2.6 Matrizes e Grafos

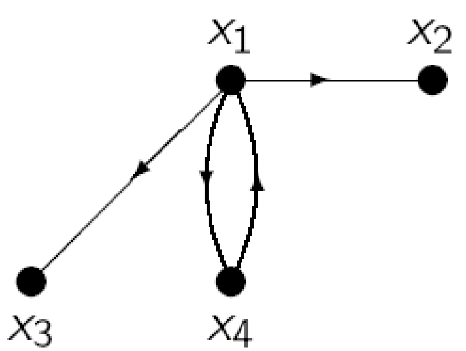
Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

Definição 2.6.1:

Chamamos marcação dos vértices de um grafo $G = (X, \mathcal{U})$, com $|X| = n$ a uma aplicação bijectiva ψ de X em $\{1, \ldots, n\}$.

Um grafo marcado nos vértices é um par (G, ψ) em que G é um grafo e ψ é uma marcação dos vértices de G.

Exemplo: Consideremos o digrafo G



$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

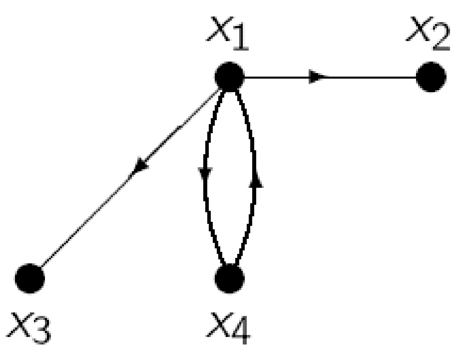
$$\psi : X \to \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x_2 \mapsto 1$$
$$x_3 \mapsto 2$$
$$x_1 \mapsto 3$$
$$x_4 \mapsto 4$$

Marcação dos vértices de G

$= (x_2, x_3, x_1, x_4)$

Outra marcação dos vértices de G



$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\psi : X \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$
$$x_1 \mapsto 1$$
$$x_2 \mapsto 2$$
$$x_3 \mapsto 3$$
$$x_4 \mapsto 4$$

$= (x_1, x_2, x_3, x_4)$

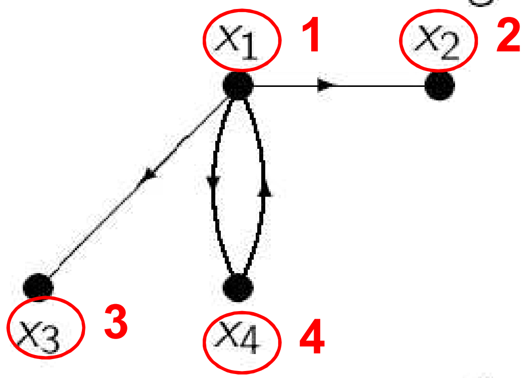
Marcação usual

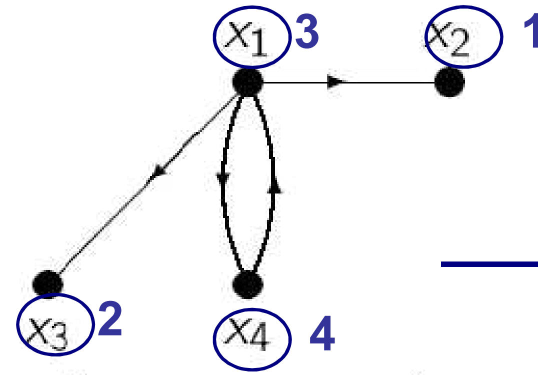
Definição 2.6.2:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices, com (G, ψ) e $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chamamos matriz de adjacências de G, em relação à marcação ψ, à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n, tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & se\ (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & se\ (x_i,\ x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Exemplo: Consideremos o digrafo G





e as marcações dos vértices $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ e $(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4)$.

As matrizes de adjacências de G, em relação às marcações $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ e $(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4)$ são, respectivamente, as matrizes

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

Proposição 2.6.3:

Sejam A e A' matrizes de adjacências de um digrafo $G = (X, \mathcal{U})$ em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação P tal que

$$A' = PAP^{-1}$$

(uma matriz de permutação de ordem n é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem n efectuando uma troca nas suas linhas).

Exemplo: Relativamente ao exemplo anterior:

Matriz de adjacência para a marcação

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de adjacência para a marcação

$$(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4)$$

$$A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como expressar A'(G) em função de A(G) **?**

$$\boxed{A'(G) = P\, A(G)\, P^{-1}}$$

?

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observações:

1. Sendo $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo com $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, chamamos marcação usual dos vértices de G à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$. Assim, a matriz de adjacências de G, em relação à marcação usual, é a matriz $A = [a_{ij}]$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i,\ x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

2. Através da matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ de um digrafo G, em relação à marcação $(x_1, \ldots,\ x_n)$, podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de G:

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha i de A, ou equivalentemente, o número de elementos da linha i que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna i de A.

Exemplo: Considerando o grafo do exemplo anterior, cuja matriz de adjacências em relação à marcação $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, dos seus vértices é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [a_{ij}] \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i,\ x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Usando a matriz:

1) Quantos arcos tem o digrafo? Soma de todos os números 1's

2) Qual o grau exterior do vértice x_1?

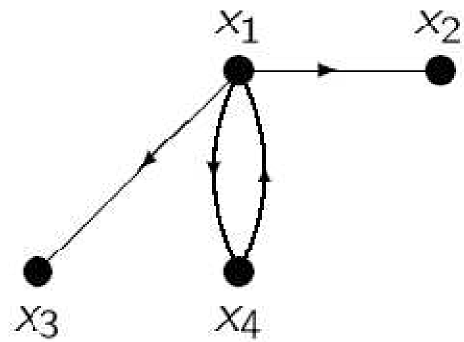
$$\sum_{j=1}^{4} a_{1j} = 3 = d^{+}(x_1)$$

3) Qual o grau interior do vértice x_3?

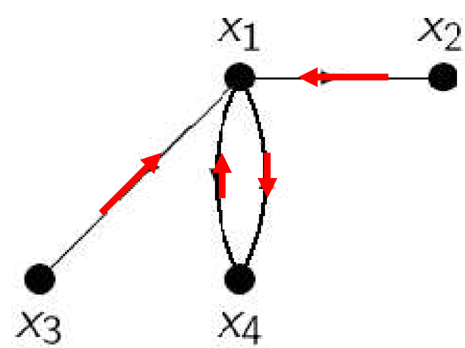
$$\sum_{j=1}^{4} a_{j3} = 1 = d^{-}(x_3)$$

4) Que informação esta expressa em $A(G)^T$?

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$A(G)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

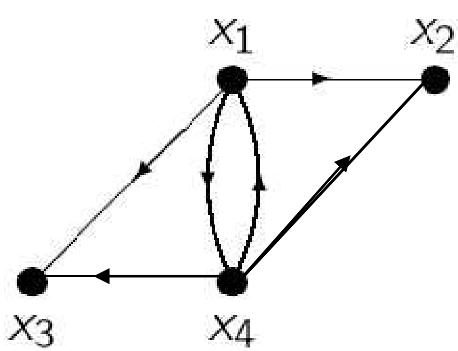


Teorema 2.6.4:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices e $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de G, em relação à marcação usual $(x_1, \ldots, x_n)$. Então, sendo s_{ij} o número de sucessores simultâneos de x_i e x_j, i.e. $s_{ij} = |\Gamma^+(x_i) \cap \Gamma^+(x_j)|$, temos

$$AA^T = [s_{ij}].$$

Exemplo: Considere o digrafo em baixo e a matriz de adjacências relativa à marcação usual $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$

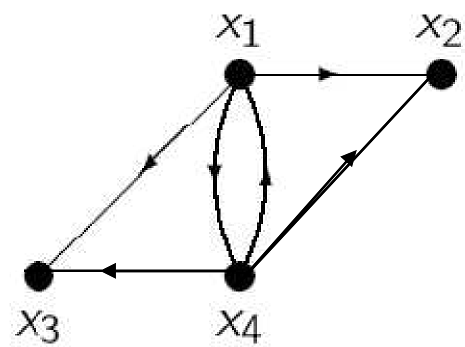


$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(G)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(G)A(G)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [s_{ij}]$$



Nº de sucessores de x_1

Nº de sucessores de x_4

Nº de sucessores comuns de x_1 e x_4

Nº de sucessores de comuns de x_i e x_j

Prova. O elemento da linha i coluna j de AA^T é

$$s_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn}.$$

Se $i = j$ tem-se

$$s_{ij} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = d^+(x_i)$$

e, portanto, s_{ii} é igual ao número de sucessores de x_i. Se $i \neq j$, os vértices x_i e x_j têm o vértice x_k como sucessor simultâneo se, e só se,

$$(x_i,\ x_k) \in \mathcal{U} \qquad \text{e} \qquad (x_j,\ x_k) \in \mathcal{U}.$$

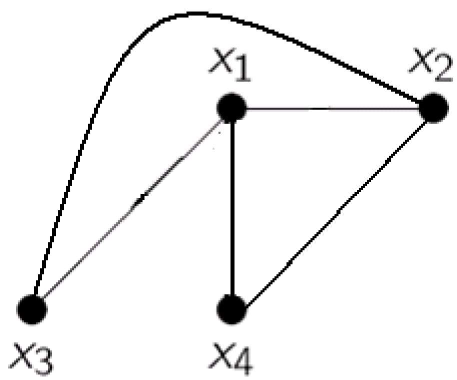
Mas tal sucede se, e só se, $a_{ik} = 1$ e $a_{jk} = 1$, ou ainda, se, e só se, $a_{ik}a_{jk} = 1$. Pelo que o resultado se verifica. $\square$

Definição 2.6.5:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ *um* **grafo simples**, *com* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Chama-se* *matriz de adjacências* *de* G, *em relação à marcação* $(x_1, \ldots, x_n)$ *dos seus vértices, à matriz* $A(G) = [a_{ij}]$, *de ordem* n, *tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & se\ i = j\ ou\ \{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U} \\ \mathbf{1} & se\ \{x_i,\ x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Exemplo: Considere o grafo simples, cuja matriz adjacências relativamente à marcação usual $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ é



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal nula
Matriz simétrica

Teorema 2.6.6:

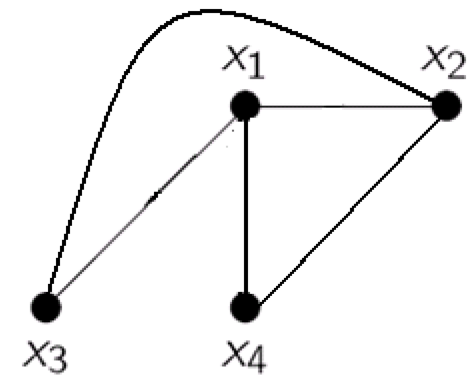
Seja $A = [a_{ij}]$ *a matriz de adjacências de um grafo simples* $G = (X, \mathcal{U})$, *em relação à marcação usual* $(x_1, \ldots, x_n)$. *Então, para* $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}],$$

em que $a_{ij}^{(k)}$ *é igual ao número de cadeias* $x_i - x_j$ *com comprimento* k *existentes em* G.

Exemplo: Considere o grafo simples do exemplo anterior e a sua matriz de adjacências

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Nº de vértices adjacentes a x_1
= Nº de cadeias $x_1 - x_1$ de comprimento 2

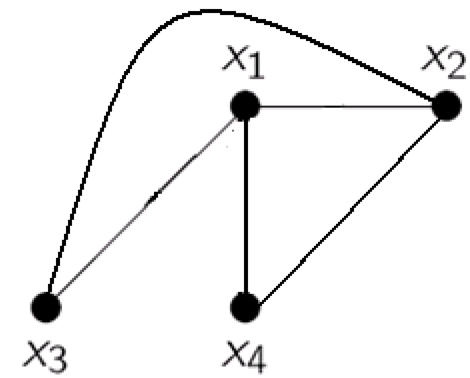
$$A(G)^2 = A(G)A(G) = A(G)A(G)^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [a_{ij}^{(2)}]$$

Nº de vértices adjacentes simultaneamente a x_4 e x_3
= Nº de cadeias x_4 - x_3 de comprimento 2

Nº de vértices adjacentes simultaneamente a x_3 e x_1
= Nº de cadeias $x_3 - x_1$ de comprimento 2

$a_{ij}^{(2)}$ = nº de cadeias $x_i - x_j$ de comprimento 2



Nº de cadeias $x_1 - x_1$ de comprimento 3

$$A(G)^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [a_{ij}^{(3)}]$$

arcos de x_1 para x_3

Nº de cadeias $x_4 - x_3$ de comprimento 3

$$2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cadeias de comprimento 2 de x_4 para x_1

$a_{ij}^{(3)}$ = nº de cadeias $x_i - x_j$ de comprimento 3

Prova. Por indução em k.

Para $k = 1$, verifica-se pois para $i = j$, $a_{ij} = 0$ e, para $i \neq j$, $a_{ij} = 1$ se, e só se, $\{x_i,\ x_j\} \in \mathcal{U}$. Como num grafo simples não existem arcos paralelos, a_{ij} representa o número de cadeias $x_i \quad x_j$, com comprimento 1, existentes em G.

Suponhamos então que, para $l - 1 \geq 1$, na matriz $A^{l-1} = [a_{ij}^{(l-1)}]$, $a_{ij}^{(l-1)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G, com comprimento $l - 1$, e demonstremos que em $A^l = [a_{ij}^{(l)}]$, $a_{ij}^{(l)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G, com comprimento l.

Tem-se $A^l = A^{l-1}A$ pelo que $a_{ij}^{(l)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(l-1)} a_{sj}$. Pela hipótese de indução, $a_{is}^{(l-1)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_s$, de G, com comprimento $l - 1$.

Então, $a_{is}^{(l-1)} a_{sj}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G, com comprimento $(l - 1) + 1 = l$ e tendo como penúltimo vértice x_s. Como no somatório x_s percorre todos os vértices do grafo o resultado é verdadeiro para l.

Pelo princípio de indução, o resultado é verdadeiro.

Observação: Substituindo no Teorema anterior, "grafo simples" por "digrafo" e "cadeia" por "caminho", obtemos um resultado válido.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Segundo Teste

VERSÃO A

Matemática Discreta

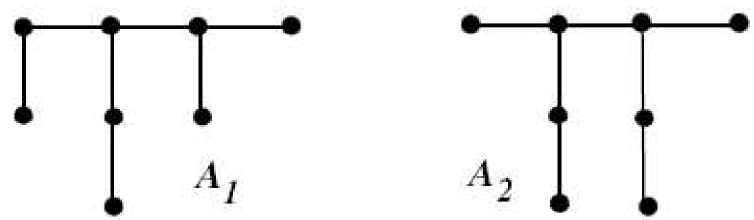
30 de Maio de 2009

[1.0] 1. Indique, justificando, se é possível numa reunião com 63 participantes um terço dos participantes conhecerem exactamente um terço dos participantes (não incluindo o próprio) e os restantes dois terços dos participantes conhecerem exactamente dois terços dos participantes.

[1.5] 2. Seja G um grafo simples com 7 vértices e 12 arcos. Admita que G tem pelo menos um vértice de grau 2, pelo menos um vértice de grau 3 e pelo menos um vértice de grau 4. Admita ainda que todos os vértice de G são de grau 2, de grau 3 ou de grau 4. Mostre que a sequência de graus de G é $(4, 4, 4, 4, 3, 3, 2)$.

[2.0] 3. Verifique, usando o algoritmo estudado nas aulas, se $(4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2)$ é uma sequência gráfica. Em caso afirmativo, utilize o mesmo algoritmo para representar geometricamente um grafo simples que possua esta sequência de graus.

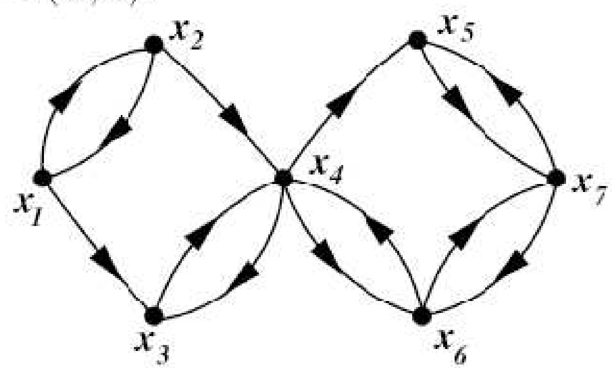
[2.0] 4. (a) Considere as seguintes árvores A_1 e A_2:



Determine as suas sequências de graus e indique, justificando, se são grafos isomorfos.

(b) Represente geometricamente três árvores não isomorfas com oito vértices, com pelo menos um vértice de grau 4 e pelo menos um vértice de grau 3. (Não precisa justificar.)

[**7.0**] 5. Considere o seguinte digrafo $G = (X, \mathcal{U})$:



Seja $u = (x_5, x_2)$ e considere o digrafo $G' = G + u$.

(a) Indique a ordem, o tamanho e a sequência de graus de G.

(b) Indique se o digrafo G é conexo.

(c) Verifique se os digrafos G e G' são fortemente conexos e indique as componentes fortemente conexas de G e de G'.

(d) Os digrafos G e G' têm caminhos eulerianos fechados? E caminhos eulerianos abertos? Justifique.

(e) Justifique que o digrafo G' possui um circuito hamiltoniano.

(f) Represente geometricamente os grafos subjacentes a G e a G'.

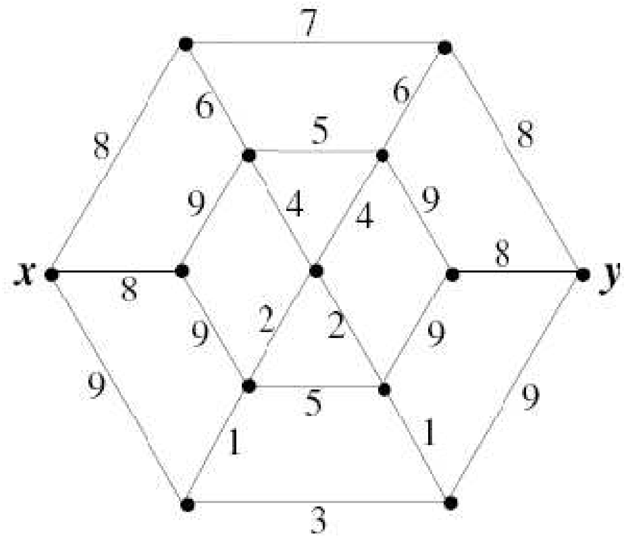
(g) Caracterize os grafos subjacentes a G e G' quanto a serem eulerianos ou semi-eulerianos.

(h) Indique a matriz A das adjacências de G relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$.

Questões 6 e 7 no verso

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

[4.5] 6. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Utilize o algoritmo de Kruskal para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.

(b) Utilize o algoritmo de Prim, a partir do vértice x, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.

(c) Utilize o algoritmo do Cadeia mais Curta para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L entre os vértices x e y. Indique o valor de L.

[2.0] 7. Sejam G um grafo simples e x um vértice de G de grau 1. Mostre que G é uma árvore se e só se $G - x$ for uma árvore.