

Alguns resultados sobre cadeias:

Proposição 2.2.7:

Num grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$ existe uma cadeia $x_0 - x_r$ se, e só se, existe uma cadeia $x_0 - x_r$ elementar.

Demonstração $\Rightarrow$ Se $x_0 = x_r$, a cadeia trivial x_0 é elementar. Suponhamos que $x_0 \neq x_r$. Seja L uma cadeia $x_0 - x_r$ e x um vértice arbitrário de L . Se x ocorre mais do que uma vez na cadeia L então elimine-se a subsequência de L compreendida entre a primeira e a última ocorrência de x , bem como uma dessas ocorrências. Obtém-se, ainda, uma cadeia $x_0 - x_r$, mas em que x já não aparece repetido.

Repita-se este procedimento para todo o vértice que ocorra repetido em L . Obtém-se então uma cadeia sem vértices repetidos e, portanto, uma cadeia $x_0 - x_r$ elementar.

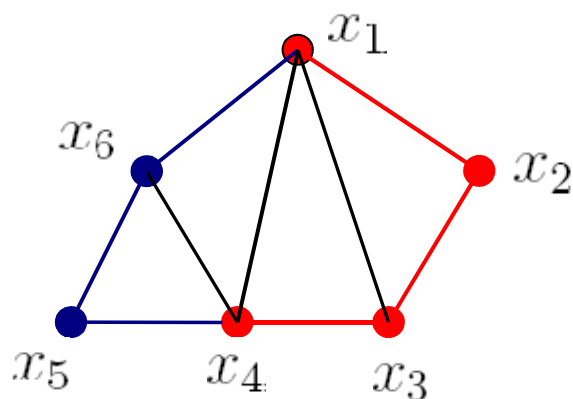
$\Leftarrow$ Imediato.

□

Proposição 2.2.8:

Sejam $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples e x_0 e x_r dois vértices distintos de G . Se em G existem duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, então em G existe um ciclo.

Observação:



$$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, x_4 \\ x_1, x_6, x_5, x_4 \end{array} \right\} \text{Cadeias } x_1 - x_4$$
$$\Downarrow$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1 \quad \text{Ciclo}$$

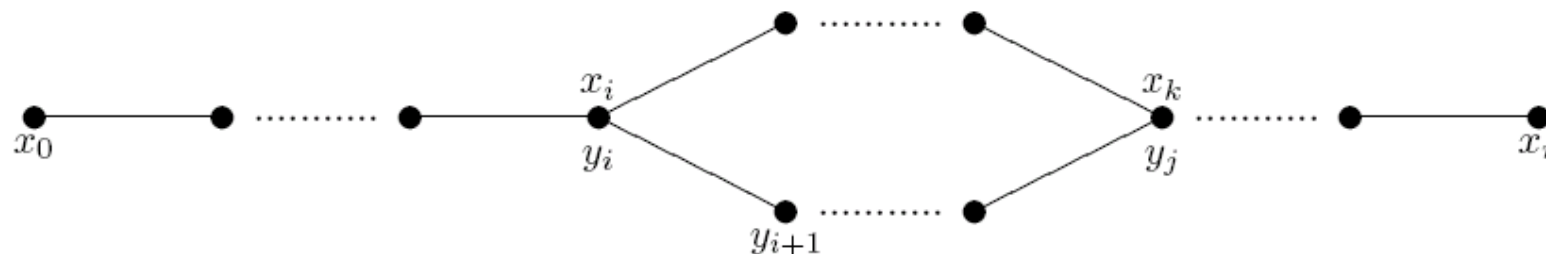
Proposição 2.2.8:

Sejam $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples e x_0 e x_r dois vértices distintos de G . Se em G existem duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, então em G existe um ciclo.

Demonstração Sejam

$$L_1: x_0, x_1, x_2, \dots, x_r \quad \text{e} \quad L_2: x_0, y_1, y_2, \dots, x_r$$

duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, existentes em G . Seja i o índice mínimo para o qual $x_{i+1} \neq y_{i+1}$ e j o índice mínimo tal que $j > i$ e y_j é vértice de L_1 , isto é, $y_j = x_k \in L_1$.



Então,

$$x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, y_{j-1}, \dots, y_{i+1}, y_i$$

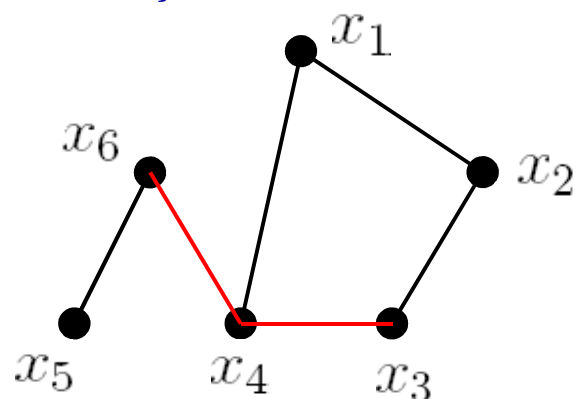
é um ciclo de G .

□

Proposição 2.2.9:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples sem ciclos. Se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G + u$ tem, no máximo, um ciclo.

Observação:



Acrescentando o arco $\{x_4, x_6\}$ continuamos sem ciclos, mas acrescentado $\{x_4, x_3\}$ passamos a ter um ciclo (no máximo um).

Demonstração Suponhamos que em $G + u$ existiam pelo menos dois ciclos e sejam C_1 e C_2 dois desses ciclos. Se o arco u não pertencesse aos dois ciclos, então concluiríamos que $(G + u) - u = G$ tinha um ciclo, o que é impossível.

Portanto, $u = \{x, y\}$ é arco de C_1 e de C_2 . Então existiam duas cadeias $x - y$ elementares distintas, não incluindo o arco u . Consequentemente, estas cadeias existiam também em G . Mas isto implicaria que G tinha um ciclo, o que é impossível.

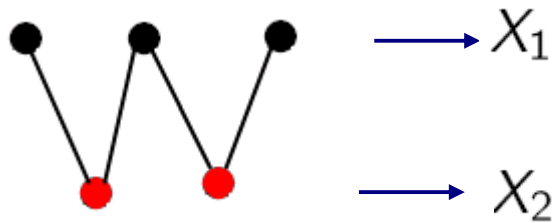
Portanto, em $G + u$ existe, no máximo, um ciclo. □

Teorema 2.2.10:

Um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, é bipartido se, e só se, não tem ciclos de comprimento ímpar.

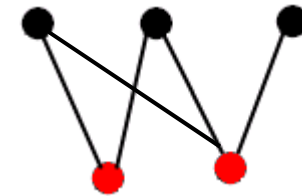
Observação:

(1)



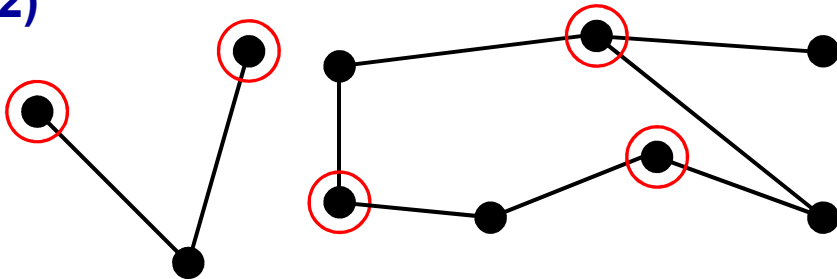
Grafo bipartido sem ciclos

$$X = X_1 \cup X_2$$



Grafo bipartido com ciclos

(2)

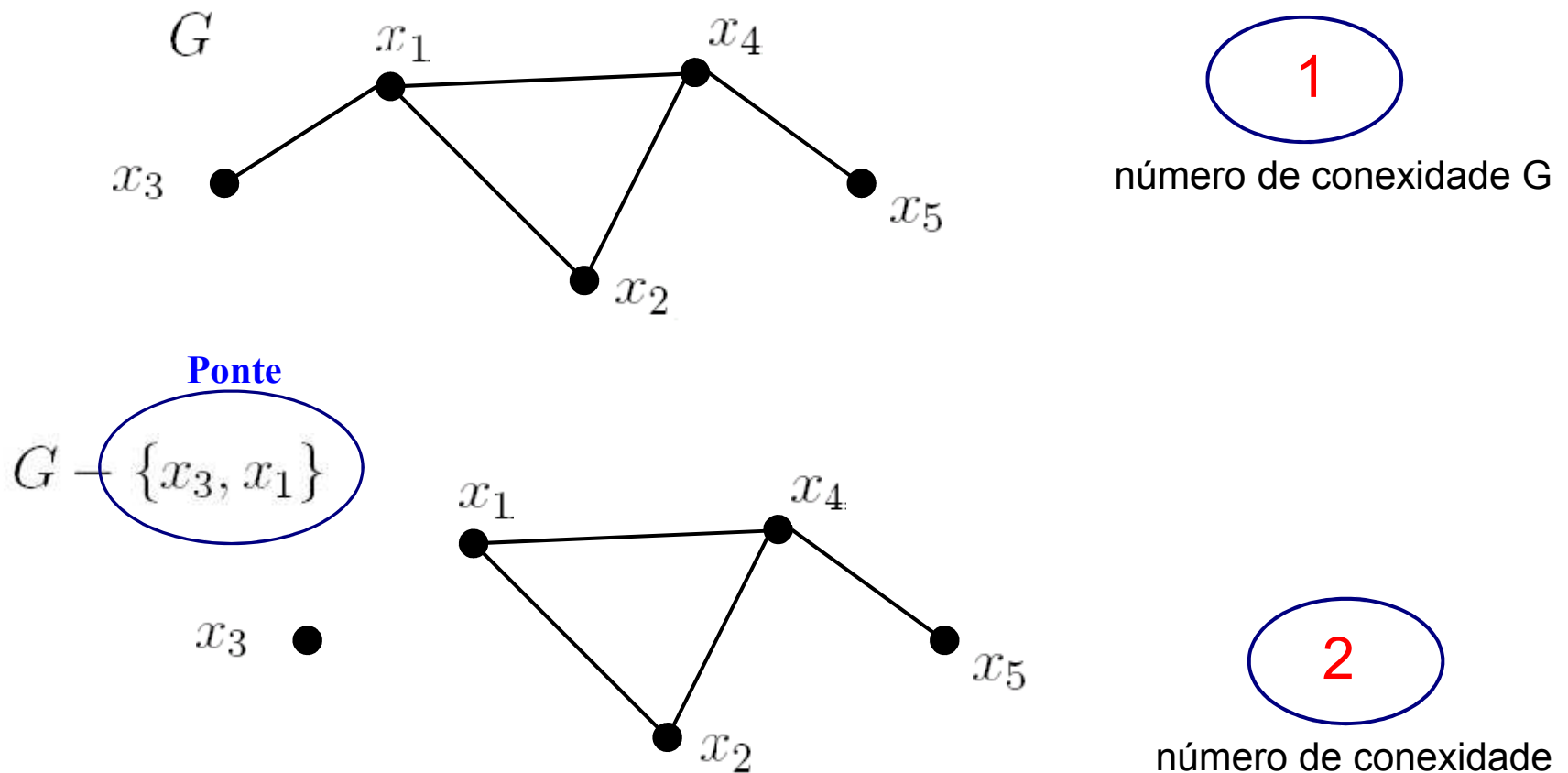


Como não tem ciclos de comprimento ímpar, pelo teorema sabe-se que o grafo é bipartido.

Definição 2.2.11:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Diz-se que $u \in \mathcal{U}$ é uma **ponte** de G se o número de conexidade de $G - u$ é superior ao número de conexidade de G .

Exemplo:



Observação: Se $G = (X, U)$ é um grafo simples com número de conexidade p e $u \in U$ é uma ponte, então $G - u$ tem número de conexidade $p + 1$.

Boa caracterização
das pontes



Proposição 2.2.11:

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples. Então $u \in U$ é uma ponte se, e só se, u não faz parte de nenhum ciclo.

Demonstração Dado que todo o arco de G tem extremidades, em vértices da mesma componente conexa, podemos supor que G é conexo.

$\Leftarrow$ Suponhamos que $u = \{x, y\}$ não é ponte. Então, $G - u$ é conexo, pelo que existe uma cadeia elementar $x - y$, em $G - u$. Então,

$$x - y, \{x, y\}, x$$

é um ciclo em G ao qual u pertence.

$\implies$ Suponhamos que $u = \{x, y\}$ faz parte de um ciclo,

$$x, y, y_1, \dots, y_k, x.$$

Sejam x_i, x_j vértices de $G, i \neq j$. Como G é conexo, existe uma cadeia elementar $x_i - x_j$. Se u não é arco desta cadeia, então a cadeia $x_i - x_j$, é cadeia em $G - u$. Se u é arco da cadeia, então $x_i - x_j$ é cadeia

$$x_i, \dots, x, y, \dots, x_j$$

pelo que,

$$x_i, \dots, x, y_k, \dots, y_1, y, \dots, x_j$$

também é cadeia $x_i - x_j$, só que não inclui o arco u . Portanto, cadeia em $G - u$. Logo, $G - u$ é conexo, ou seja, u não é ponte. $\square$

Proposição 2.2.12:

Um grafo simples G e o seu grafo complementar $\overline{G}$ não podem ser ambos desconexos.

Observação:



Proposição 2.2.12:

Um grafo simples G e o seu grafo complementar $\overline{G}$ não podem ser ambos desconexos.

Demonstração Suponhamos que G é desconexo e vejamos que $\overline{G}$ é conexo.

Sejam x_i, x_j dois vértices de G .

Se $x_i = x_j$, tem-se a cadeia trivial. Suponhamos que $x_i \neq x_j$. Se $\{x_i, x_j\}$ não é arco de G , então é arco de $\overline{G}$, pelo que x_i, x_j é cadeia $x_i - x_j$ em $\overline{G}$.

Se $\{x_i, x_j\}$ é arco de G , então x_i e x_j pertencem à mesma componente conexa de G . Como G é desconexo, existe um vértice x_k que não pertence à componente conexa de x_i e x_j , em G . Então, $\{x_i, x_k\}$ e $\{x_k, x_j\}$ não são arcos de G , pelo que o são de $\overline{G}$. Assim,

$$x_i, x_k, x_j$$

é cadeia $x_i - x_j$ em $\overline{G}$. Logo, $\overline{G}$ é conexo.

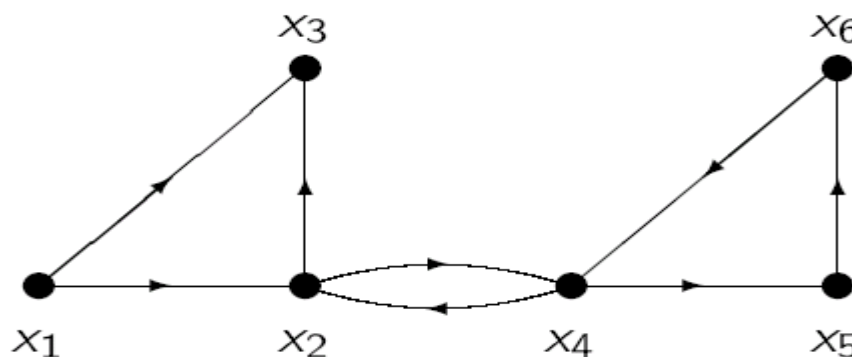
Se $\overline{G}$ fosse desconexo, então por um raciocínio análogo, $\overline{\overline{G}} = G$ é conexo. Logo, G e $\overline{G}$ não podem ser ambos desconexos. $\square$

Noção de caminho (multigrafos orientados):

Definição 2.2.13:

Num multigrafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ chama-se **caminho** a uma sequência alternada de vértices e arcos de G , iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade inicial no vértice que imediatamente o precede na sequência e extremidade final no vértice que imediatamente lhe sucede na sequência.

Exemplo: Seja $G = (X, \mathcal{U})$



$L : x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_2, x_4), x_4, (x_4, x_5), x_5$

Caminho (cadeia)

$C : x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_4, x_2), x_4, (x_4, x_5), x_5$

**Cadeia que não é
um caminho**

Trata-se de uma sequência da forma

$L : \quad x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, u_r, x_r$

em que $x_i \in X, i = 0, \dots, r$, e $u_i = (x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{U}, i = 1, \dots, r$.

L é um caminho $x_0 - x_r$ **vértice inicial** **vértice final**

As definições de caminho fechado/aberto, comprimento de um caminho, caminho simples, caminho elementar, ..., obtêm-se substituindo, nas correspondentes definições para cadeias, "cadeia" por "caminho".

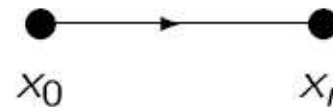
Definição 2.2.14:

*Um caminho simples, fechado e não trivial diz-se um **circuito**.*

não repete arcos

Observações:

- 1 Se L é um caminho $x_0 - x_r$ num multigrafo orientado G então L é também uma cadeia $x_0 - x_r$.
- 2 Num grafo orientado pode existir um caminho $x_0 - x_r$ e não existir nenhum caminho $x_r - x_0$.



- 3 Num digrafo, um caminho fica completamente determinado se indicarmos apenas a subsequência dos seus vértices.

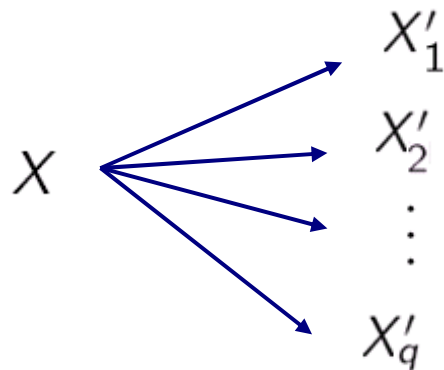
Definição 2.2.15:

Um multigrafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ diz-se **fortemente conexo** se, para quaisquer dois vértices x_i e x_j , existem em G um caminho $x_i \rightarrow x_j$ e um caminho $x_j \rightarrow x_i$.

Componentes fortemente conexas de G

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo orientado e S a relação binária, definida em X , por: para quaisquer $x_i, x_j \in X$,

$x_i S x_j$ se, e só se, existem em G um caminho $x_i \rightarrow x_j$ e um caminho $x_j \rightarrow x_i$.
 $\swarrow$
 S é relação de equivalência



q = número de conexidade forte

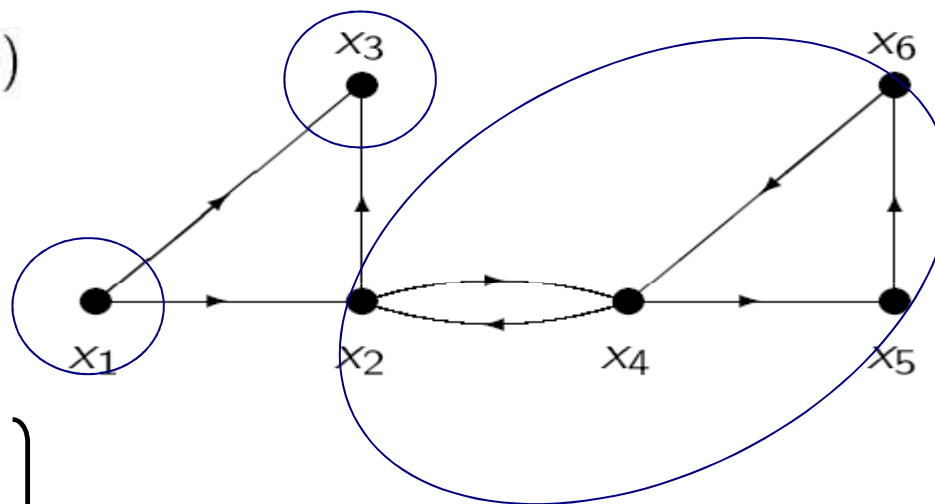
X'_i = classe de equivalência para S

Sejam $X'_1, \dots, X'_q$ as suas classes de equivalência.

Ao número q chama-se **número de conexidade forte** de G .

Os subgrafos gerados por $X'_1, \dots, X'_q$ dizem-se as **componentes fortemente conexas** de G e representam-se, respectivamente, por $S_1, \dots, S_q$.

Exemplo: Seja $G = (X, \mathcal{U})$



$$[x_1]_S = \{x_1\}$$

$$[x_2]_S = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$$

$$[x_3]_S = \{x_3\}$$

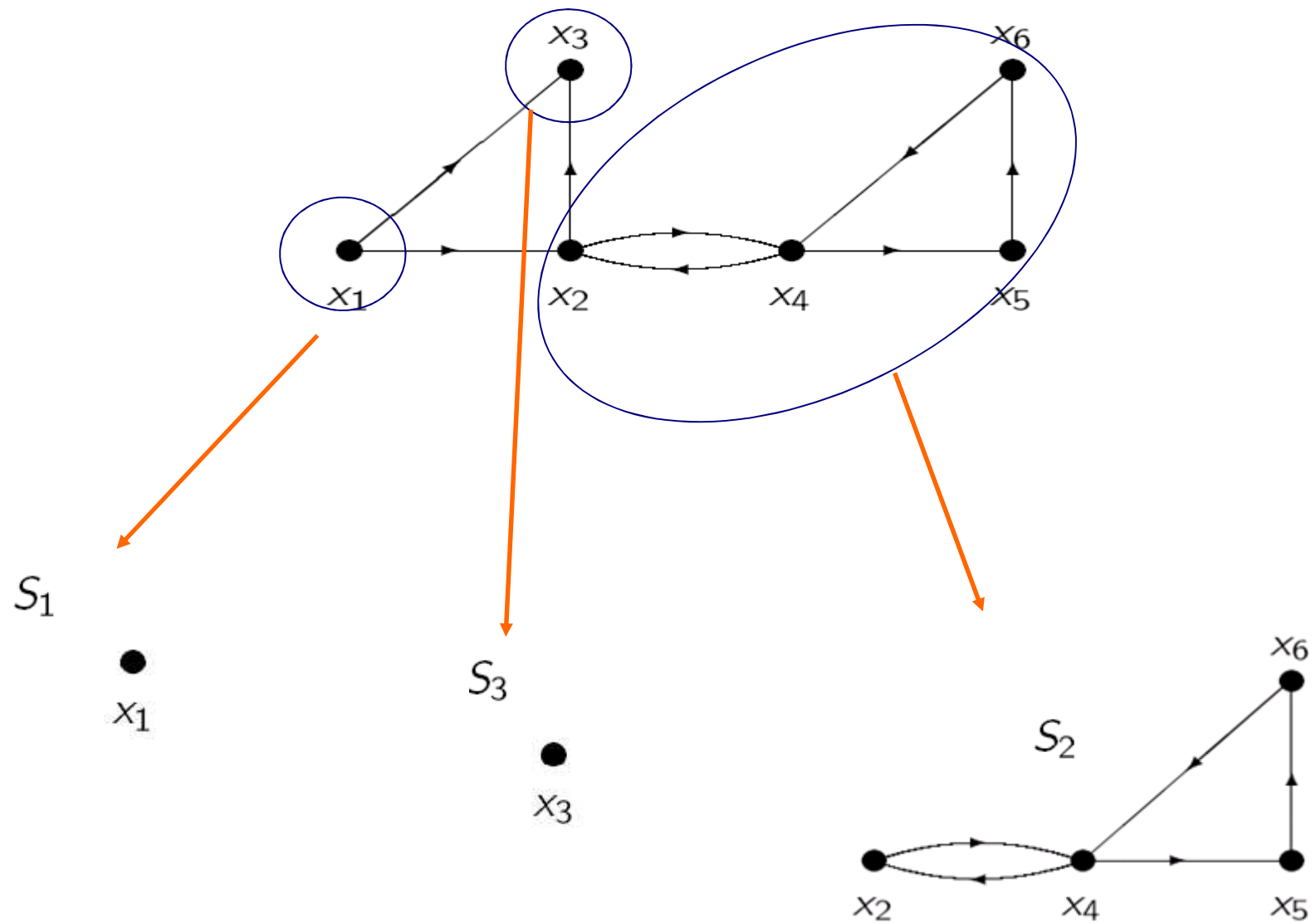
} Classes de equivalência da relação S

A relação S origina uma partição de X em 3 classes de equivalência:

$$X'_1 = \{x_1\}; X'_2 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\} \text{ e } X'_3 = \{x_3\}.$$

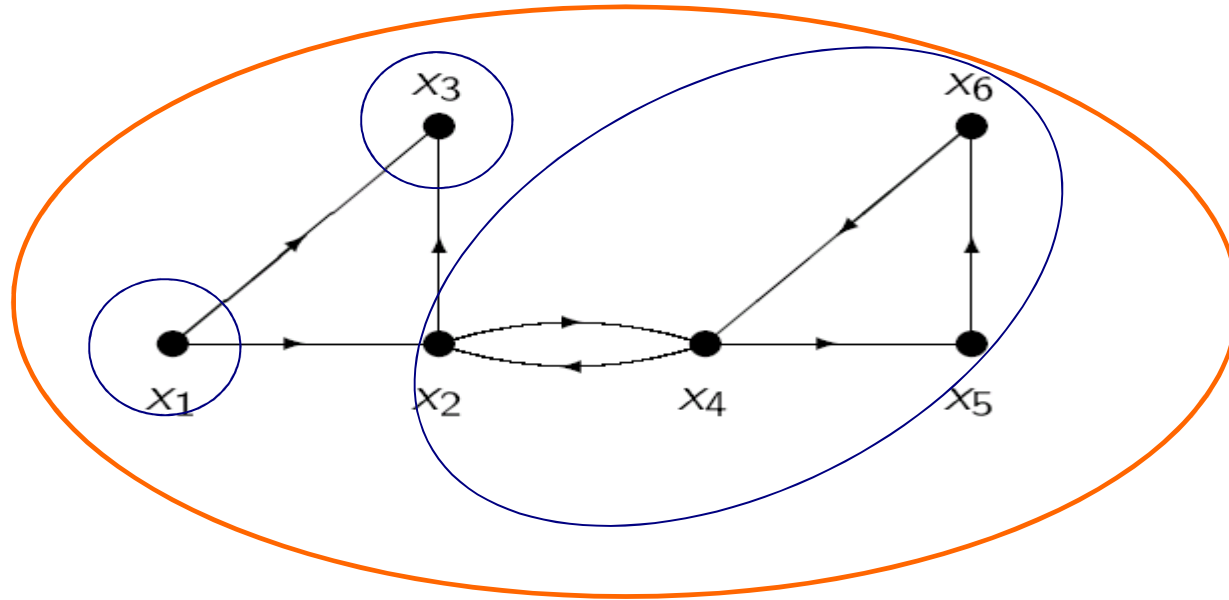
**Número de
conexidade forte = 3**

Assim, as componentes fortemente conexas de G são:



Comparação entre as **componentes conexas** e as **componentes fortemente conexas**:

$$G = (X, \mathcal{U})$$



Para $G = (X, \mathcal{U})$ temos : **1** componente conexa;
3 componentes fortemente conexas;

Proposição 2.2.15:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo orientado. Então:

- (i) Um arco de G pode não pertencer a nenhuma componente fortemente conexa;*
- (ii) Um arco de G não pode pertencer a mais do que uma componente fortemente conexa;*
- (iii) Um arco de G pertence a uma componente fortemente conexa se, e só se, faz parte de um circuito.*

Proposição 2.2.16:

Seja G um digrafo. Se G é desconexo então o seu digrafo complementar $\overline{G}$ é fortemente conexo.