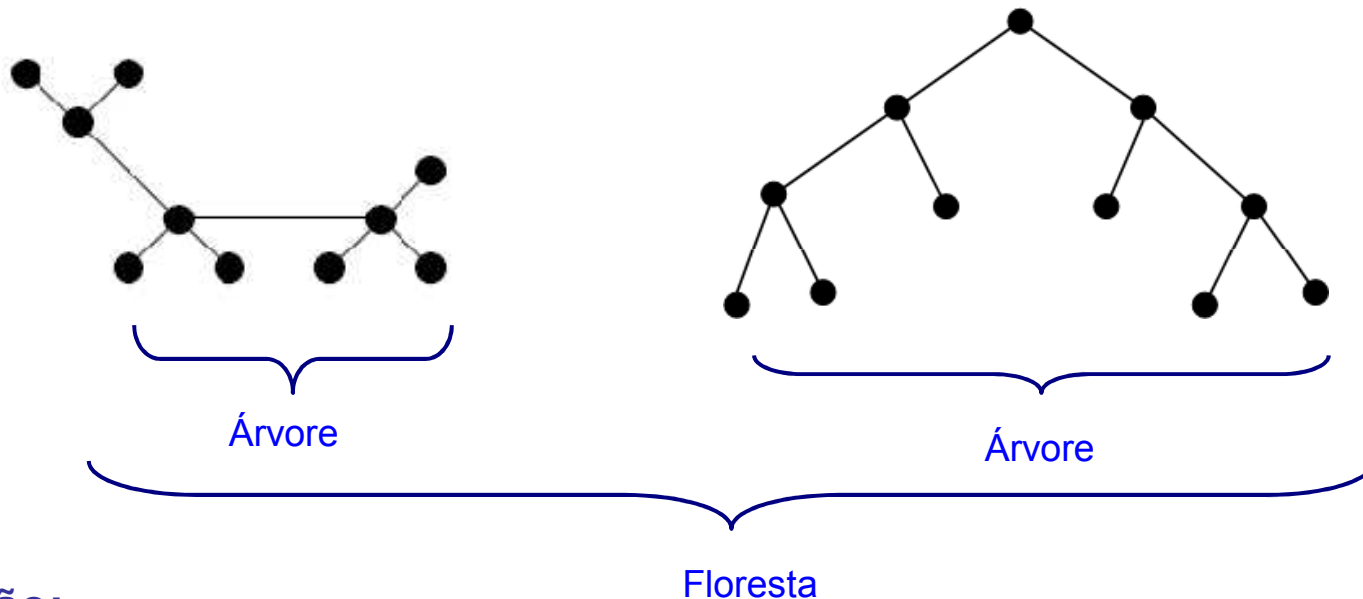


2.3 Árvores

Definição 2.3.1:

Um grafo conexo sem ciclos diz-se uma **Árvore**.

Um grafo sem ciclos diz-se uma **Floresta**



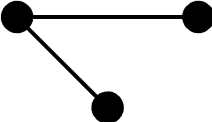
Observação:

- 1 Uma **Árvore** é um grafo conexo onde todos os arcos são pontes.
- 2 Uma **Floresta** é um grafo onde cada componente conexa é uma árvore.

Questão: Quantos arcos tem uma árvore com n vértices ?

$n=1$  $\Rightarrow$ 0 arcos

$n=2$  $\Rightarrow$ 1 arcos

$n=3$  $\Rightarrow$ 2 arcos

$\vdots$

$n=k$ $\Rightarrow$ $k-1$ arcos, k natural

Conclusão: Uma árvore com n vértices tem $n-1$ arcos (Prova-se por indução completa)

Teorema 2.3.2: Toda a árvore com n vértices tem $n - 1$ arcos (n um natural).

Dem: Usemos o princípio de indução completa.

$n=1$ É claro que para $n=1$ a árvore tem de ter 0 arcos, pois coincide com o grafo



Hipótese: Suponha-se que toda a árvore com k vértices, em que $1 \leq k \leq n$, tem $k - 1$ arcos (para algum n).

Tese: Mostre-se que uma árvore com $n+1$ vértices tem n arcos ($n \geq 2$)

Teorema 2.3.2: Toda a árvore com n vértices tem $n - 1$ arcos (n um natural).

Dem: Usemos o princípio de indução completa.

$n=1$ É claro que para $n=1$ a árvore tem de ter 0 arcos, pois coincide com o grafo



Hipótese: Suponha-se que toda a árvore com k vértices, em que $1 \leq k \leq n$, tem $k - 1$ arcos (para algum n).

Tese: Mostre-se que uma árvore com $n+1$ vértices tem n arcos ($n \geq 2$)

Seja $G' = (X', U')$ uma árvore com $n+1$ vértices. Seja $\bar{u}' \in U'$ um arco.

Como G' é árvore então $\bar{u}'$ é uma ponte pelo que $G' - \bar{u}'$ é desconexo com duas componentes conexas R_1 e R_2 com k_1 e k_2 vértices respectiva/.

Tem-se,

$$k_1 + k_2 = n+1.$$

Como R_1 e R_2 são árvores, por hipótese de indução, R_1 tem $k_1 - 1$ arcos e R_2 tem $k_2 - 1$. Assim, $G' - \bar{u}'$ tem $k_1 + k_2 - 2$ arcos, logo G' tem n arcos.

Efectivamente,

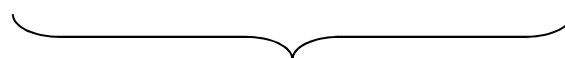
$$(K_1 + K_2 - 2) + 1 = n \quad (\text{nº de arcos de } G'). \quad \square$$

Questão: Quantos arcos tem uma floresta com n vértices ?

Depende do número de árvores que a constituem.

Proposição 2.3.3:

Uma floresta com n vértices e p componentes conexas tem $n - p$ arcos.



p árvores

Dem: Seja $G = (X, \mathcal{U})$ uma floresta constituída por p componentes conexas com $n_1, n_2, \dots, n_p$ vértices, respectivamente. Tem-se obviamente,

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p = n.$$

Como cada componente conexa é uma árvore, então

$$R_i \text{ tem } n_i - 1 \text{ arcos, } i=1, 2, \dots, p.$$

Assim, G tem

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_p - 1) = n - p, \text{ arcos. } \square$$

Teorema 2.3.4:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices. Então são equivalentes as afirmações:

- (i) G é um grafo conexo sem ciclos. $\leftarrow$ (G é árvore)
- (ii) G não tem ciclos e tem $n - 1$ arcos.
- (iii) G é conexo e tem $n - 1$ arcos.
- (iv) G é conexo e se $u \in \mathcal{U}$ então $G - u$ é desconexo.
- (v) $\forall x_i, x_j \in X$, tais que $x_i \neq x_j$ existe uma, e uma só, cadeia elementar $x_i - x_j$, em G .
- (vi) G não tem ciclos e se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G + u$ tem um, e um só, ciclo.

Observação: Um grafo conexo com n vértices e $n - 1$ arcos é uma árvore

Dem:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por indução em n .

Para $n = 2$ o resultado é verdadeiro.

Suponhamos o resultado verdadeiro para todo o grafo conexo sem ciclos com um número de vértices inferior ou igual a k , com $k \geq 2$.

Seja $G' = (X', \mathcal{U}')$ um grafo conexo sem ciclos com $k + 1$ vértices. Como G' não tem ciclos, todo o arco $u' \in \mathcal{U}'$ é uma ponte.

Logo, $G' - u'$, com $u' \in \mathcal{U}'$, tem duas componentes conexas R_1 e R_2 com k_1 e k_2 vértices, respectivamente. Como R_1 e R_2 são grafos conexos sem ciclos, por hipótese de indução, o número de arcos de R_1 é $k_1 - 1$ e o número de arcos de R_2 é $k_2 - 1$. Porque $1 + k = k_1 + k_2$ e o número de arcos de G' é $1 + k_1 - 1 + k_2 - 1$, temos

$$1 + k_1 - 1 + k_2 - 1 = 1 + k - 1 = k.$$

Dem(cont.):

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G não é conexo e sejam $R_1, \dots, R_p$ as componentes conexas de G , com $p \geq 2$. Sejam n_i e m_i , respectivamente, o número de vértices e o número de arcos de R_i , $i = 1, \dots, p$. Porque R_i é conexo sem ciclos, temos

$$m_i = n_i - 1 \quad i = 1, \dots, p.$$

então, o número de arcos de G seria

$$\sum_{i=1}^p m_i = \sum_{i=1}^p n_i - p = n - p.$$

Como $p \geq 2$, concluiríamos que o número de arcos de G

$$n - p \leq n - 2,$$

o que contradiz a hipótese.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Dado que G tem n vértices e $n - 1$ arcos, então para qualquer $u \in \mathcal{U}$, $G - u$ tem n vértices e $n - 2$ arcos. Demonstremos que se $G' = G - u$ fosse conexo então o seu número de arcos m' verificaria $m' \geq n - 1$, o que é uma contradição com $m' = n - 2$. De facto se G' fosse conexo sem ciclos então por (i) $\Rightarrow$ (ii) teríamos $m' = n - 1$. Por outro lado se G' fosse conexo com ciclos então retirando arcos pertencentes a ciclos obteríamos um grafo parcial de G ainda conexo e sem ciclos em que $m' > n - 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Como G é conexo, então para quaisquer dois vértices de G existe uma cadeia elementar, da qual são extremidades.

Se existissem dois vértices distintos de G que fossem extremidades de pelo menos duas cadeias elementares distintas, então, em G , existiria um ciclo. Sendo u um arco deste ciclo, como u não era ponte, $G - u$ era conexo, o que contradiz a hipótese.

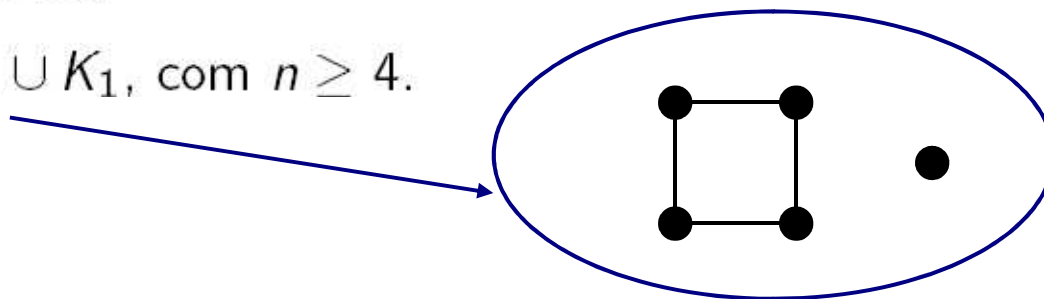
(v) $\Rightarrow$ (vi) Se em G existisse um ciclo, então sendo x e y dois vértices distintos deste ciclo, existiriam duas cadeias elementares distintas $x - y$, o que contradiz (v). Logo, G não tem ciclos. Seja $u = \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U}$, com $x_i \neq x_j$, vértices de X . Por (v) existe em G uma cadeia elementar $x_i - x_j$, e dado que $x_i \neq x_j$ também é uma cadeia simples. Assim, $x_i - x_j, u, x_i$ é um ciclo em $G + u$. Porque G não tem ciclos, então $G + u$ tem no máximo um ciclo.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G é desconexo e sejam x_i, x_j vértices de componentes conexas distintas. Tem-se $\{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U}$. Como G não tem ciclos e não existem cadeias com extremidades em vértices de componentes conexas distintas, podemos dizer que $G + u$ não tem ciclos, o que contradiz (vi) . Logo, G é conexo. □

Observação.

Existem grafos simples com n vértices e $n - 1$ arcos que não são florestas e, portanto, não são árvores.

Por exemplo, $G = C_{n-1} \cup K_1$, com $n \geq 4$.



Questão:

- (1) Considere a sequência de números $(3, 1, 1, 1, 0)$. Existe uma árvore com esta sequência de graus ?

Claro que não..... Um garfo simples com esta sequência de graus não é conexo.

- (2) E para a sequência $(3, 2, 2, 2, 1)$? .

Não pois

Proposição 2.3.5:

Numa árvore, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Proposição 2.3.5:

Numa árvore, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Dem: Seja G uma árvore com $n \geq 2$ vértices. Seja $(d_1, \dots, d_n)$ com $d_1 \geq \dots \geq d_n$, a sequência de graus de G . Como G é conexo e $n \geq 2$ então, $d_n \geq 1$.

Suponhamos que, no máximo, G tinha um vértice de grau 1, então

$$\sum_{i=1}^n d_i \geq 1 + 2(n-1).$$

Como G é uma árvore com n vértices, o número de arcos é

$$m = n - 1.$$

Aplicando o Teorema do aperto de mãos, temos a contradição,

$$2(n-1) \geq 1 + 2(n-1).$$

Logo, G tem pelo menos dois vértices de grau 1.



Questão:

(3) Existe uma árvore com a sequência de graus $(3, 1, 1, 1, 1, 1)$? .

Não pois

Teorema 2.3.5:



Sejam $d_1, \dots, d_n$, com $n \geq 2$, inteiros tais que

$$d_1 \geq \dots \geq d_n > 0.$$

Então, existe uma árvore cuja sequência de graus é

$$(d_1, \dots, d_n)$$

se, e só se

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

Dem: $\Rightarrow$ Aplicar teorema do aperto de mão.

$\Leftarrow$ Indução em n .

$2(n-1)$

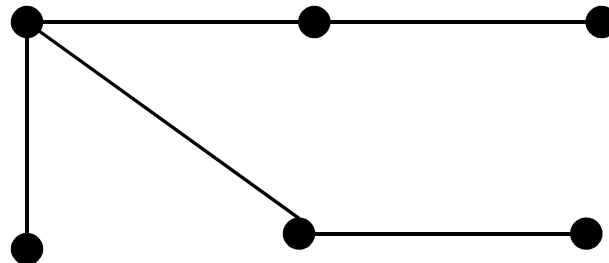
Questão:

(4) Existe uma árvore com a sequência de graus $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$?

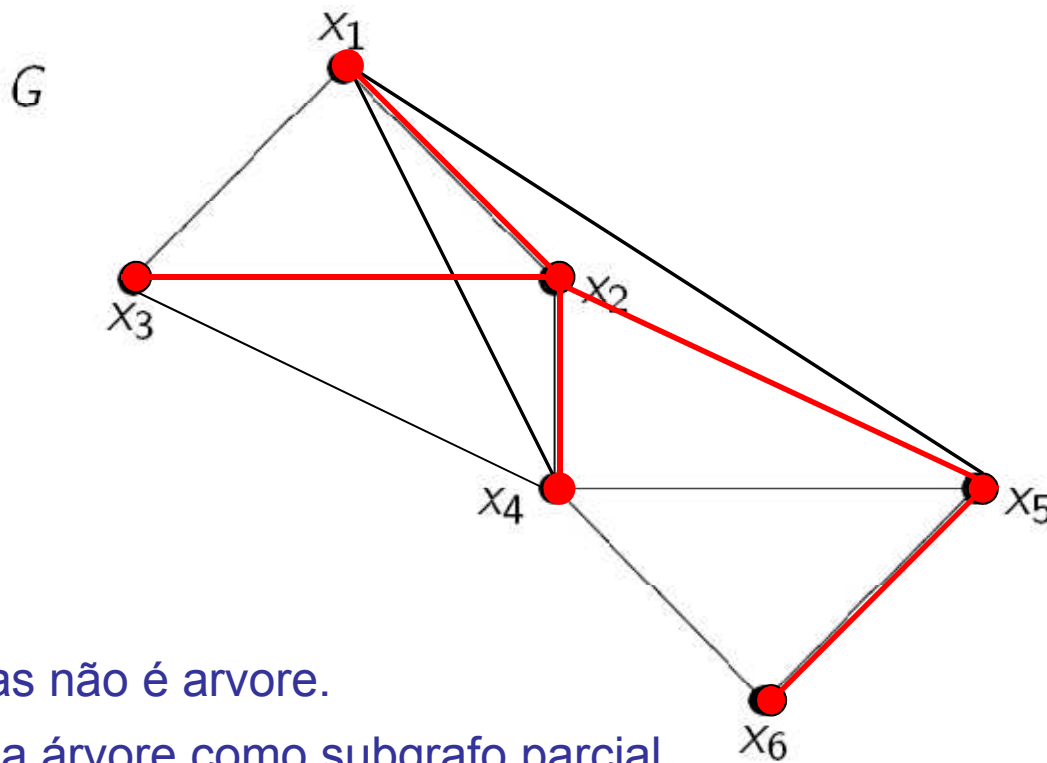
De acordo com o teorema anterior sim pois $n = 6$ (n° vértices) e

$$3+2+2+1+1+1=10 = 2 \times 6 - 2.$$

Por exemplo,



Conexidade e Árvores



G é conexo mas não é árvore.

Mas G tem uma árvore como subgrafo parcial.

Teorema 2.3.6:

Um grafo é conexo se, e só se, admite uma árvore como grafo parcial.

Dem: $\Leftarrow$ Se um grafo G admite uma árvore como grafo parcial então G admite um grafo parcial conexo, logo é conexo.

$\Rightarrow$ Se G não tem ciclos, então G é uma árvore (grafo parcial de G).

Se G tem um ciclo, seja u_1 um arco de um dos ciclos de G . Então u_1 não é ponte, pelo que $G_1 = G - u_1$ é conexo e tem um número de ciclos inferior ao número de ciclos de G . Se $G - u_1$ não tem ciclos então $G_1 = G - u_1$ é árvore (grafo parcial de G). Caso contrário, seja u_2 um arco de um ciclo de $G_1 - u_2 = G_2$.

Porque o número de ciclos de G é finito, procedendo deste modo, obtemos um grafo $G_k = G_{k-1} - u_{k-1}$ que é conexo, sem ciclos. Logo G_k é árvore (grafo parcial de G).

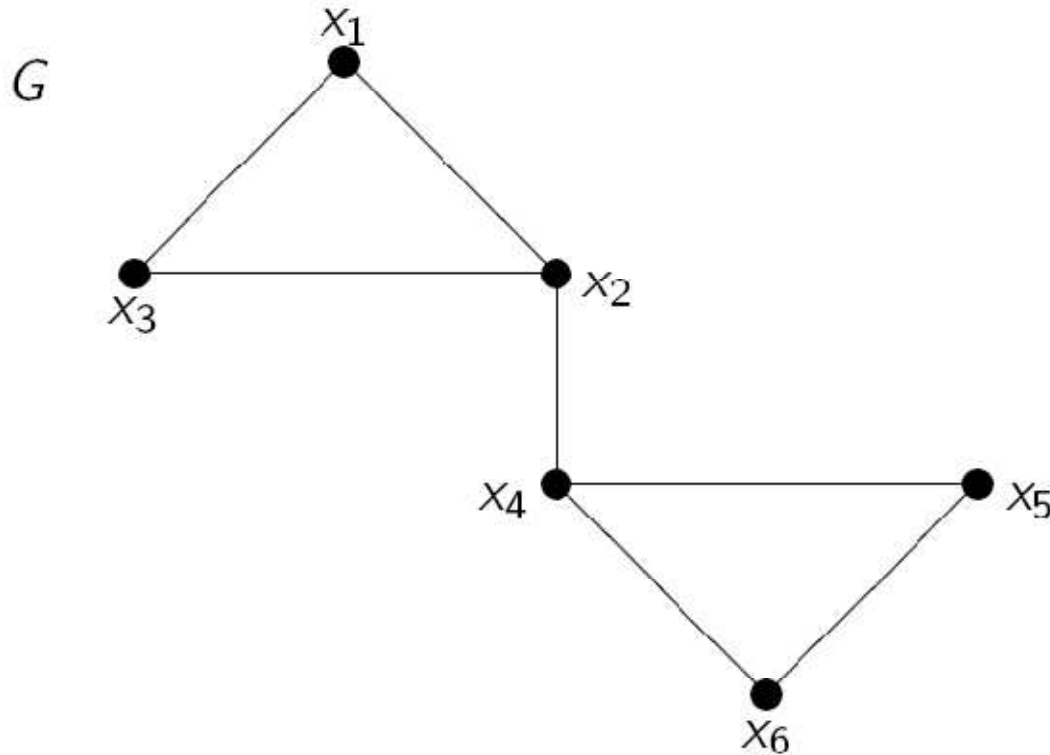


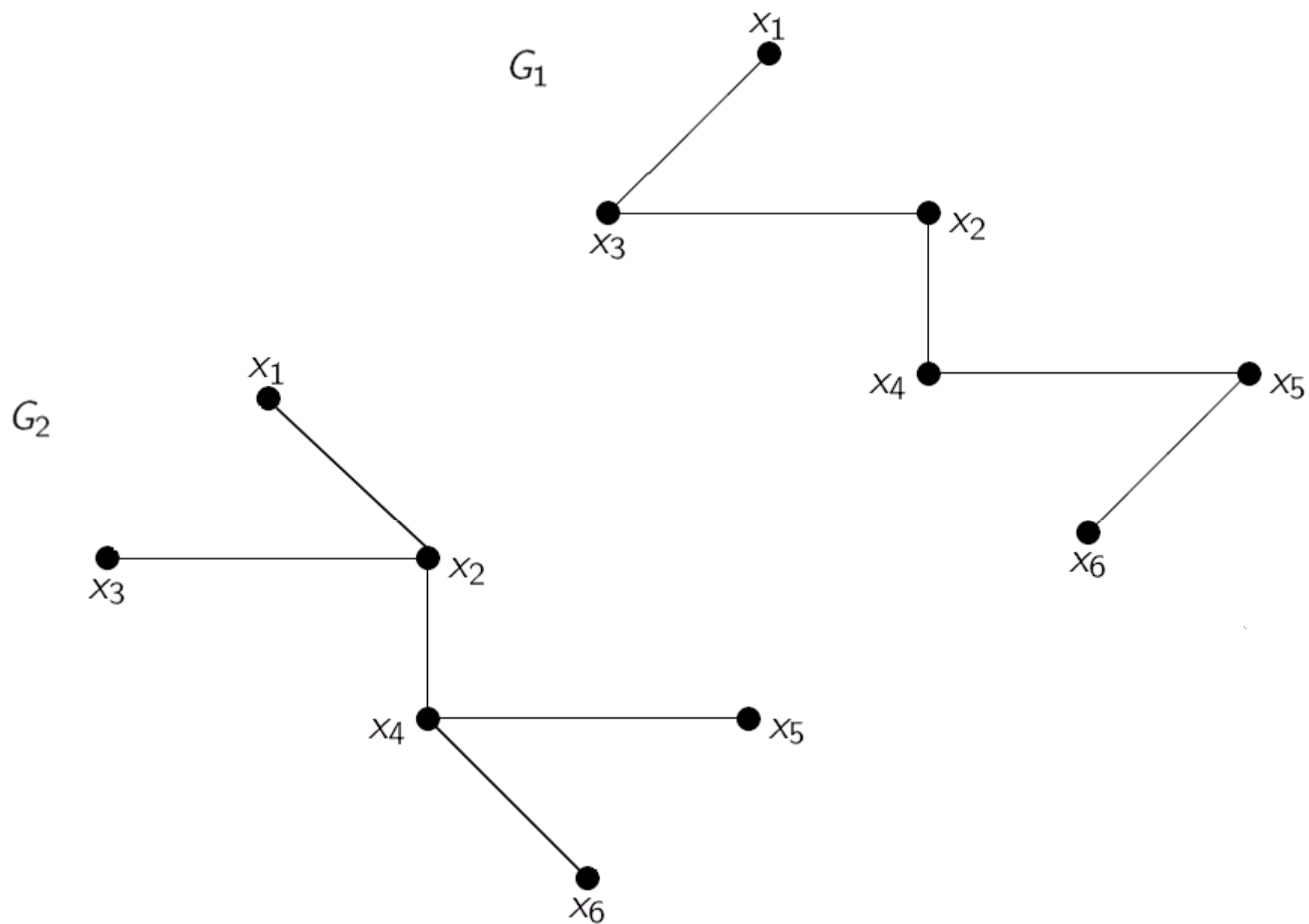
Árvores e grafos conexos estão relacionados

Definição 2.3.7:

Seja G um grafo (respectivamente, grafo conexo). Designa-se por **floresta** (respectivamente, **árvore**) **maximal** de G qualquer grafo parcial de G , que tenha o mesmo número de conexidade que G e que seja **floresta** (respectivamente, **árvore**).

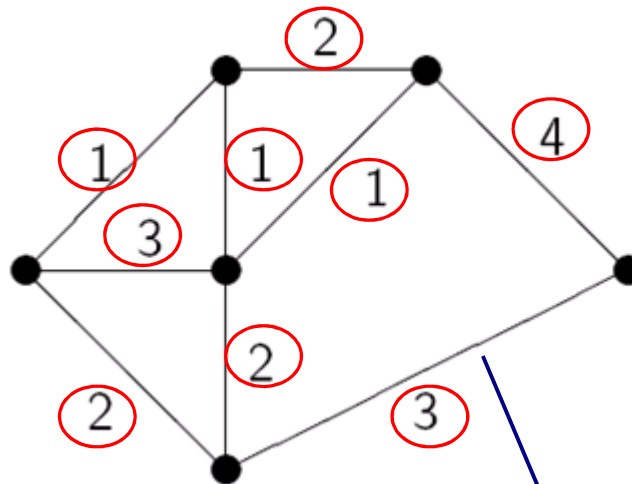
Exemplo: Consideremos o seguinte grafo simples,





G_1 e G_2 são duas árvores maximais, não isomorfas de G

Grafos ponderados:



$$v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$u \mapsto v(u)$$

Função peso

Chamamos **grafo ponderado** a um par (G, v) em que $G = (X, \mathcal{U})$ é um grafo e v é uma aplicação de $\mathcal{U}$ no conjunto dos números reais.

Se $u \in \mathcal{U}$ designa-se por **valor/peso do arco u** o número real $v(u)$ e designa-se por **valor de G** , e representa-se por $v(G)$, o número real

$$v(G) = \sum_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

$$V(G)=3 + 1 + 2 + = 19$$

Problema da árvore maximal de valor mínimo

