

1.5. Relações de recorrência

Uma *relação de recorrência* para uma sucessão $(a_n)_{n \geq 0}$ é uma expressão que relaciona cada termo a_n (a partir de certa ordem p) com alguns dos seus predecessores $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$. As *condições iniciais* são valores que são explicitamente dados para um número finito ($p-1$) de termos da sucessão.

“*Resolver*” uma relação de recorrência, sujeita a certas condições iniciais, é determinar uma “*expressão explícita*” para o termo geral da sucessão.

Exemplos

- A sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n \geq 1}$ é definida pelas condições iniciais

$$f_1 = 1 \quad \& \quad f_2 = 2$$

e pela relação de recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 3)$:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad \dots$$

Definição

Uma *relação de recorrência linear homogénea de grau k ($k \geq 1$) com coeficientes constantes* é uma expressão da forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

com $c_1, \dots, c_k$ constantes (reais) e $c_k \neq 0$.

Exemplos

- A expressão $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (utilizada na definição da sucessão de Fibonacci) é uma relação de recorrência linear homogénea de grau 2 com coeficientes constantes.
- A expressão $a_n = 2a_{n-1}$ é uma relação de recorrência linear homogénea de grau 1 com coeficientes constantes.
- A relação de recorrência $a_n = 3a_{n-1}a_{n-2}$ não é linear.
- A relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ não é homogénea.
- A relação de recorrência $a_n = 3na_{n-1}$ não tem coeficientes constantes.

- Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ a sucessão definida pela relação de recorrência

$$a_n = a_{n-1} + 3, \quad n \geq 2,$$

com a condição inicial $a_1 = 2$. Ora,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \\ &= (a_{n-2} + 3) + 3 &= a_{n-2} + 2 \cdot 3 \\ &= (a_{n-3} + 3) + 2 \cdot 3 &= a_{n-3} + 3 \cdot 3 \\ &\dots &\dots \\ &= (a_{n-k} + 3) + (k-1) \cdot 3 &= a_{n-k} + k \cdot 3 \\ &\dots \\ &= a_1 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 2 + 3(n-1), \end{aligned}$$

i.e. $a_n = 2 + 3(n-1)$, para $n \geq 1$. (Prove formalmente esta igualdade, usando o Princípio de Indução.)

- Vamos resolver a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1}$ sujeita à condição inicial $a_0 = 1$. Temos

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} = 2 \cdot 2a_{n-2} = 2^2 a_{n-2} = 2^2 \cdot 2a_{n-3} \\ &= 2^3 a_{n-3} = \dots = 2^k a_{n-k} = \dots = 2^n a_0 \\ &= 2^n, \end{aligned}$$

i.e. $a_n = 2^n$, para $n \geq 0$. (Prove formalmente esta igualdade, usando o Princípio de Indução.)

Observação

Uma relação de recorrência linear homogénea de grau 1 com coeficientes constantes é uma expressão (genericamente) da forma $a_n = ca_{n-1}$, com c uma constante (real) não nula. É fácil concluir que podemos resolver esta relação de recorrência sujeita à condição inicial $a_0 = a$ (constante), obtendo-se $a_n = ac^n$, $n \geq 0$ (exercício).

Lema

Seja $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) uma relação de recorrência linear homogénea de grau 2 com coeficientes constantes. Sejam S_n e T_n duas sucessões que satisfazem a relação de recorrência e sejam b e d duas constantes (reais). Então a sucessão $U_n = bS_n + dT_n$ também satisfaz a relação de recorrência.

Lema

Seja $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) uma relação de recorrência linear homogénea de grau 2 com coeficientes constantes. Seja r uma raiz da equação $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$. Então, a sucessão $(r^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ satisfaz a relação de recorrência.

Demonstração. Por hipótese, r é raiz de $x^2 - c_1x - c_2 = 0$, pelo que $r^2 - c_1r - c_2 = 0$, ou seja, $r^2 = c_1r + c_2$. Então

$$\begin{aligned} c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} &= r^{n-2}(c_1r + c_2) \\ &= r^{n-2}r^2 = r^n, \end{aligned}$$

como pretendido. $\square$

Teorema

Seja $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) uma relação de recorrência linear homogênea de grau 2 com coeficientes constantes tal que a equação

$$x^2 - c_1x - c_2 = 0$$

admite duas raízes distintas r_1 e r_2 . Seja $(a_n)_{n \geq 0}$ a sucessão definida pela relação de recorrência sujeita às condições iniciais

$$a_0 = C_0 \quad \text{e} \quad a_1 = C_1.$$

Então, existem constantes (reais) b e d tais que

$$a_n = b r_1^n + d r_2^n, \quad n \geq 0.$$

- Consideremos agora a relação de recorrência

$$b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$$

sujeita às condições iniciais $b_0 = 200$ e $b_1 = 220$. Começamos por analisar a equação

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

cujas raízes (distintas) são $x = 1$ e $x = 2$. Pelo teorema anterior, temos $b_n = b + d 2^n$, para $n \geq 0$, para certas constantes b e d tais que

$$\begin{cases} b + d = b_0 = 200 \\ b + 2d = b_1 = 220, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} b = 180 \\ d = 20. \end{cases}$$

Logo, $b_n = 180 + 20 \cdot 2^n$, para $n \geq 0$.

Exemplos

- Vamos resolver a relação de recorrência

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

sujeita às condições iniciais $a_0 = 7$ e $a_1 = 16$.

Começamos por considerar a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujas raízes são $x = 2$ e $x = 3$.

Atendendo ao teorema anterior, temos

$$a_n = b 2^n + d 3^n, \quad n \geq 0,$$

para certas constantes b e d tais que

$$\begin{cases} b + d = a_0 = 7 \\ 2b + 3d = a_1 = 16, \end{cases}$$

ou seja (resolvendo o sistema), $b = 5$ e $d = 2$.

Logo, $a_n = 5 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$, para $n \geq 0$.

Teorema

Seja $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) uma relação de recorrência linear homogênea de grau 2 com coeficientes constantes tal que a equação $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ admite uma raiz dupla r . Seja $(a_n)_{n \geq 0}$ a sucessão definida pela relação de recorrência sujeita às condições iniciais

$$a_0 = C_0 \quad \text{e} \quad a_1 = C_1.$$

Então, existem constantes (reais) b e d tais que

$$a_n = b r^n + d n r^n, \quad n \geq 0.$$

Exemplo

Vamos resolver a relação de recorrência $c_n = 4c_{n-1} - 4c_{n-2}$ sujeita às condições iniciais $c_0 = 1$ e $c_1 = 1$.

Começamos por considerar a equação $x^2 - 4x + 4 = 0$, a qual possui $x = 2$ como raiz dupla. Atendendo ao teorema anterior, temos

$$c_n = b 2^n + d n 2^n, \quad n \geq 0,$$

para certas constantes b e d tais que $\begin{cases} b = c_0 = 1 \\ 2b + 2d = c_1 = 1, \end{cases}$ ou seja (resolvendo o sistema), $b = 1$ e $d = -\frac{1}{2}$.

Logo, $c_n = 2^n - \frac{1}{2} n 2^n = 2^n - n 2^{n-1}$, para $n \geq 0$.