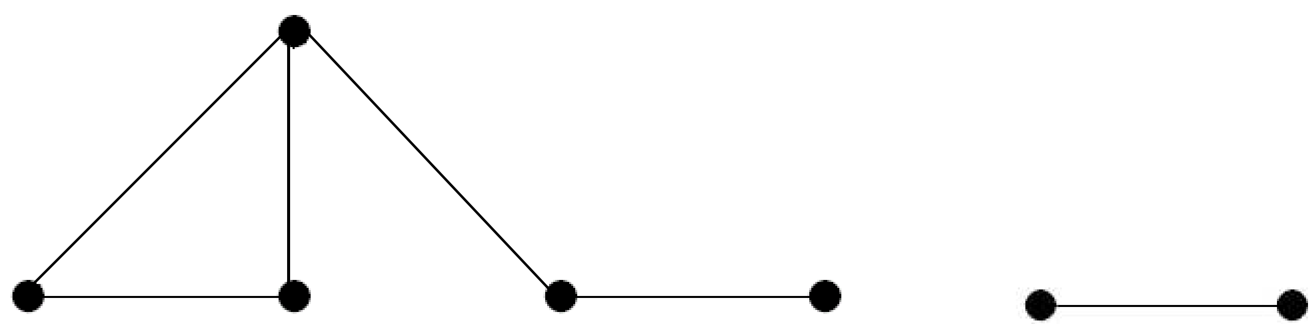
$(4,4,3,2,2,2,2,1)$ é sequência gráfica G_2 = ?

$\Downarrow$

$(6,5,5,4,3,3,2,2,2)$ é sequência gráfica G_1 = ?

De acordo com o Teorema 2.1.11, para obter um grafo simples G_3 com a sequência de vértices (3,2,2,2,1,1,1) basta acrescentar um vértice a G'_3 e torná-lo adjacente a 3 vértices de grau 1

G_3



(1,1,1,1,1,1) é sequência gráfica G_3'

$\Downarrow$

(3,2,2,2,1,1,1) é sequência gráfica G_3 = ?

$\Downarrow$

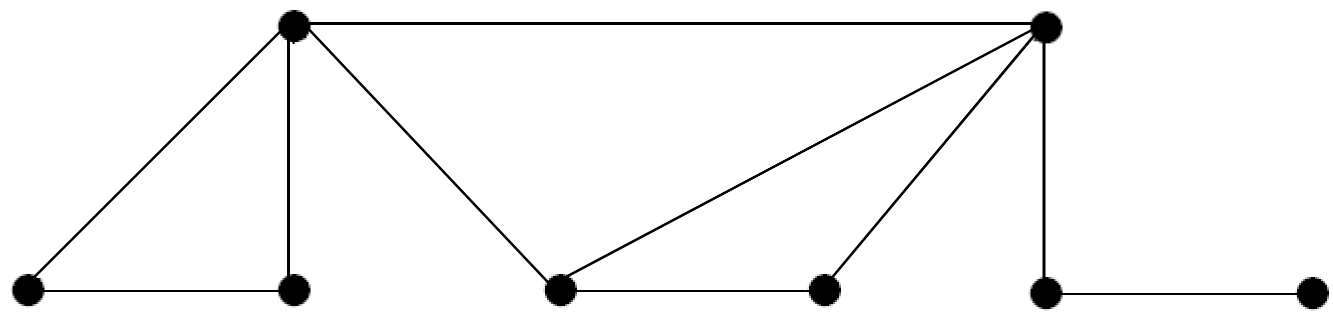
(4,4,3,2,2,2,2,1) é sequência gráfica G_2 = ?

$\Downarrow$

(6,5,5,4,3,3,2,2,2) é sequência gráfica G_1 = ?

Agora, para obter um grafo simples G_2 com a sequência de vértices (4,4,3,2,2,2,2,1) basta acrescentar um vértice a G_3 e torná-lo adjacente a 1 vértice de grau 3, a 1 vértice de grau 2 e a 2 vértices de grau 1.

G_2



$(1,1,1,1,1,1)$ é sequência gráfica G_3'

$\Downarrow$

$(3,2,2,2,1,1,1)$ é sequência gráfica G_3 = ?

$\Downarrow$

$(4,4,3,2,2,2,2,1)$ é sequência gráfica G_2 = ?

$\Downarrow$

$(6,5,5,4,3,3,2,2,2)$ é sequência gráfica G_1 = ?

Para obter um grafo simples G_1 a partir de G_2, que tenha a sequência de vértices (6,5,5,4,3,3,2,2,2), basta acrescentar 1 vértice de grau 6 a G_2 e torná-lo adjacente a 2 vértices de grau 4, 1 de grau 3, 2 de grau 2 e 1 de grau 1.

G_1