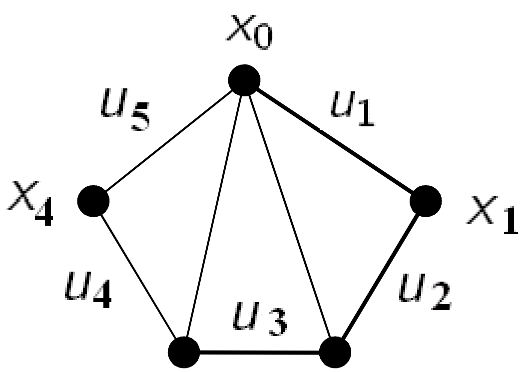
2.2 Conexidade

Definição 2.2.1:

Num multigrafo não orientado (respectivamente, multigrafo orientado) $G = (X, \mathcal{U})$ chama-se cadeia a uma sequência alternada de vértices e arcos de G, iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade no vértice que imediatamente o precede na sequência e a outra extremidade no vértice que imediatamente o sucede na sequência.

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$

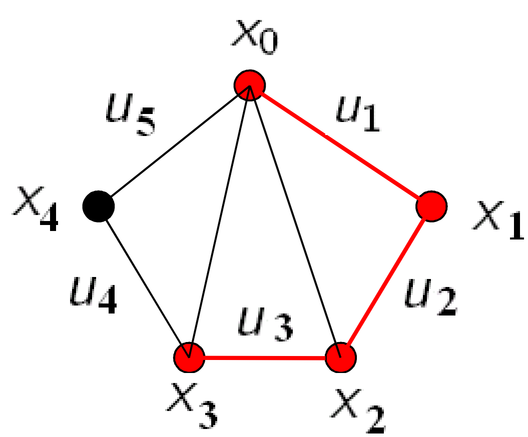


2.2 Conexidade

Definição 2.2.1:

Num multigrafo não orientado (respectivamente, multigrafo orientado) $G = (X, \mathcal{U})$ chama-se cadeia *a uma sequência alternada de vértices e arcos de G, iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade no vértice que imediatamente o precede na sequência e a outra extremidade no vértice que imediatamente o sucede na sequência.*

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$



vértice inicial da cadeia

vértice final da cadeia

$L: \quad x_0, \ u_1, \ x_1, \ u_2, x_2, u_3, x_3$

$\boxed{\text{cadeia } x_0 - x_3}$

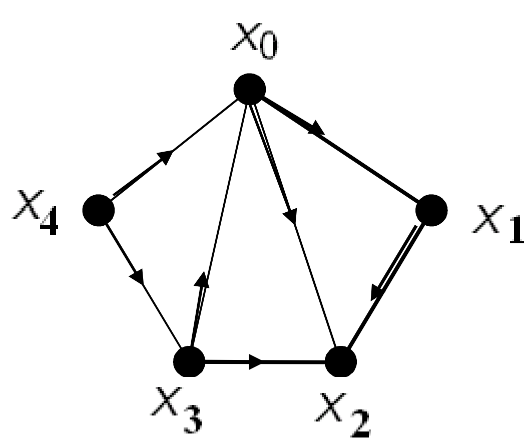
Trata-se, pois, de uma sequência da forma

$$L: \qquad x_0,\ u_1,\ x_1,\ u_2, \ldots,\ u_r,\ x_r$$

com $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, \ldots r\}$, $x_j \in X$, $j \in \{0,\ 1, \ldots,\ r\}$ e em que $u_i = \{x_{i-1},\ x_i\}$ (respectivamente, $u_i = (x_{i-1},\ x_i)$ ou $u_i = (x_i,\ x_{i-1})$), $i \in \{1, \ldots,\ r\}$.

O vértice x_0 diz-se o vértice inicial da cadeia L e o vértice x_r o seu vértice final. Diz-se que x_0 e x_r são as **extremidades** da cadeia L.

Exemplo: $G = (X,\ \mathcal{U})$



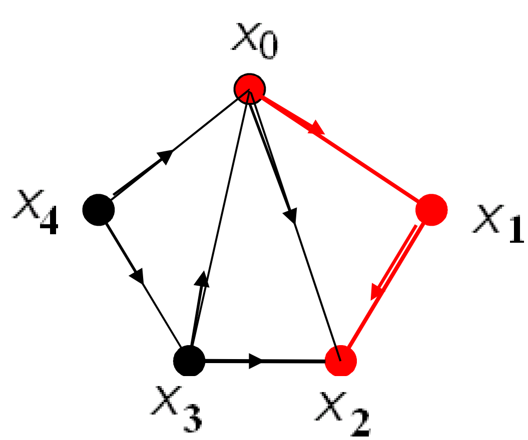
Trata-se, pois, de uma sequência da forma

$$L: \qquad x_0,\ u_1,\ x_1,\ u_2, \ldots,\ u_r,\ x_r$$

com $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, \ldots r\}$, $x_j \in X$, $j \in \{0,\ 1, \ldots,\ r\}$ e em que $u_i = \{x_{i-1},\ x_i\}$ (respectivamente, $u_i = (x_{i-1},\ x_i)$ ou $u_i = (x_i,\ x_{i-1})$), $i \in \{1, \ldots,\ r\}$.

O vértice x_0 diz-se o vértice inicial da cadeia L e o vértice x_r o seu vértice final. Diz-se que x_0 e x_r são as **extremidades** da cadeia L.

Exemplo: $G = (X,\ \mathcal{U})$



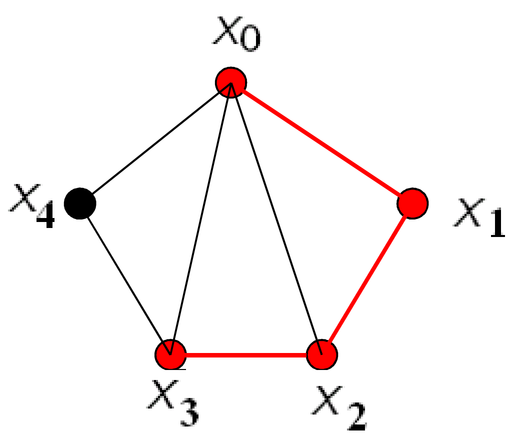
$L_1: \quad x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), x_2$ **cadeia entre x_0 e x_2**

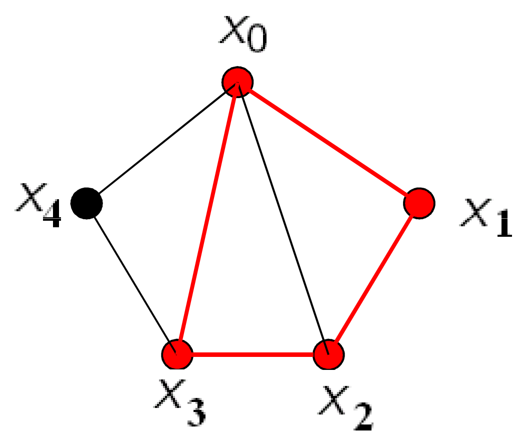
$L_2: \quad x_2, (x_1, x_2), x_1, (x_0, x_1), x_0$ **cadeia entre x_2 e x_1**

Definição 2.2.2:

Uma cadeia cujas extremidades são iguais diz-se uma cadeia fechada, caso contrário, diz-se uma cadeia aberta. O número de arcos de uma cadeia diz-se o seu comprimento.

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$





$L: \quad x_0, \{x_0, x_1\}, x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3$ **Cadeia aberta de comprimento 3**

$C: \quad x_0, \{x_0, x_1\}, x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_0\}, x_0$

Cadeia fechada de comprimento 4

$N: \quad x_0$ **Cadeia fechada de comprimento 0 (cadeia trivial)**

Observação:

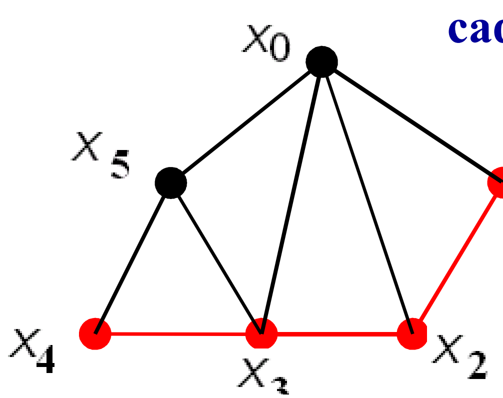
Se $x \in X$, então x é uma de comprimento zero ou cadeias triviais.

As cadeias de comprimento não nulo designam-se não triviais.

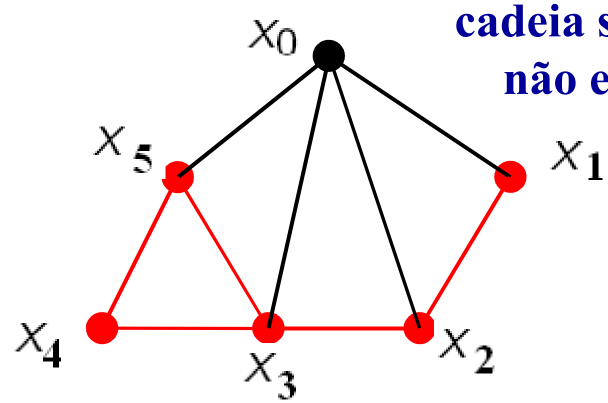
Definição 2.2.3:

Uma cadeia diz-se simples se todos os arcos da cadeia são distintos e diz-se elementar se todos os vértices da cadeia são distintos, à excepção das extremidades que podem coincidir no caso da cadeia ser fechada.

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$



cadeia simples e elementar



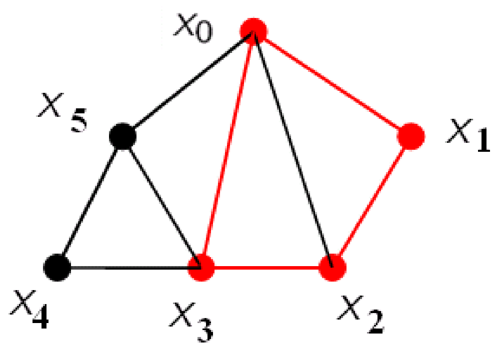
cadeia simples mas não elementar

$$L_1: \; x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_4\}, x_4$$

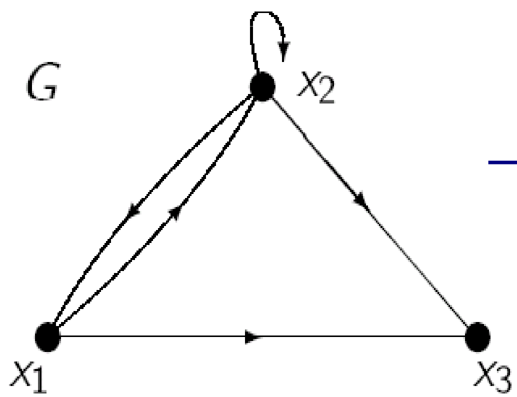
$$L_2: \; x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_4\}, x_4, \{x_4, x_5\}, x_5, \{x_5, x_3\}, x_3$$

Definição 2.2.4:

Uma cadeia simples, fechada e não trivial diz-se um ciclo



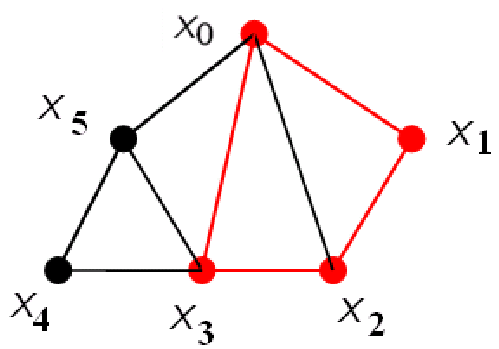
Exemplo: No grafo orientado



→ $x_2,\ (x_2,\ x_2),\ x_2$ é um **ciclo** de comprimento 1

→ $x_1,\ (x_1,\ x_2),\ x_2,\ (x_1,\ x_2),\ x_1$ é uma cadeia não trivial, fechada que é elementar mas não é simples

Observação: Num grafo simples (ou resultante da orientação de um grafo simples), uma cadeia fica completamente determinada se indicarmos a subsequência dos seus vértices.

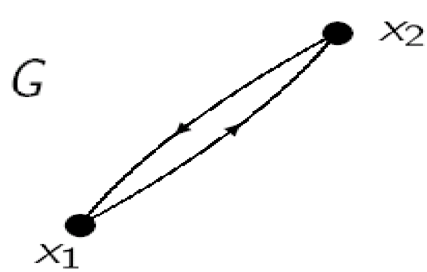


$$L: \ x_0, \{x_0, x_1\}, x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_0\}, x_0$$

A cadeia anterior pode ser representada por

$$L: \ x_0, x_1, x_2, x_3, x_0$$

Num multigrafo e mesmo num grafo orientado tal não sucede.
Por exemplo no grafo orientado



$x_1, \ x_2, \ x_1$

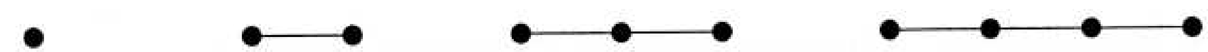
Pode ter mais do que um significado, logo precisamos indicar os arcos

Dois tipos de Grafos simples

Grafo cadeia (P_n)

Grafo ciclo (C_n)

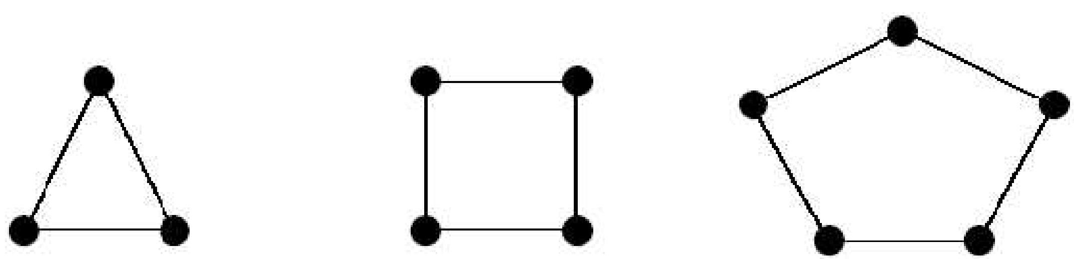
Um grafo simples com n vértices, formado por uma única cadeia elementar aberta, que contenha todos os seus vértices, diz-se um grafo cadeia e denota-se por P_n.



P_1 P_2 P_3 P_4

Um grafo simples com n vértices, regular de grau 2, formado por um único ciclo (elementar) diz-se um grafo ciclo e denota-se por C_n.

n >2

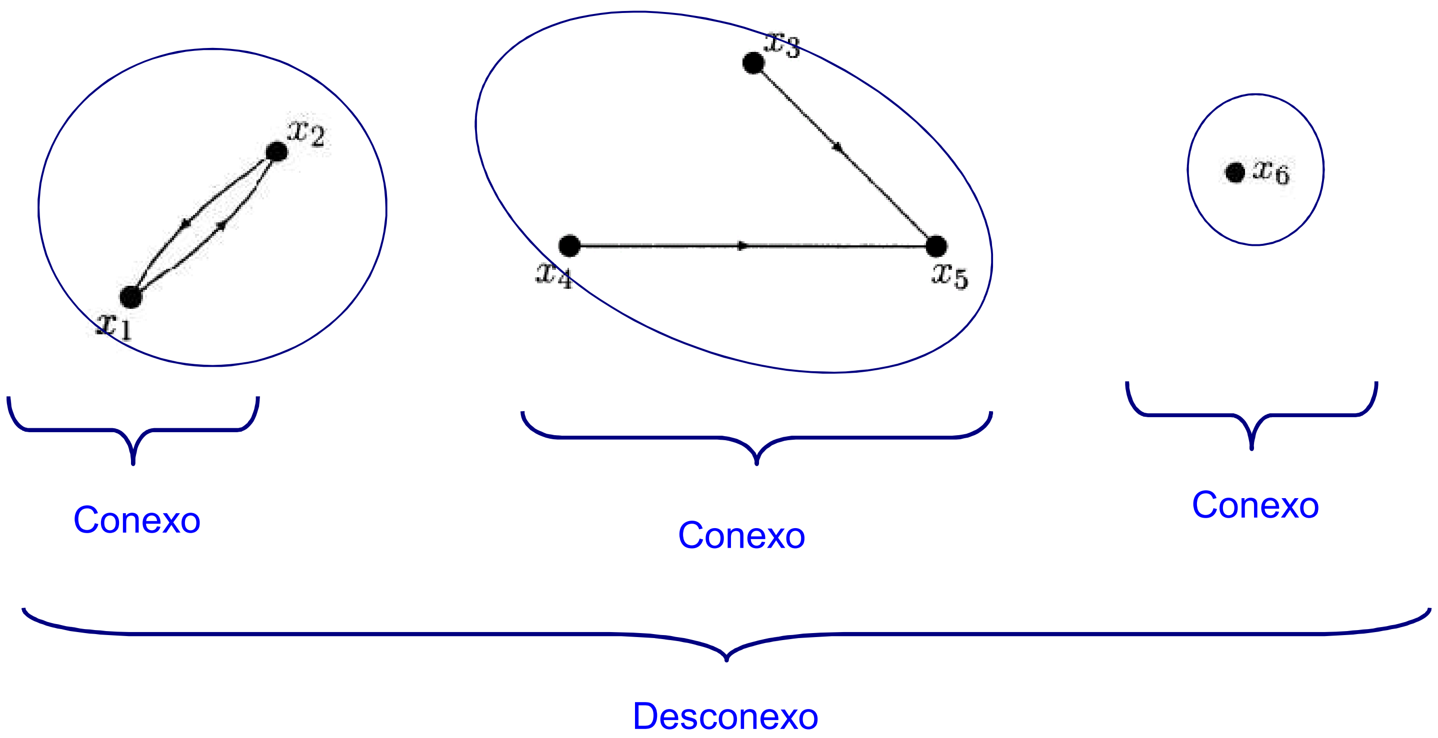


C_3 C_4 C_5

Definição 2.2.5:

Um multigrafo $G = (X, \mathcal{U})$ (orientado ou não) diz-se conexo se, para quaisquer vértices x_i e x_j existe, em G, uma cadeia $x_i - x_j$. Caso contrário diz-se desconexo.

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$



Componentes conexas de G

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo e R a relação binária, definida em X, por

$$x_i \, R \, x_j \quad \text{se, e só se,} \quad \text{existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j.$$

Relação de conexidade

Proposição 2.2.6:

R é uma relação de equivalência.

A relação de equivalência R origina uma partição de X em classes $X_1, \ldots, X_p$ cujo número p se designa por número de conexidade de G.

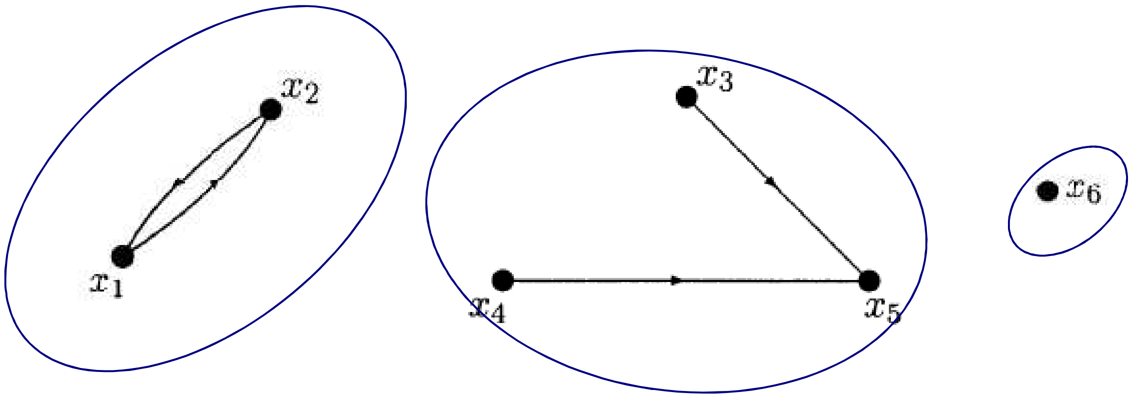
$$X \begin{array}{l} \nearrow X_1 \\ \rightarrow X_2 \\ \searrow \vdots \\ \searrow X_p \end{array}$$

p = número de conexidade

X_i = classe de equivalência para R

Os subgrafos de G, gerados respectivamente por $X_1, \ldots, X_p$ dizem-se as componentes conexas de G e representam-se por $R_1, \ldots, R_p$.

Exemplo: Consideremos o grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$

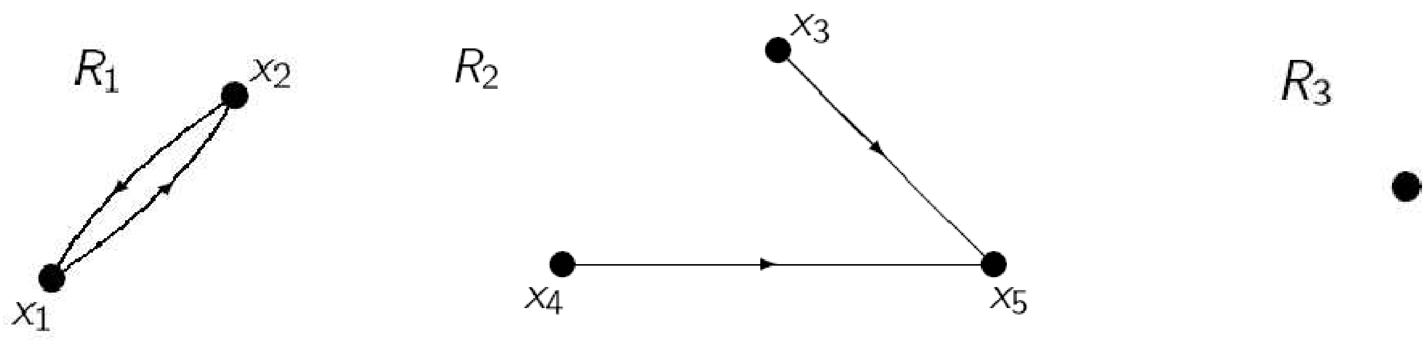


$$\left.\begin{aligned}
&[x_1]_R = \{x_1, x_2\} = [x_2]_R \\
&[x_3]_R = \{x_3, x_4, x_5\} = [x_4]_R = [x_5]_R \\
&[x_6]_R = \{x_6\}
\end{aligned}\right\} \text{Classes de equivalência para a relação R}$$

A relação de equivalência R origina uma partição de X em 3 classes $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$ e $X_3 = \{x_6\}$.

Número de conexidade = 3

Cada classe de equivalência tem associado um subgrafo de G que são as componentes conexas de G:



Observação

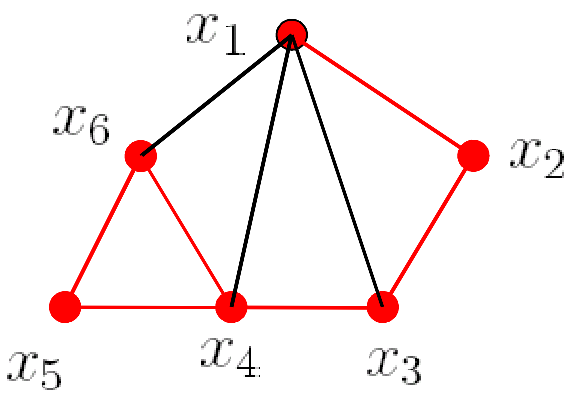
1. As componentes conexas de um grafo são grafos conexos.
2. Um grafo é conexo se e só se o seu número de conexidade é 1.

Alguns resultados sobre cadeias:

Proposição 2.2.7:

Num grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$ existe uma cadeia $x_0 - x_r$ se, e só se, existe uma cadeia $x_0 - x_r$ elementar.

Observação:



$$x_1, x_2, x_3, \overset{\downarrow}{x_4}, x_5, x_6, \overset{\downarrow}{x_4}$$

Cadeia não elementar $x_1 - x_4$

$$\Downarrow$$

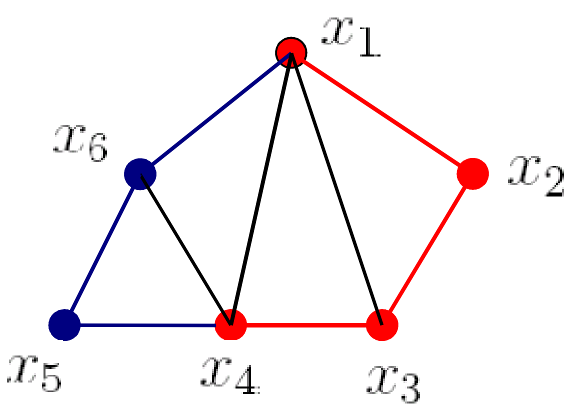
$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

Cadeia elementar $x_1 - x_4$

Proposição 2.2.8:

Sejam $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples e x_0 e x_r dois vértices distintos de G. Se em G existem duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, então em G existe um ciclo.

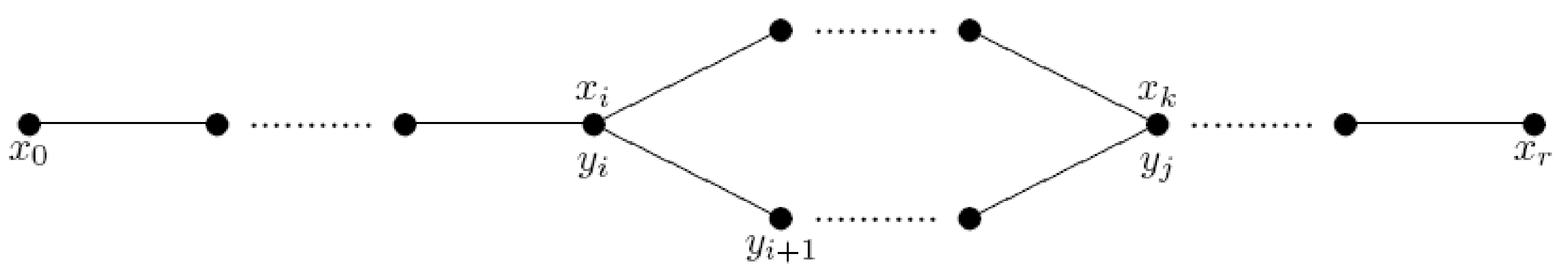
Observação:



$$\left.\begin{array}{r} x_1, x_2, \ x_3, x_4 \\ x_1, x_6, x_5, x_4 \end{array}\right\} \textbf{Cadeias } x_1 - x_4$$

$$\Downarrow$$

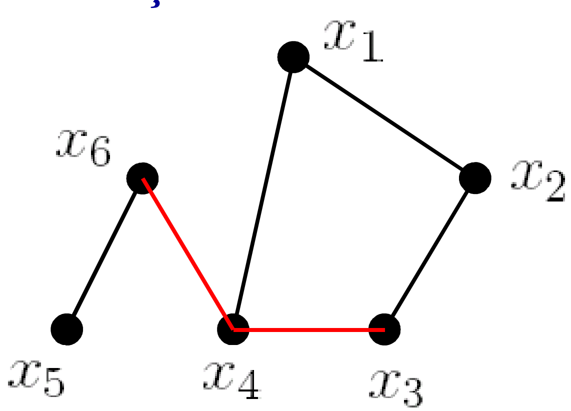
$$x_1, x_2, \ x_3, x_4, x_5, x_6, x_1 \quad \textbf{Ciclo}$$



Proposição 2.2.9:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples sem ciclos. Se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G + u$ tem, no máximo, um ciclo.

Observação:



Acrescentando o arco $\{x_4, x_6\}$ continuamos sem ciclos, mas acrescentado $\{x_4, x_3\}$ passamos a ter um ciclo (no máximo um).

Teorema 2.2.10:

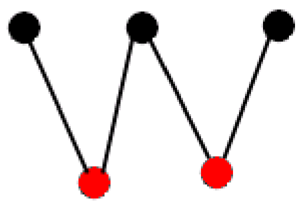
Um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, é bipartido se, e só se, não tem ciclos de comprimento ímpar.

Teorema 2.2.10:

Um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, é bipartido se, e só se, não tem ciclos de comprimento ímpar.

Observação:

(1)

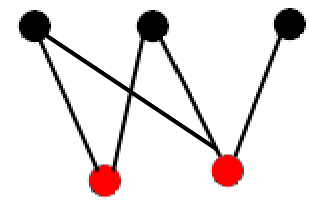


$\longrightarrow X_1$

$\longrightarrow X_2$

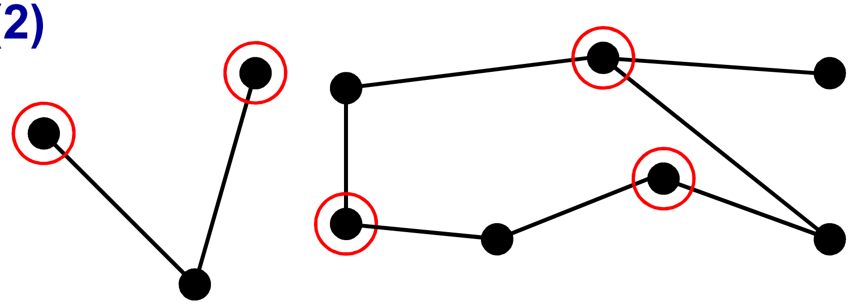
Grafo bipartido sem ciclos

$$X = X_1 \dot{\cup} X_2$$



Grafo bipartido com ciclos

(2)

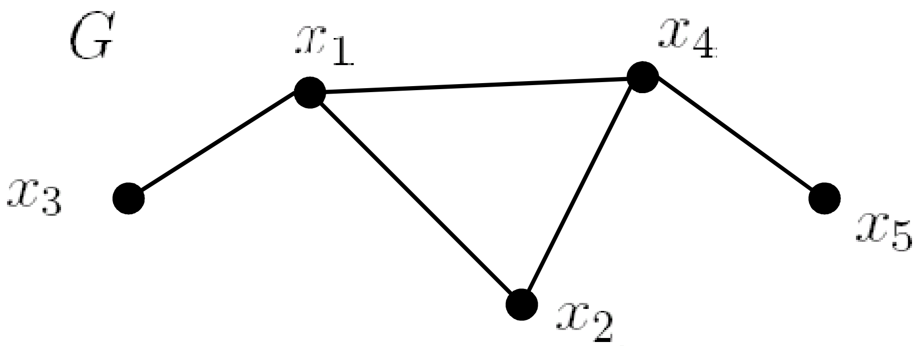


Como não tem ciclos de comprimento Ímpar, pelo teorema sabe-se que o grafo é bipartido.

Definição 2.2.11:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Diz-se que $u \in \mathcal{U}$ é uma ponte de G se o número de conexidade de $G - u$ é superior ao número de conexidade de G.

Exemplo:

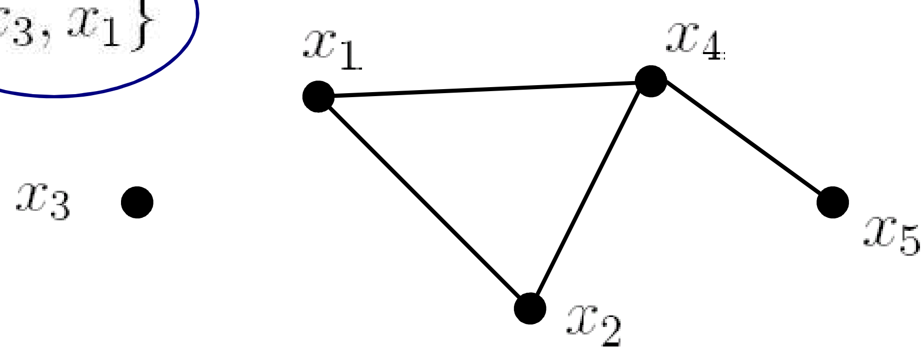


1

número de conexidade G

Ponte

$G - \{x_3, x_1\}$



2

número de conexidade