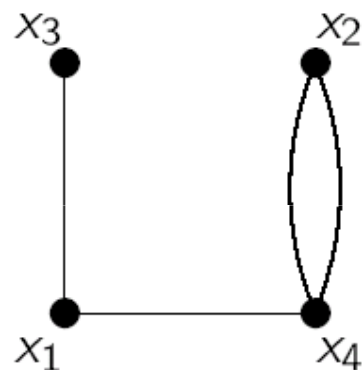


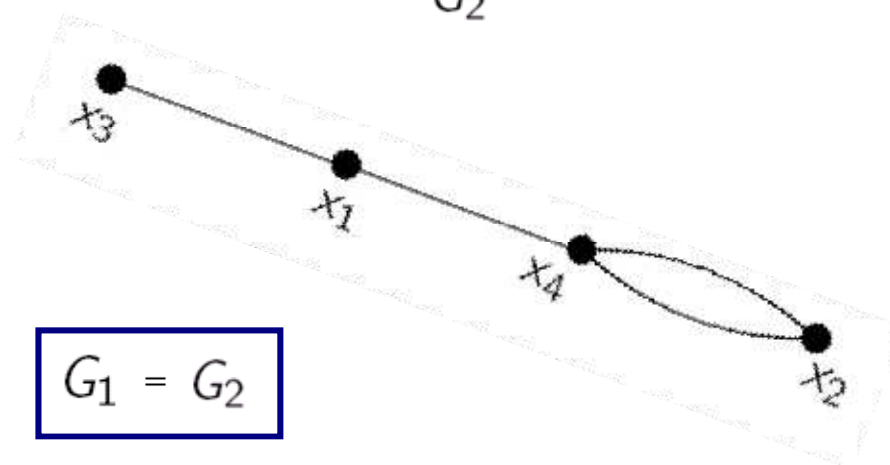
Multigrafos Isomorfos

Duas representações de multigrafos podem parecer diferentes, mas representarem o mesmo multigrafo. É o caso dos multigrafos G_1 e G_2 ,

G_1

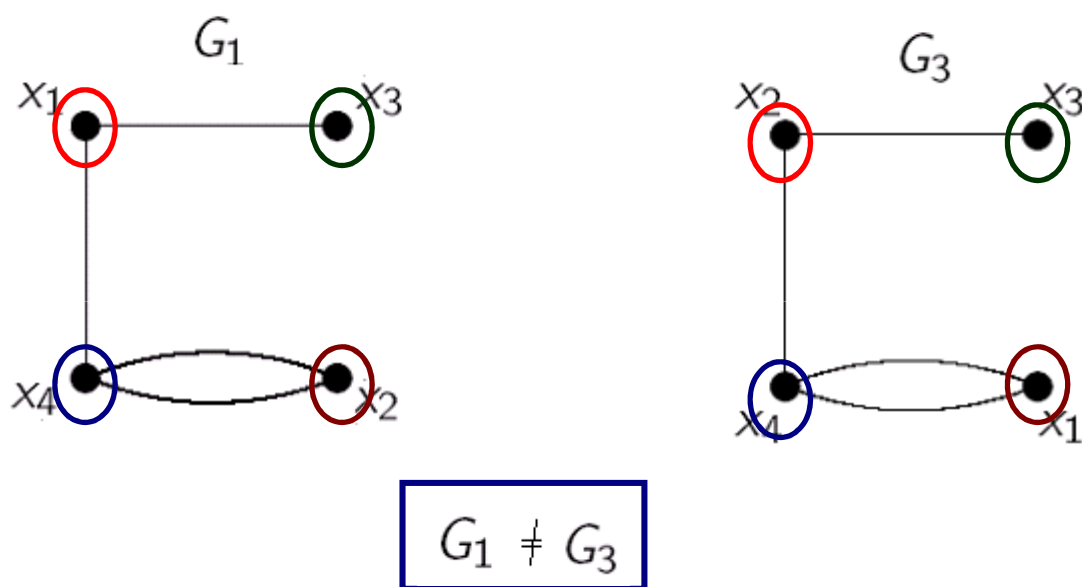


G_2

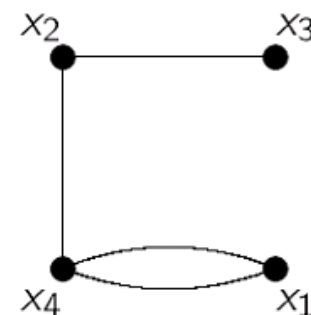
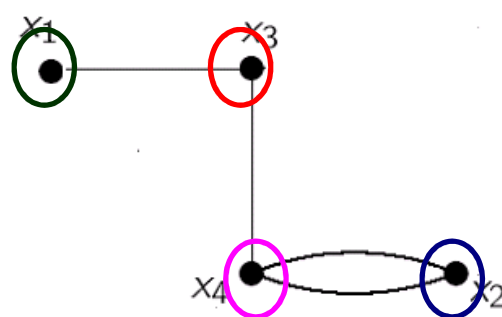
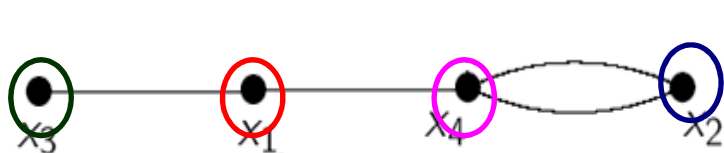


$$G_1 = G_2$$

No entanto pode acontecer que duas representações de multigrafos pareçam semelhantes mas representarem multigrafos distintos. É o caso dos multigrafos G_1 e G_3 (enquanto que em G_1 os vértices x_1 e x_3 são adjacentes, em G_3 não o são),



Multigrafos Isomorfos



Multigrafos Isomorfos

Definição 2.1.12:

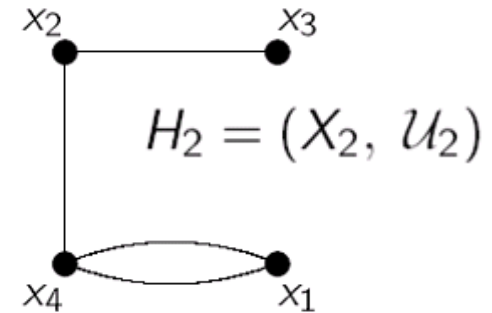
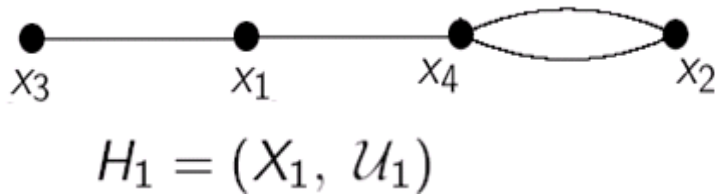
Sejam $H_1 = (X_1, \mathcal{U}_1)$ e $H_2 = (X_2, \mathcal{U}_2)$ multigrafos não orientados (respectivamente, multigrafos orientados). Diz-se que H_1 é **isomorfo** a H_2 se existe uma aplicação bijectiva

$$\varphi : X_1 \longrightarrow X_2 \quad (\text{Isomorfismo})$$

tal que, para quaisquer x_i e $x_j \in X_1$, o número de arcos incidentes, em H_1 , nestes dois vértices (respectivamente, com extremidade inicial em x_i e extremidade final em x_j) seja igual ao número de arcos incidentes, no multigrafo H_2 , em $\varphi(x_i)$ e $\varphi(x_j)$ (respectivamente, com extremidade inicial em $\varphi(x_i)$ e extremidade final em $\varphi(x_j)$).

Exemplos:

1



H_1 e H_2 são **multigrafos** isomorfos

$$\varphi: X_1 \longrightarrow X_2$$

$$x_1 \longrightarrow x_2$$

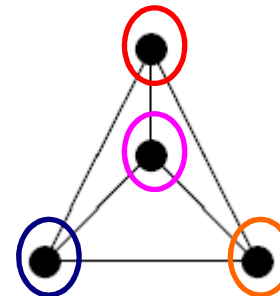
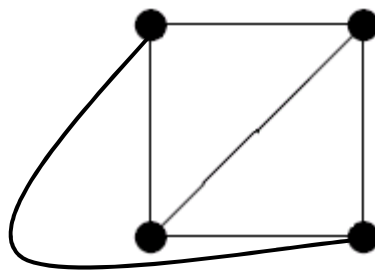
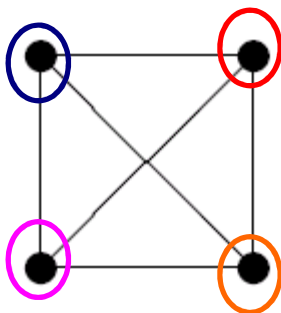
$$x_2 \longrightarrow x_1$$

$$x_3 \longrightarrow x_3$$

$$x_4 \longrightarrow x_4$$

bijecção que preserva a existência de arcos.

2 Os grafos simples



são isomorfos.

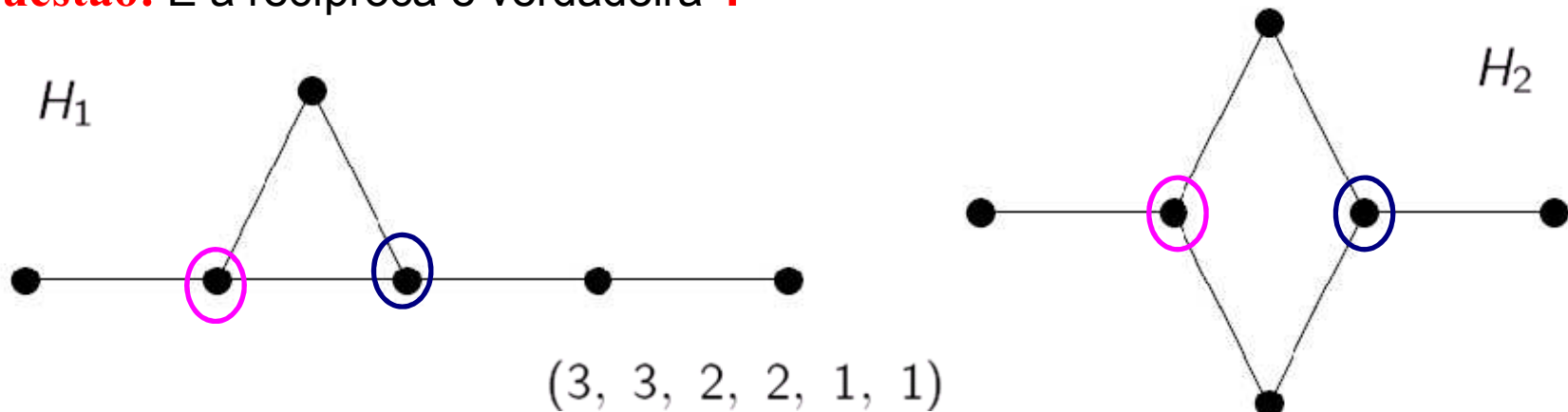
Conclusão: De acordo com a definição, se dois multigrafos são isomorfos, então

- (1) têm o mesmo número de vértices;
- (2) têm o mesmo número de arcos;
- (3) Se $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ é a bijecção que os torna isomorfos então

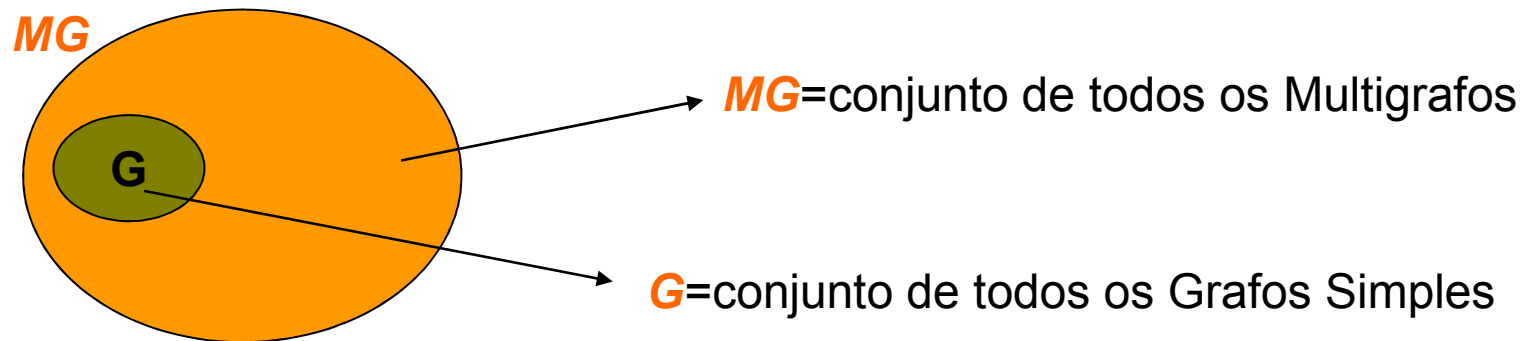
$$d_{H_1}(x) = d_{H_2}(\varphi(x)), \quad \forall x \in X_1.$$

Têm a mesma sequência de graus

Questão: E a recíproca é verdadeira ?



A Sequência de graus de G_1 e G_2
é a mesma mas os grafos não são isomorfos



Considere em MG a relação binária definida por:

$M_1 \sim M_2$ se e só se M_1 e M_2 são isomorfos, M_1, M_2 em MG
Relação de isomorfismo

Teorema 2.1.13:

A relação de isomorfismo de multigrafos e de multigrafos orientados é uma relação de equivalência.

Alguns tipos de grafos

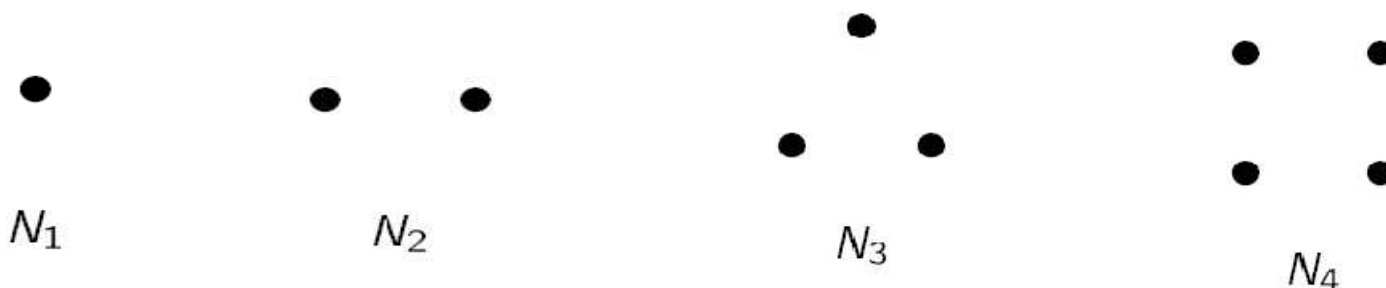
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples.

1 Grafo regular de grau r ou r -regular ($r \in \mathbb{N}_0$):

Se $d_G(x) = r$ para todo $x \in X$

Caso particular: Grafos regulares de grau 0 (**grafos nulos**)

N_n
Grafo nulo
com n vértices



Caso particular: Grafos regulares com n vértices e grau $n-1$ (**grafos completos**)

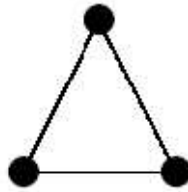
K_n
Grafo completo
com n vértices



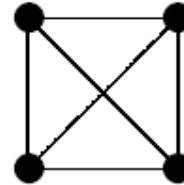
K_1



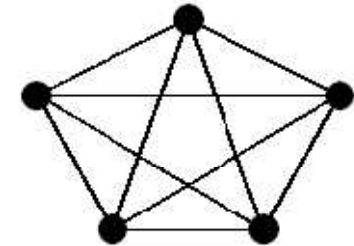
K_2



K_3



K_4



K_5

Qual o número de arcos de K_n ?

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

(Usar o teorema do aperto de mão)

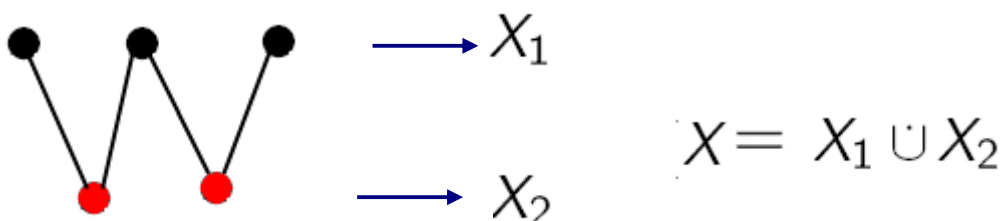
Qual o número de arcos de um grafo r-regular com n vértices ?

n vértices cada um com grau r

$$m = \frac{n \times r}{2}$$

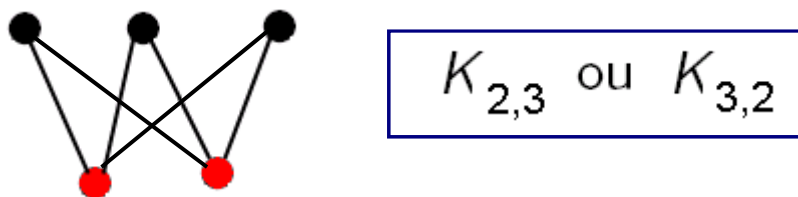
2 Grafo bipartidos

Diz-se que um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$ é **bipartido**, com classes de vértices X_1 e X_2 , se $\{X_1, X_2\}$ é uma partição de X e cada arco de G tem uma extremidade num elemento de X_1 e a outra extremidade num elemento de X_2 .



A notação utilizada é $G = (X_1 \cup X_2, \mathcal{U})$.

Caso particular: Grafos bipartidos completos



A notação utilizada é K_{n_1, n_2} $\begin{cases} \rightarrow n_1 \text{ elementos de } X_1 \\ \rightarrow n_2 \text{ elementos de } X_2 \end{cases}$

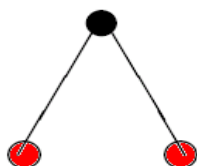
Qual o número de arcos de K_{n_1, n_2} ?

$$m = n_1 \times n_2$$

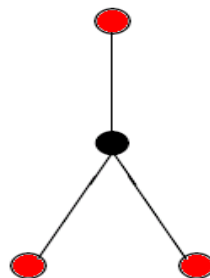
Dentro dos grafos bipartidos completos destacam-se os da forma $K_{1, n-1}$
(grafos estrelas)



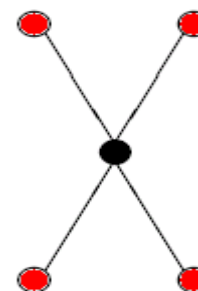
$K_{1,1}$



$K_{1,2}$



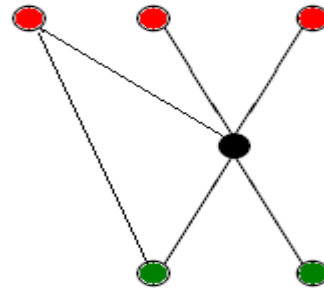
$K_{1,3}$



$K_{1,4}$

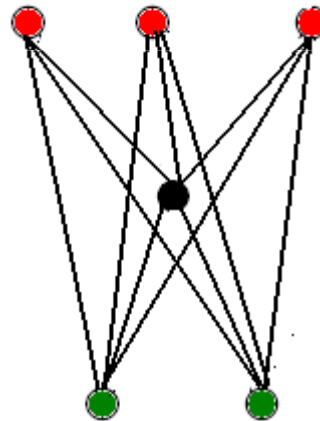
3 Grafo p-partido

Um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$ diz-se **p-partido**, com classes de vértices $X_1, \dots, X_p$, se $\{X_1, \dots, X_p\}$ é uma partição de X e nenhum elemento de $\mathcal{U}$ tem ambas as extremidades em elementos da mesma classe.



3-partido

Um grafo p -partido, com $p \geq 2$, em que existe um arco unindo todo o par de vértices pertencentes a classes de vértices distintas diz-se um **grafo p -partido completo**.

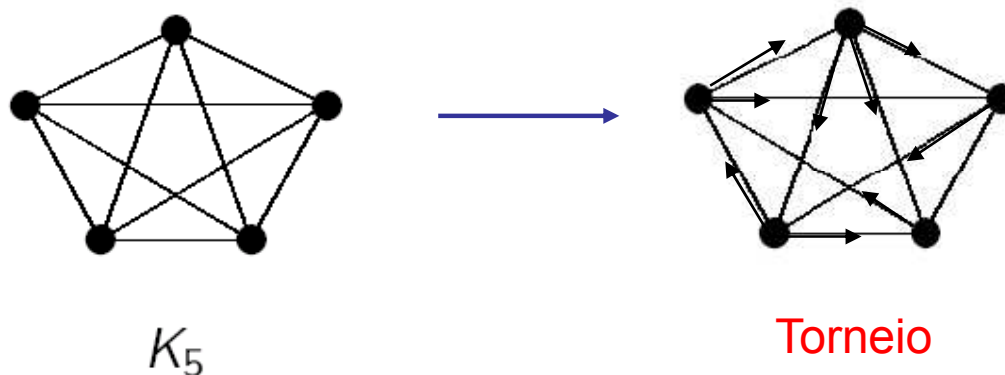


$K_{1,2,3}$

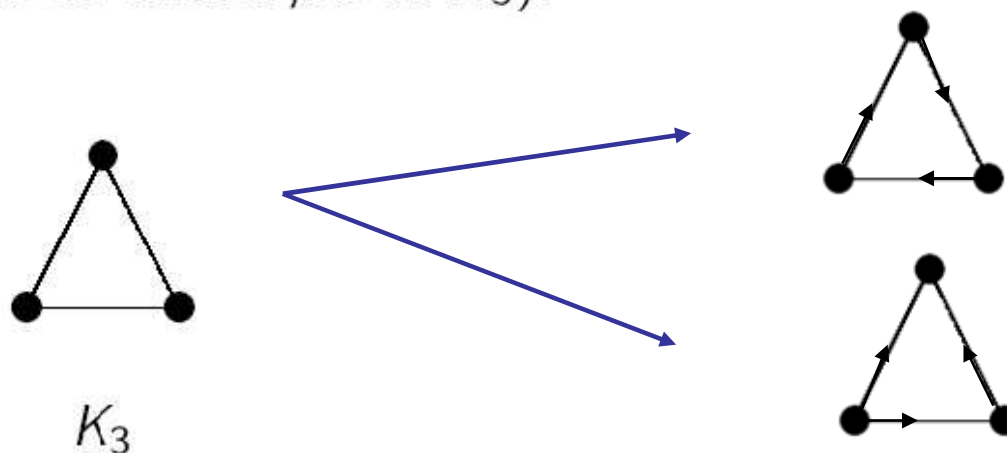
3-partido completo

Se este grafo tiver $n_1, \dots, n_p$ elementos nas classes, representá-lo-emos por $K_{n_1, \dots, n_p}$.

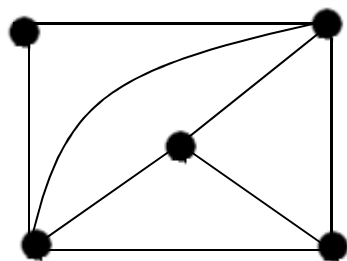
Nota: Chama-se **torneio** a todo o digrafo resultante da orientação de um grafo completo.



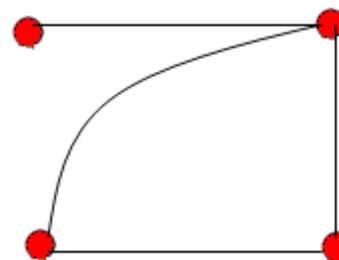
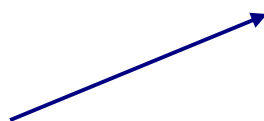
A menos de isomorfismo, há apenas dois torneios com 3 vértices (resultantes da orientação do K_3).



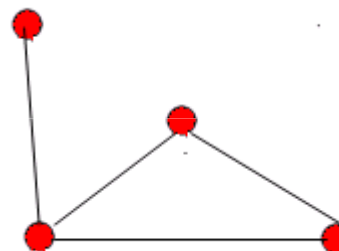
Subgrafos de grafos orientados (não orientados)



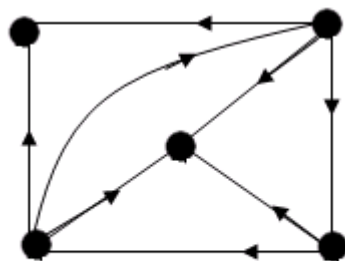
$G = (X, \mathcal{U})$



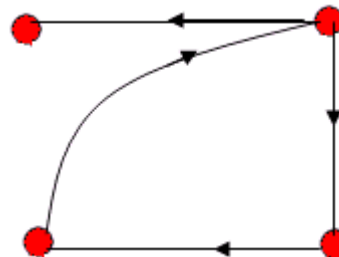
$G' = (X', \mathcal{U}')$
é um subgrafo de G



$G' = (X', \mathcal{U}')$
é um subgrafo de G



$G = (X, \mathcal{U})$

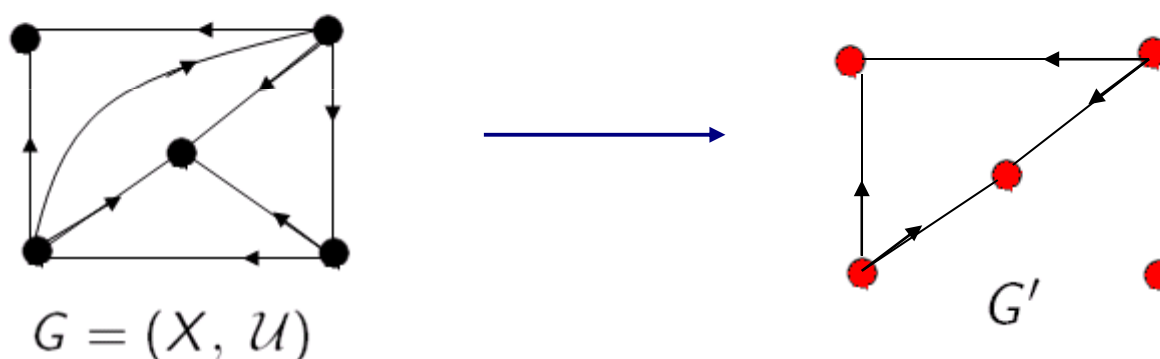


$G' = (X', \mathcal{U}')$
é um subgrafo de G

Diz-se que $G' = (X', \mathcal{U}')$ é um **subgrafo** do grafo orientado (respectivamente, não orientado) $G = (X, \mathcal{U})$ se $X \subseteq X'$ e $\mathcal{U}' \subseteq (X' \times X') \cap \mathcal{U}$ (respectivamente, $\mathcal{U}' \subseteq (X' \otimes X') \cap \mathcal{U}$).

De entre os subgrafos destacamos:

(1) Um grafo $G' = (X, \mathcal{U}')$ com $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ diz-se um **grafo parcial** de G .

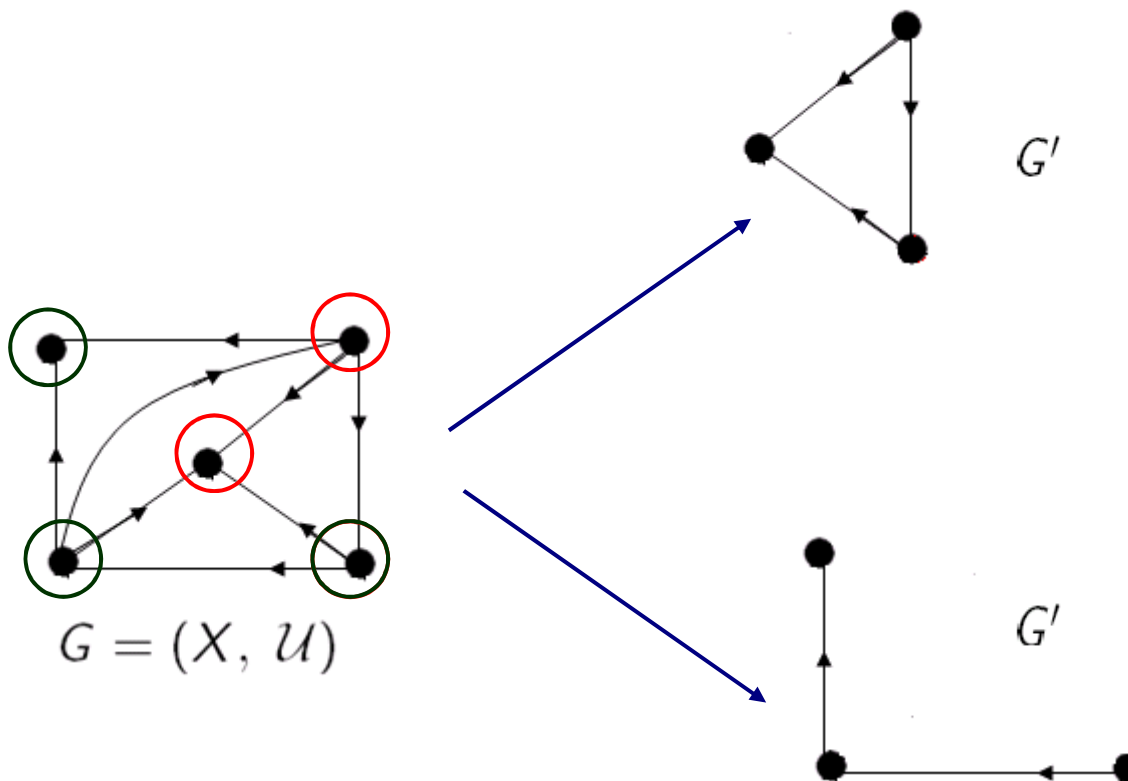


Representa-se G' por $G - \mathcal{U}''$

Arcos que se
retiram a $\mathcal{U}$

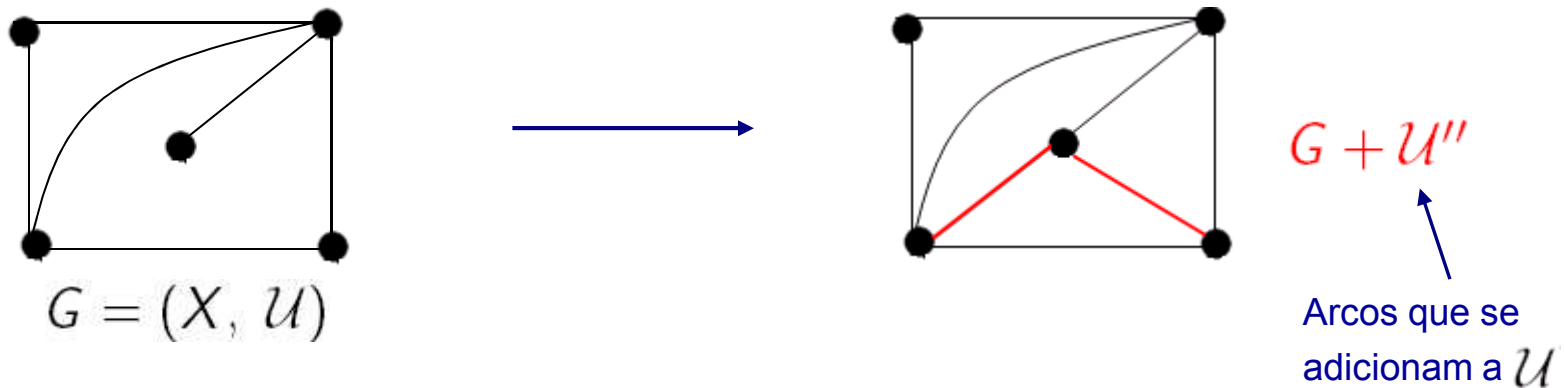
(2) Um grafo $G' = (X', \mathcal{U}')$ com $X \subseteq X'$
 diz-se um **subgrafo de G gerado por X'** se

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}' = (X' \otimes X') \cap \mathcal{U} \\ \text{(caso } G \text{ seja simples)} \\ \text{ou} \\ \mathcal{U}' = (X' \times X') \cap \mathcal{U} \\ \text{(caso } G \text{ seja orientado)} \end{array} \right.$$

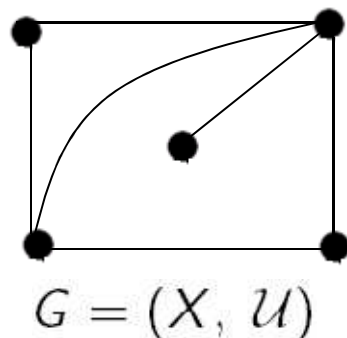


Representa-se G' por $G - X''$. ← Arcos que se retiram a X

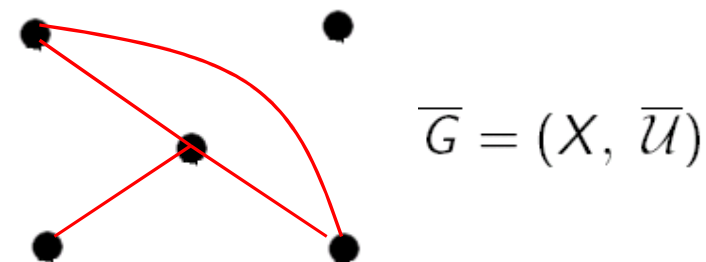
Grafos complementares



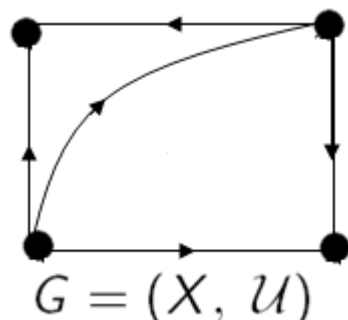
Se $G = (X, \mathcal{U})$ é um grafo orientado (respectivamente, não orientado) e $\mathcal{U}'' \subseteq (X \times X) \setminus \mathcal{U}$ (respectivamente, $\mathcal{U}'' \subseteq (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$) representamos por $G + \mathcal{U}''$ o grafo $(X, \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'')$.



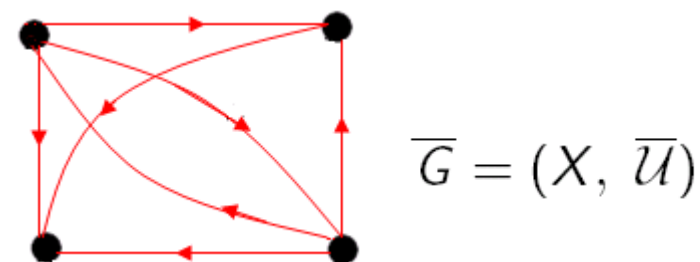
Grafo complementar de G



Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Chama-se **grafo complementar** de G e representa-se por $\overline{G}$, o grafo simples $\overline{G} = (X, \overline{\mathcal{U}})$ em que $\overline{\mathcal{U}} = (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$.



Digrafo complementar de G



Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo. Chama-se **digrafo complementar** de G e representa-se por $\overline{G}$, o digrafo $\overline{G} = (X, \overline{\mathcal{U}})$ em que $\overline{\mathcal{U}} = (X \times X) \setminus (\mathcal{U} \cup \{(x, x) \mid x \in X\})$.