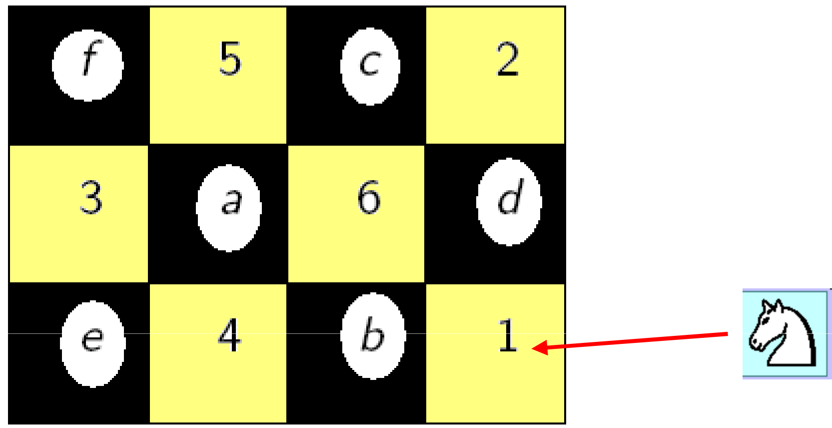
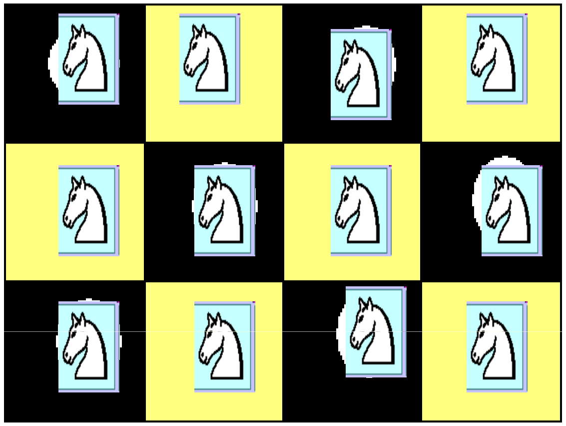
2.5 Grafos Hamiltonianos

Consideremos o seguinte tabuleiro 3×4 em que as "casas" brancas estão identificadas com números e as "casas" pretas com letras:



É possível, através de movimentos lícitos no jogo de xadrez, o cavalo percorrer, uma e uma só vez, todas as "casas" do tabuleiro começando na "casa" número 1 **?**

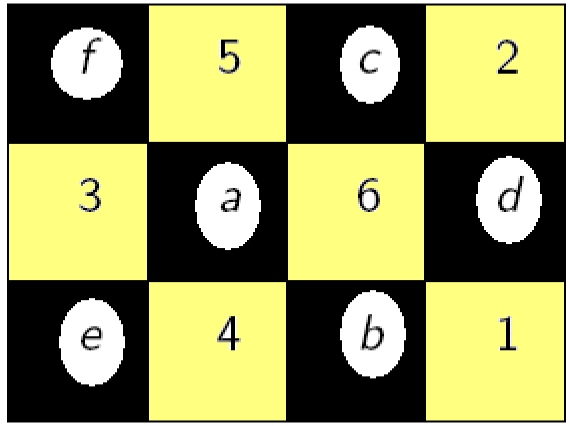


Sim,

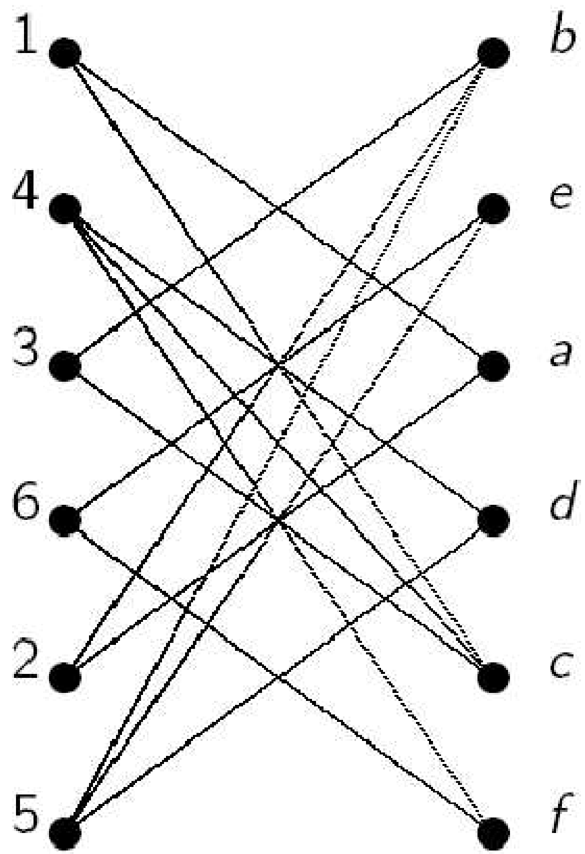
por exemplo, $1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, f$

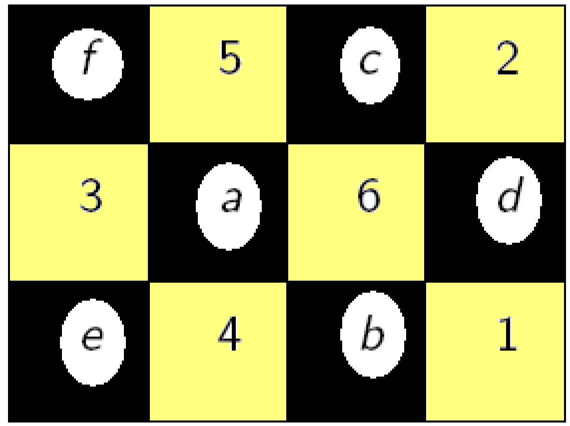
Mas não existe maneira do cavalo começar e regressar à "casa" número 1, depois de percorrer todas as "casas" do tabuleiro.

Questão: Qual a relação do problema anterior com a teoria de grafos?



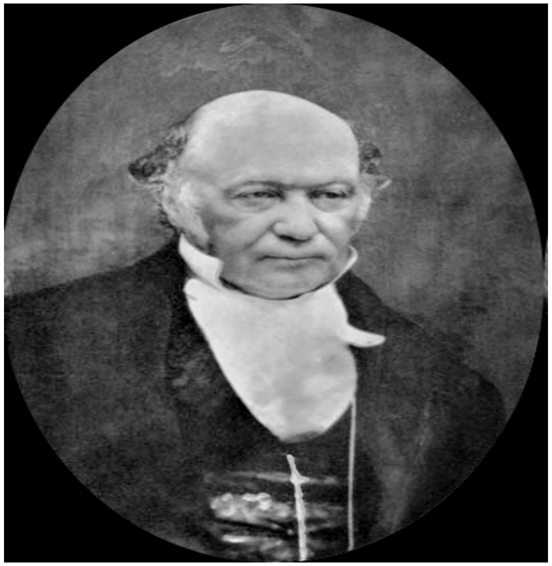
Considere-se um grafo em que os vértices correspondem às “casas” do tabuleiro, sendo dois vértices adjacentes se for possível, através de um movimento lícito, o cavalo passar de uma das casas para a outra. Temos assim um grafo bipartido.



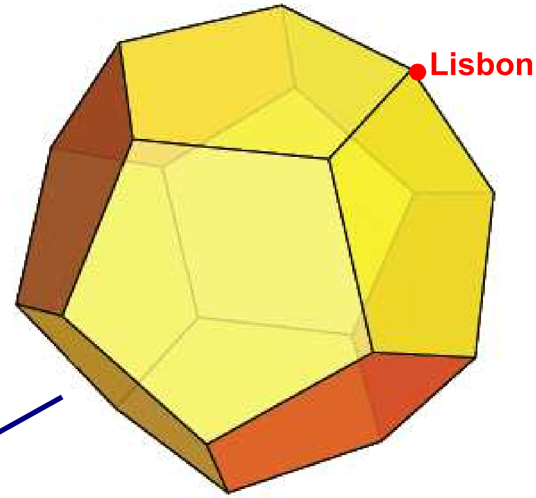


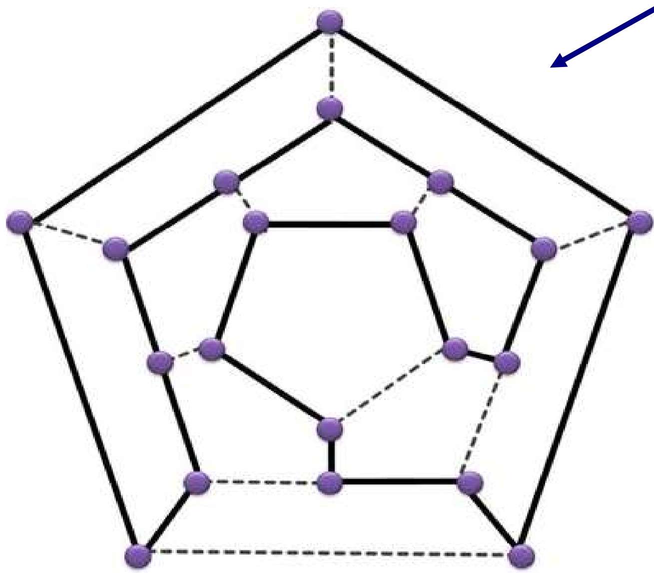
O que se pretende é então encontrar uma cadeia que passe uma e uma só vez por todos os vértices, regressando ou não ao vértice inicial.

Problema da cadeia ou do ciclo de Hamilton



William Rowan Hamilton (1805–1865)





Viagem a volta do mundo

Diz-se que inventou um jogo que chegou a ser comercializado que envolve um dodecaedro (sólido regular com 20 vértices, 30 arestas e 12 faces). Hamilton rotulou cada vértice do dodecaedro com o nome de uma cidade conhecida. O objectivo do jogo era que o jogador viajasse "ao redor do mundo" ao determinar uma viagem circular que incluísse todas as cidades exactamente uma vez, com a restrição de que só fosse possível viajar de uma cidade a outro se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes. A figura ao lado mostra um grafo do problema.

Definição 2.5.1:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo. Chamamos cadeia hamiltoniana a uma cadeia elementar que contenha todos os vértices de G e ciclo hamiltoniano a um ciclo elementar que contenha todos os vértices de G.

Se G é um grafo orientado substituindo, nas definições anteriores "cadeia" por "caminho" obtêm-se as correspondentes definições de caminho hamiltoniano e de circuito hamiltoniano.

Definição 2.5.2:

Um grafo diz-se hamiltoniano se admite um ciclo hamiltoniano e semi-hamiltoniano se admite uma cadeia hamiltoniana aberta.

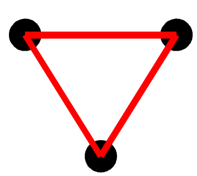
Observações:

1. Todo o grafo hamiltoniano é semi-hamiltoniano.
2. Se um grafo admite uma cadeia hamiltoniana então é conexo.
3. Se um grafo orientado admite um circuito hamiltoniano então é fortemente conexo.

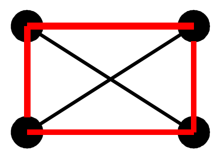
Proposição 2.5.3:

K_n, com $n \geq 3$, tem um ciclo hamiltoniano.

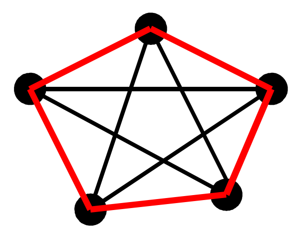
Observação:



K_3



K_4



K_5

Teorema 2.5.5: (Teorema de Ore)

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ *um grafo simples, com* $n \geq 3$ *vértices, tal que*

$$d(x) + d(x') \geq n, \qquad \forall x,\ x' \in X \text{ não adjacentes.}$$

Então, G *é hamiltoniano.*

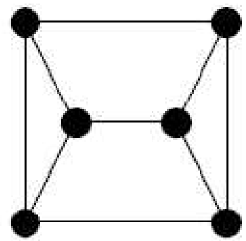
Corolário 2.5.6: (Teorema de Dirac)

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ *um grafo simples, com* $n \geq 3$ *vértices, tal que*

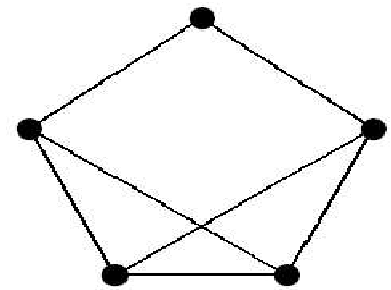
$$d(x) \geq \frac{n}{2}, \qquad \forall x \in X.$$

Então, G *é hamiltoniano.*

Exemplos: Consideremos os grafos



A

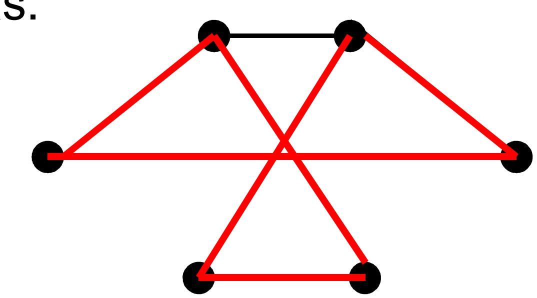


B

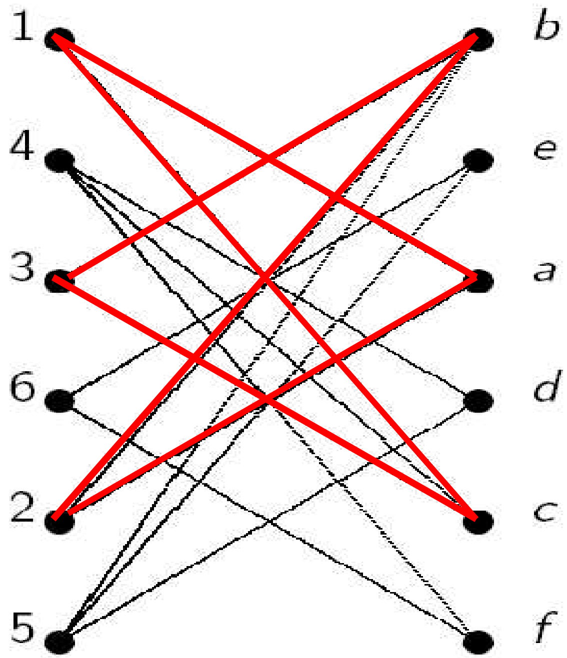
Usando o Corolário anterior, porque $d(x) \geq 3$, qualquer que seja o vértice do grafo A, e 6 é o número de vértices deste grafo, concluímos que o grafo tem um ciclo hamiltoniano.

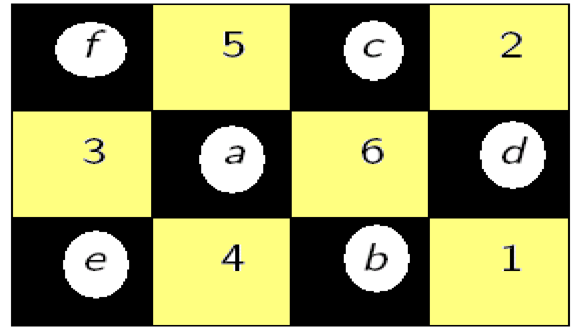
No caso do grafo B, o Corolário não pode ser usado, no entanto pelo Teorema, podemos concluir que este grafo também tem um ciclo hamiltoniano.

Atenção: Um grafo pode ser hamiltoniano sem que as condições dos teoremas anteriores sejam satisfeitas.



Relativamente ao problema inicial:





Os teoremas não ajudam a determinar se existe ou não um ciclo hamiltoniano no grafo associado ao tabuleiro de xadrez. No entanto uma simples analise permite afirmar que tal ciclo não existe.

Se o grafo possuísse um ciclo hamiltoniano então, como os vértices 1,2,3 têm grau 2, então os troços (c,1,a), (a,2,b) e (b,3,c) teriam de fazer parte desse ciclo. Mas então teríamos dentro desse ciclo o ciclo menor (c,1,a,2,b,3,c), o que não pode acontecer pois repetiria vértices.

A terminar…

Para o caso de todo o tabuleiro de xadrez já existe um ciclo hamiltoniano. Uma solução está indicada a seguir: