Matemática Discreta

2009/10

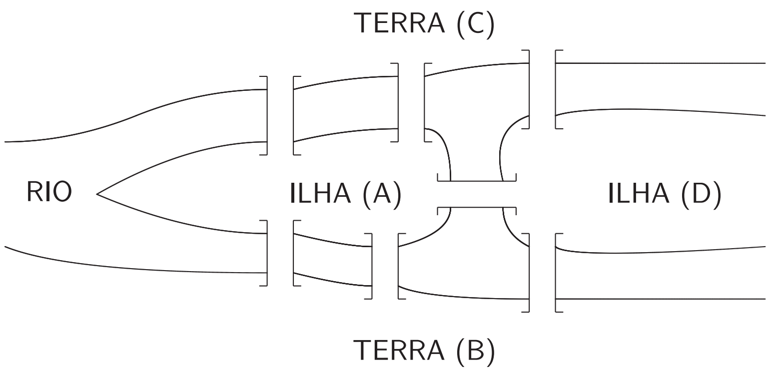
Jorge Manuel L. André
FCT/UNL

Programa

2.1. Generalidades

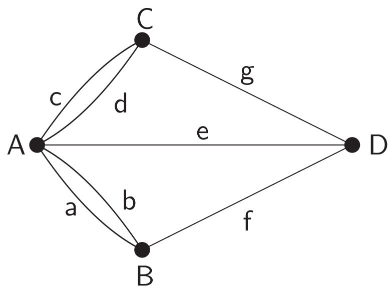
A teoria dos grafos teve a sua origem no estudo de problemas que podemos chamar de "recreativos". Vejamos alguns destes problemas.

Problema das Pontes de Königsberg: No século XVIII existiam sete pontes ligando diversas regiões da cidade e conta-se que, nos seus passeios, os habitantes se divertiam a tentar encontrar um percurso que lhes permitisse atravessar cada uma das pontes uma, e uma só vez, voltando ou não ao ponto de partida. Dado as suas tentativas resultarem infrutíferas, alguns começaram a acreditar que tal percurso não existia.



Na cidade de Königsberg, antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circundava uma ilha e separava-a em duas vertentes.

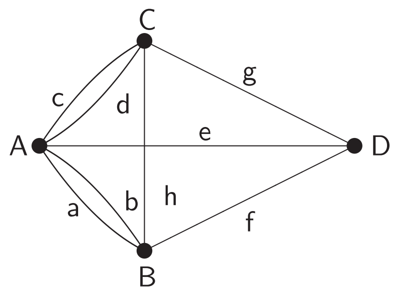
Para a resolução deste problema podemos construir o seguinte diagrama:



em que os “arcos” a, b, c, d, e, f, g representam as sete pontes e os “vértices” A, B, C, D representam as quatro regiões da cidade que tem interesse considerar.

Em 1736 o matemático suíço Leonhard Euler escreve um artigo, considerado o primeiro artigo de teoria de grafos, no qual demonstra a inexistência de um percurso nas condições anteriormente descritas.

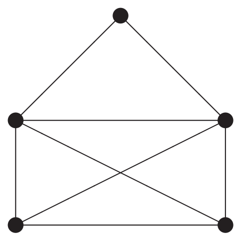
Segundo refere L. Saalschütz, em 1875 foi construída uma nova ponte h, ligando as zonas representadas por B e C, após o que se tornou possível efectuar um percurso nas condições referidas.



Nomeadamente,

$$D \underset{f}{\text{———}} B \underset{a}{\text{———}} A \underset{b}{\text{———}} B \underset{h}{\text{———}} C \underset{g}{\text{———}} D \underset{e}{\text{———}} A \underset{c}{\text{———}} C$$

Problemas do mesmo tipo do anterior são aqueles em que se pretende desenhar certas figuras sem levantar o lápis do papel e não passando sobre um “arco” já desenhado, como por exemplo:



Para tais problemas será dada uma resposta completa no capítulo com o título de Grafos Eulerianos.

Problema do Percurso do Cavalo num Tabuleiro de Xadrez

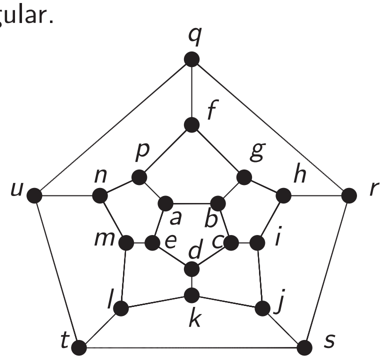
Este problema, tratado por Euler (1759) e Vandermonde (1771) consistia no estudo da existência de uma sequência de movimentos que permitisse a um “cavalo” percorrer, através de movimentos obedecendo às regras usuais de movimentação no jogo de xadrez, as 8×8 “casas” do tabuleiro uma, e uma só, vez regressando à posição de partida.

Observe-se que num tabuleiro de xadrez o número de “casas” brancas é igual ao número de “casas” pretas e que um cavalo através de um único movimento lícito passa de uma ”casa” para outra de cor distinta.

Tal como anteriormente, o problema pode ser estudado considerando um diagrama com $8 \times 8 = 64$ “vértices”, cada um representando um quadrado do tabuleiro e estando dois vértices ligados por um “arco” se, e só se, o cavalo conseguir mover-se entre as respectivas posições, através de um único movimento lícito.

Refira-se que este problema é distinto do anterior. Anteriormente pretendia-se que cada "arco" fosse "percorrido" uma, e uma só, vez. Aqui pretende-se que cada "vértice" seja "visitado" uma, e uma só, vez. Para concretizar este objectivo pode não ser necessário percorrer todos os "arcos".

No âmbito deste problema, em 1857, Hamilton apresenta na Associação Britânica de Dublin um "jogo" que, entre outras versões, tinha uma que envolvia um dodecaedro regular.



Os seus 20 "vértices" representavam 20 cidades importantes e os seus "arcos" representavam ligações entre cidades. Pretendia-se determinar um percurso que permitisse visitar todas as cidades uma, e uma só, vez e regressar à cidade de partida.

Uma solução para este problema é o percurso
$a, b, c, d, e, m, l, k, j, i, h, g, f, q, r, s, t, u, n, p, a$.

O problema complicava-se quando se pretendia determinar um percurso nas condições anteriores, mas que iniciasse com o trajecto a, b, g, h, i.

Este problema conhecido por "Viagem à volta do mundo" é do mesmo tipo do "Percurso do cavalo num tabuleiro de xadrez". Ambos constituem motivação para o estudo que efectuaremos no capítulo dos Grafos Hamiltonianos, terminologia que não está completamente justificada uma vez que, antes de Hamilton, Vandermonde e Kirkman se tinham debruçado sobre este assunto.

Em 1936, exactamente 200 anos após o artigo de Euler sobre as pontes de Königsberg, é publicado o primeiro livro sobre teoria de grafos da autoria de D. König. König é o primeiro a propor chamar "grafos" aos diagramas referidos bem como a estudar de forma sistemática as suas propriedades. Desde essa altura os trabalhos nesta área multiplicam-se, destacando-se os nomes de C. Berge, Ore, Erdos, Tutte e F. Harary.

Actualmente, os grafos são utilizados nas mais diversas áreas. Neste curso já utilizámos estes diagramas quando representámos geometricamente as relações binárias e quando desenhámos diagramas de Hasse.

O nosso estudo vai centrar-se em duas espécies de grafos:
- Grafos orientados;
- Grafos não orientados.

Definição

Chamamos grafo orientado, G, a um par $(X, \mathcal{U})$ em que:

(i) *X é um conjunto finito, não vazio e*

(ii) *$\mathcal{U}$ é um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$.*

Cada elemento de X diz-se um vértice de G e o cardinal de X, $|X|$, designa-se por ordem de G.
Os elementos de $\mathcal{U}$ dizem-se os arcos de G e o seu cardinal é designado por tamanho de G.

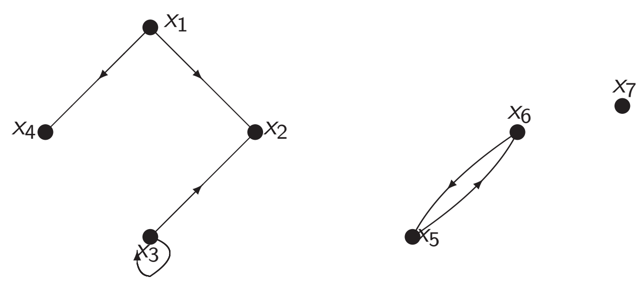
Seja $u = (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U}$. Diz-se que u é um arco de x_i para x_j, sendo x_i o vértice/extremidade inicial de u e x_j o vértice/extremidade final de u. Diz-se, ainda, que x_i e x_j são os vértices terminais ou as extremidades de u ou que u é incidente nos vértices x_i e x_j.

Um arco da forma $(x_i,\ x_i)$ diz-se um laço.

É usual representar geometricamente um grafo, no plano, fazendo corresponder a cada vértice um ponto, de tal forma que a vértices distintos correspondam pontos distintos, e fazendo corresponder a cada arco um segmento de recta ou, mais geralmente, uma curva contínua que não se intersecte a si própria, unindo os dois pontos representativos dos seus vértices terminais e não passando por nenhum outro ponto representativo de um vértice. Arcos com iguais extremidades, como $(x_i,\ x_j)$ e $(x_j,\ x_i)$, com $i \neq j$, são representados por curvas não coincidentes e sobre cada curva representativa de um arco é desenhada uma seta "apontando" no sentido do ponto representativo do vértice final.

Exemplo: Uma representação possível para o grafo $G = (X, \mathcal{U})$, em que $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$ e

$\mathcal{U} = \{(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_4),\ (x_5,\ x_6),\ (x_6,\ x_5),\ (x_3,\ x_3),\ (x_3,\ x_2)\}$:



Num grafo orientado $G = (X,\ \mathcal{U})$ dois vértices distintos x_i e x_j dizem-se vértices adjacentes se existir, pelo menos, um arco neles incidentes, isto é, x_i e x_j, com $i \neq j$, são vértices adjacentes se $(x_i,\ x_j) \in \mathcal{U}$ ou $(x_j,\ x_i) \in \mathcal{U}$.
Considera-se que um vértice x_i é adjacente a si próprio se, e só se, $(x_i,\ x_i) \in \mathcal{U}$.
Dois arcos distintos dizem-se arcos adjacentes se têm, pelo menos, uma extremidade comum. Considera-se que um arco u é adjacente a si próprio se, e só se, u é um laço.
Num grafo orientado $G = (X,\ \mathcal{U})$ designa-se por sucessor (respectivamente, predecessor) de um vértice x todo o vértice que seja extremidade final (respectivamente, inicial) de um arco cuja extremidade inicial (respectivamente, final) seja x.

O conjunto dos sucessores e o conjunto dos predecessores de x serão designados, respectivamente, por:

$$\Gamma^+(x) = \{y \in X :\ (x,\ y) \in \mathcal{U}\}$$

e

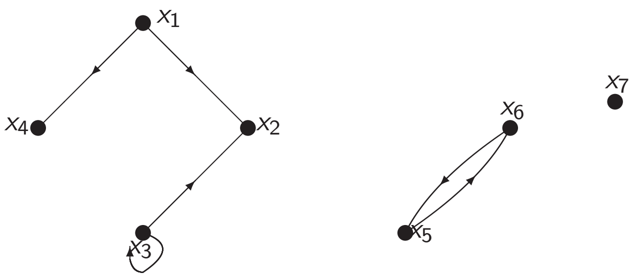
$$\Gamma^-(x) = \{y \in X :\ (y,\ x) \in \mathcal{U}\}.$$

Designaremos por $\Gamma(x)$ o conjunto dos vértices adjacentes a x.
Num grafo orientado tem-se

$$\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x).$$

Se $\Gamma^+(x) = \emptyset$ e $\Gamma^-(x) \neq \emptyset$ diz-se que x é um poço.
Se $\Gamma^+(x) \neq \emptyset$ e $\Gamma^-(x) = \emptyset$ diz-se que x é uma fonte.
Se $\Gamma(x) = \emptyset$ diz-se que x é um vértice isolado.

Exemplo: Usando o exemplo anterior,



temos:
x_1 e x_2 são vértices adjacentes;
Os arcos $(x_1,\ x_2)$ e $(x_3,\ x_2)$ são adjacentes;
$\Gamma^+(x_1) = \{x_2,\ x_4\}$;
$\Gamma(x_3) = \{x_2,\ x_3\}$;
x_1 é uma fonte;
x_4 é um poço;
x_7 é um vértice isolado.

De entre os grafos orientados, existe uma classe muito importante, os grafos orientados sem laços que se designam por digrafos.
Conforme veremos posteriormente, pode suceder que no estudo de certas propriedades dos grafos conhecer a "orientação" dos arcos, ou mais correctamente, distinguir o arco $(x_i,\ x_j)$ do arco $(x_j,\ x_i)$, com $i \neq j$, não se revele importante.

Definição

Dizemos que $G = (X,\ \mathcal{U})$ é um grafo não orientado ou, ainda, que $G = (X,\ \mathcal{U})$ é um grafo simples se:

(i) *X é um conjunto finito, não vazio e*
(ii) *$\mathcal{U}$ é um subconjunto de*

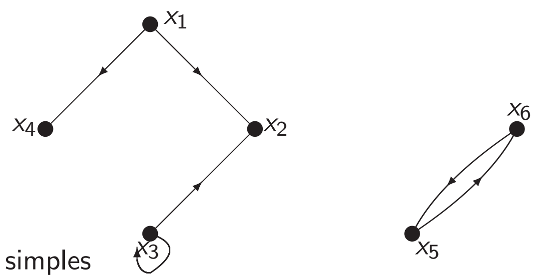
$$X \otimes X = \{\{x,\ y\} :\ x,\ y \in X,\ x \neq y\}.$$

Certas noções anteriormente dadas não têm agora significado. É o caso das noções de extremidade inicial e extremidade final de um arco, de laço, de sucessor e de predecessor de um vértice, de poço e de fonte. As restantes têm uma adaptação que julgamos ser evidente.

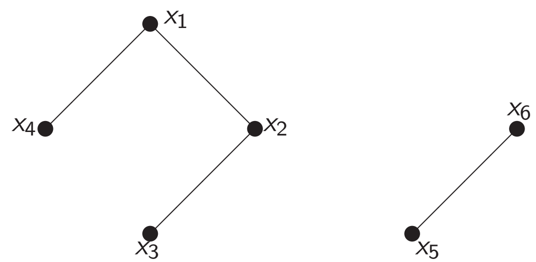
A representação geométrica dos grafos simples obedece aos mesmos princípios que a dos grafos orientados, não figurando apenas a seta representativa da orientação.

Dado um grafo orientado $G = (X,\ \mathcal{U})$ consideremos o grafo simples $G' = (X,\ \mathcal{U}')$ que se obtém, eliminando os laços em $\mathcal{U}$ e seguidamente substituindo cada par ordenado $(x_i,\ x_j) \in \mathcal{U}$ pelo conjunto $\{x_i,\ x_j\}$. G' diz-se, então, o grafo subjacente a G.

Exemplo: O grafo subjacente ao grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$, em que $X = \{x_1, \ldots, x_6\}, \mathcal{U} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_5, x_6), (x_6, x_5), (x_3, x_3), (x_3, x_2)\}$

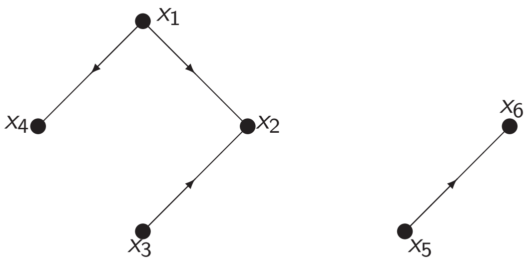


é o grafo simples

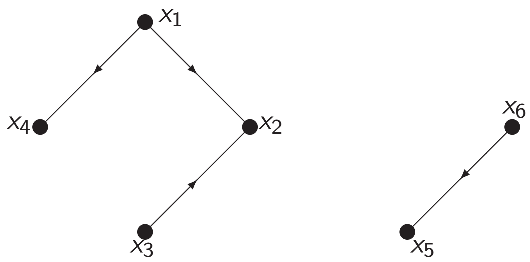


Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo simples e consideremos um grafo orientado $G' = (X,\ \mathcal{U}')$ em que $\mathcal{U}'$ se obteve de $\mathcal{U}$ substituindo cada arco $\{x_i,\ x_j\}$ ou por $(x_i,\ x_j)$ ou por $(x_j,\ x_i)$, sendo a disjunção uma disjunção exclusiva. Se $\mathcal{U}$ é não vazio, podemos associar a G mais do que um grafo orientado, cada um dos quais se diz um grafo resultante da orientação de G.

Exemplo: Seja $G_1 = (X, \mathcal{U}_1)$, com $X = \{x_1, \ldots, x_6\}, \mathcal{U} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_3, x_2\}\}$, o grafo simples (subjacente ao grafo G) do exemplo anterior. Um grafo resultante da orientação deste será:



Um outro grafo resultante da orientação do grafo simples inicial será:



Repare-se que unicamente foi alterada a "orientação" do arco $\{x_6,\ x_5\}$. O que nunca conseguimos é, através deste processo, obter o grafo orientado G inicial.

Na quase totalidade dos problemas que estudaremos, as definições anteriores de grafo orientado e de grafo simples são as que interessam considerar. Contudo para estudarmos problemas do mesmo tipo do das pontes de Königsberg, teremos que considerar uma outra definição de grafo, que permita a um arco ocorrer repetido.

Definição

Um multiconjunto é um par ordenado (A, m) onde A é um conjunto e $m : A \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função.
Para cada $a \in A$, chamamos multiplicidade de a (ou nº de ocorrências de a) ao número natural $m(a)$.

Se A é um conjunto finito, podemos representar o multiconjunto (A, m) "por extensão" enumerando explicitamente todos os elementos de A repetidos de acordo com a sua multiplicidade, colocados entre chavetas e separados por vírgulas.

Exemplo: Consideremos o multiconjunto $M = (A, m)$, com $A = \{a, b, c\}$, $m(a) = 3$, $m(b) = 1$ e $m(c) = 2$. Então $M = \{a, a, a, b, c, c\}$.

Definição

Chamamos multigrafo (respectivamente, multigrafo orientado) a um par $G = (X, \mathcal{E})$ em que:

(i) *X é um conjunto finito, não vazio e*

(ii) *$\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$ é um multiconjunto com $\mathcal{U} \subseteq X \otimes X$ (respectivamente, $\mathcal{U} \subseteq X \times X$).*

Num multigrafo $G = (X, \mathcal{E})$ em que para certos $x_1, x_2 \in X$ se tenha $m(\{x_1, x_2\}) = k$ então entre os vértices x_1 e x_2 existem k arcos.

Se a multiplicidade máxima dos elementos (arcos) do multiconjunto $\mathcal{E}$ é p dizemos que G é um p-grafo (o grafo do problema das pontes de Königsberg é um 2-grafo não orientado).

Aos elementos do multiconjunto $\mathcal{E}$ que são "iguais" (considerando a representação "por extensão" de $\mathcal{E}$) chamamos arcos paralelos.

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo (respectivamente, multigrafo orientado). O grau de um vértice x define-se como o número de arcos incidentes em x (respectivamente, o número de arcos incidentes em x mais o número de laços incidentes em x). Representa-se, habitualmente, por $d_G(x)$, ou simplesmente por $d(x)$, se não houver dúvidas sobre qual é o grafo que se está a considerar.

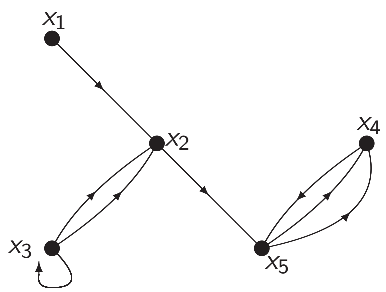
Se G é um multigrafo orientado denomina-se grau exterior (respectivamente, grau interior) do vértice x, e representa-se por $d_G^+(x)$ (respectivamente, $d_G^-(x)$) o número de arcos de G que têm x como extremidade inicial (respectivamente, extremidade final). Se não houver dúvidas sobre qual é o grafo que se está a considerar, podem também ser usadas as notações $d^+(x)$ e $d^-(x)$.

Das definições anteriores resulta que num multigrafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ se tem $\quad d(x) = d^+(x) + d^-(x), \quad$ para todo o $x \in X$.

Atenda-se, ainda, a que num grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ se verifica que

$$d^+(x) = |\Gamma^+(x)| \qquad \text{e} \qquad d^-(x) = |\Gamma^-(x)|, \qquad \text{para todo o } x \in X.$$

Exemplo: Consideremos o seguinte multigrafo orientado,



$$\begin{array}{lcl}
d^+(x_1) = 1 & , & d^-(x_1) = 0 \\
d^+(x_2) = 1 & , & d^-(x_2) = 3, \\
d^+(x_3) = 3 & , & d^-(x_3) = 1, \\
d^+(x_4) = 1 & , & d^-(x_4) = 2, \\
d^+(x_5) = 2 & , & d^-(x_5) = 2.
\end{array}$$

O resultado mais conhecido envolvendo os graus dos vértices é o seguinte:

Teorema

(i) *Num multigrafo $G = (X, \mathcal{U})$ com m arcos tem-se $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$.*

(ii) *Se $G = (X, \mathcal{U})$ é um multigrafo orientado com m arcos então $\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = m$.*

"Dem.": A demonstração da afirmação (ii) é imediata, se atendermos a que cada arco, independentemente de ser ou não um laço, tem uma, e uma só, extremidade inicial (respectivamente, final) contribuindo, assim, com uma parcela igual a 1 para o somatório $\sum_{x \in X} d^+(x)$ (respectivamente, $\sum_{x \in X} d^-(x)$).
A demonstração de (i) para multigrafos orientados, pode fazer-se utilizando (ii), pois

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} (d^+(x) + d^-(x)) = \sum_{x \in X} d^+(x) + \sum_{x \in X} d^-(x) = 2m,$$

ou observando que para qualquer multigrafo, orientado ou não, cada arco tem duas extremidades (que podem ser iguais, no caso dos laços) e, portanto, por cada arco existe uma parcela igual a 2 no somatório $\sum_{x \in X} d(x)$.

A afirmação (i) do Teorema anterior é conhecida por Teorema do aperto de mãos.

Tal é devido ao paralelo com a seguinte situação:

Suponhamos que n pessoas se encontram numa reunião social e que algumas se cumprimentam com um aperto de mãos. Tal situação pode ser representada por um grafo simples, em que as pessoas são representadas pelos vértices e em que existe um arco incidente em x_i e x_j, com $i \neq j$, se, e só se, as pessoas correspondentes a tais vértices se cumprimentam com um aperto de mãos. Neste caso o grau de um vértice x representa o número de pessoas, que a pessoa correspondente a x cumprimentou, apertando a mão e a igualdade (i) do Teorema afirma, então, que a soma do número de pessoas que cada um dos n presentes na reunião cumprimentou é igual ao dobro do número de apertos de mãos.

Proposição

Num multigrafo, orientado ou não, $G = (X, \mathcal{U})$ é sempre par o número de vértices de G que têm grau ímpar.

Dem: Sejam m o número de arcos de G,

$$X_1 = \{x \in X : \ d(x) \text{ é ímpar}\}$$

e

$$X_2 = \{x \in X : \ d(x) \text{ é par}\}.$$

Tem-se

$$\sum_{x\in X} d(x) = \sum_{x\in X_1} d(x) + \sum_{x\in X_2} d(x) = 2m.$$

Como $2m$ e $\sum_{x\in X_2} d(x)$ são números pares, concluímos que $\sum_{x\in X_1} d(x)$ é par. Dado que a paridade da soma de $k = |X_1|$ números ímpares é a paridade de k, concluímos que $k = |X_1|$ é um número par. Como $|X_1|$ é o número de vértices de G com grau ímpar, tem-se o resultado pretendido.

Definição

Define-se sequência de graus de um multigrafo ou multigrafo orientado G, com n vértices, como sendo a sequência

$$(d_1, \ d_2, \ldots, \ d_n),$$

não crescente (isto é, com

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$$

cujos elementos são os graus dos vértices de G.

Observação: No caso dos multigrafos orientados define-se de forma análoga os conceitos de sequência de graus exteriores e sequência de graus interiores.

Exemplo: Consideremos o multigrafo orientado do exemplo anterior. Como foi visto,

$$\begin{array}{lcl}
d^+(x_1) = 1 & , & d^-(x_1) = 0 \\
d^+(x_2) = 1 & , & d^-(x_2) = 3, \\
d^+(x_3) = 3 & , & d^-(x_3) = 1, \\
d^+(x_4) = 1 & , & d^-(x_4) = 2, \\
d^+(x_5) = 2 & , & d^-(x_5) = 2.
\end{array}$$

Então,
a sua sequência de graus é $(4, \ 4, \ 4, \ 3, \ 1)$,
a sua sequência de graus interiores é $(3, \ 2, \ 2, \ 1, \ 0)$,
a sua sequência de graus exteriores é $(3, \ 2, \ 1, \ 1, \ 1)$.

Definição

Uma sequência não crescente de inteiros não negativos $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ diz-se uma sequência gráfica se existir um **grafo simples** *cuja sequência de graus seja $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.*

Proposição

Se $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ é uma sequência gráfica então $d_1, d_2, \ldots, d_n$ são inteiros tais que:

(i) *$0 \leq d_i \leq n-1$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$;*

(ii) *$\sum_{i=1}^{n} d_i$ é um número par.*

As condições (i) e (ii) anteriores são condições necessárias mas não suficientes. Tal verifica-se somente para $n = 1$ e $n = 2$.

Proposição

Para $n \geq 3$ existem sequências não crescentes $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de inteiros verificando as condições (i) e (ii) da proposição anterior e que não são sequências gráficas.

Dem. Considere-se $d_1 = n-1$ e $d_n = 0$. Se n é par tome-se $d_2 = 1$ e os restantes elementos da sequência iguais a zero. Se n é ímpar, considerem-se os restantes elementos da sequência nulos.
Facilmente concluímos que não existe nenhum grafo simples que tenha qualquer uma das sequências anteriores como sequência de graus. Se um tal grafo simples existisse teria n vértices sendo um de grau $n-1$ e, portanto, adjacente a todos os outros. Mas, então, em tal grafo não existiriam vértices de grau zero.

Proposição

Num grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

Dem. Se não existissem dois vértices com o mesmo grau, a sequência de graus do grafo seria

$$(n-1,\ n-2, \ldots,\ 1,\ 0),$$

que não é uma sequência gráfica.

Teorema

A sequência de inteiros não negativos

$$S: \qquad d_1, d_2, \ldots, d_n$$

com $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, $n \geq 2$ e $d_1 \geq 1$ é uma sequência gráfica se, e só se, a sequência

$$S': \qquad d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

(depois de ordenada por ordem não crescente) é uma sequência gráfica.

Dem.(parcial) Suponhamos que S' é uma sequência gráfica e seja G' um grafo simples cuja sequência de graus é S'. Sejam $x_2, \ldots, x_n$ os vértices de G' e considere-se que

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1 & \text{se } 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i & \text{se } d_1 + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Seja G o grafo que se obtem de G' acrescentando um novo vértice x_1 e os d_1 arcos $\{x_1,\ x_i\}$, para $2 \leq i \leq d_1 + 1$. Então, G é um grafo simples cuja sequência de graus é S e, portanto, S é uma sequência gráfica.

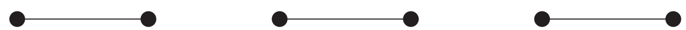
Exemplo: Determinemos se a sequência $(6,\ 5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2)$ é uma sequência gráfica.
Tem-se:

$$\begin{array}{lcr}
S_1 & : & 6,\ \underline{5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,}\ 2,\ 2 \\
S_1' & : & 4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2 \\
S_2 & : & 4,\ \underline{4,\ 3,\ 2,\ 2,}\ 2,\ 2,\ 1 \\
S_2' & : & 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1 \\
S_3 & : & 3,\ \underline{2,\ 2,\ 2,}\ 1,\ 1,\ 1 \\
S_3' & : & 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1
\end{array}$$

em que de S_i para S_i', $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, se aplicou o teorema e de S_i' para S_{i+1}, $i \in \{1,\ 2\}$, se ordenou a sequência por ordem não crescente.

Embora possamos continuar a aplicar o teorema, concluímos facilmente, que S_3' é uma sequência gráfica, pois um grafo simples da forma

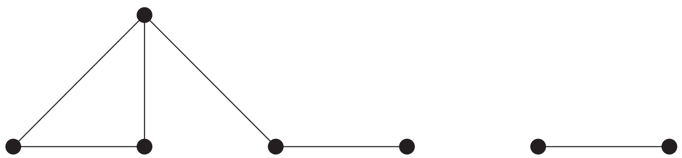
G'



tem S_3' como sequência de graus.

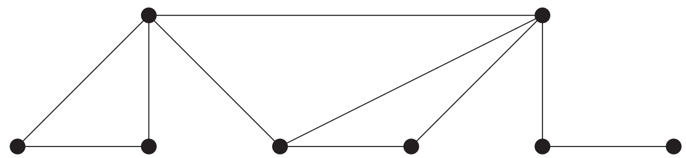
Atendendo à primeira parte da demonstração do teorema, podemos construir um grafo simples G_3 cuja sequência de graus é S_3. Teremos de acrescentar um novo vértice ao grafo e torná-lo adjacente a 3 vértices de grau 1.

G_3



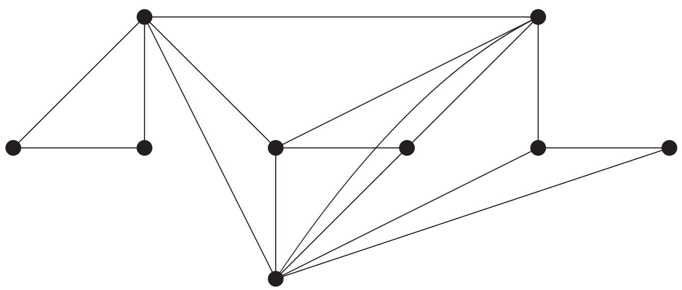
Acrescentando um novo vértice a G_3 e tornando tal vértice adjacente a 4 vértices, nomeadamente ao vértice com grau 3, a um dos de grau 2 e a dois vértices com grau 1, obtemos um grafo cuja sequência de graus é S_2.

G_2



Procedendo de forma análoga, concluímos que o grafo

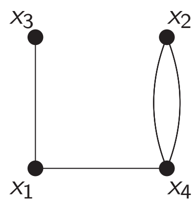
G_1



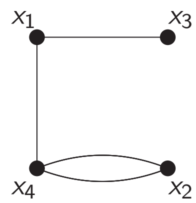
tem sequência de graus S_1.

Duas representações de multigrafos podem parecer diferentes, mas representarem o mesmo multigrafo. É o caso dos multigrafos G_1 e G_2,

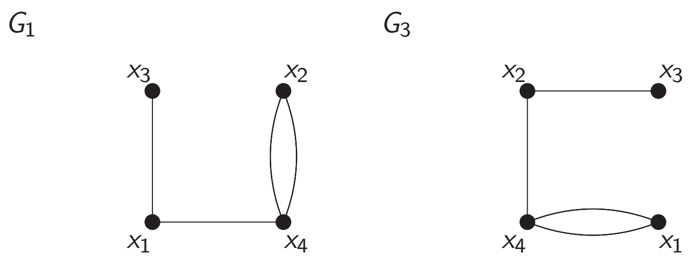
G_1



G_2



No entanto pode acontecer que duas representações de multigrafos pareçam semelhantes mas representarem multigrafos distintos. É o caso dos multigrafos G_1 e G_3 (enquanto que em G_1 os vértices x_1 e x_3 são adjacentes, em G_3 não o são),



Expressamos esta semelhança dizendo que os multigrafos são **isomorfos**.

Definição

Sejam $H_1 = (X_1, \mathcal{U}_1)$ e $H_2 = (X_2, \mathcal{U}_2)$ multigrafos não orientados (respectivamente, multigrafos orientados). Diz-se que H_1 é isomorfo a H_2 se existe uma aplicação bijectiva

$$\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$$

tal que, para quaisquer x_i e $x_j \in X_1$, o número de arcos incidentes, em H_1, nestes dois vértices (respectivamente, com extremidade inicial em x_i e extremidade final em x_j) seja igual ao número de arcos incidentes, no multigrafo H_2, em $\varphi(x_i)$ e $\varphi(x_j)$ (respectivamente, com extremidade inicial em $\varphi(x_i)$ e extremidade final em $\varphi(x_j)$).

Proposição

A relação de isomorfismo de multigrafos e de multigrafos orientados é uma relação de equivalência.

Observação:

1. Atendendo à simetria da relação de isomorfismo de multigrafos podemos escrever "H_1 e H_2 são isomorfos".
2. Se $H_1 = (X_1, \mathcal{U}_1)$ e $H_2 = (X_2, \mathcal{U}_2)$ são multigrafos isomorfos, através da bijecção φ, então

$$d_{H_1}(x) = d_{H_2}(\varphi(x)), \qquad \forall x \in X_1.$$

Exemplos:

1. Os multigrafos G_1 e G_3 (anteriores) são isomorfos.
2. Os grafos simples

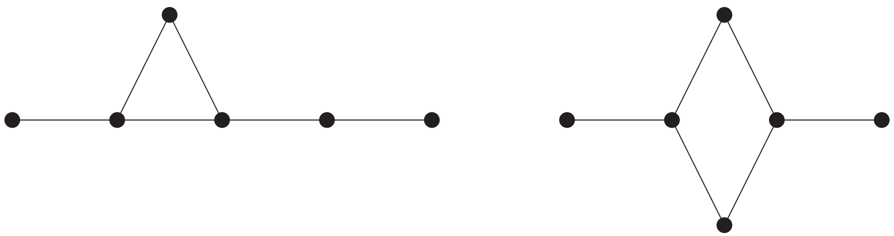
são isomorfos.

Proposição

Multigrafos e multigrafos orientados isomorfos têm sequências de graus iguais.

A reciproca da Proposição anterior é falsa. Os grafos

G_1 G_2

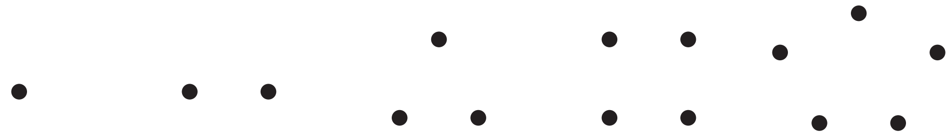


têm a mesma sequência de graus, $(3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)$, mas não são isomorfos. Basta atender a que os dois vértices de grau 3 de G_1 são adjacentes, mas o mesmo não sucede aos dois únicos vértices de grau 3 de G_2.

Observação: Multigrafos orientados isomorfos, têm a mesma sequência de graus exteriores e a mesma sequência de graus interiores.

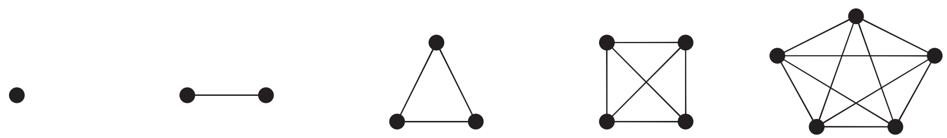
Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo simples. Se existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que, $d_G(x) = r$, para todo o $x \in X$, dizemos que G é um grafo regular de grau r ou r-regular.

Um grafo simples regular de grau 0, isto é, com todos os vértices isolados, diz-se um grafo nulo e representa-se, no caso de ter n vértices, por N_n.



N_1 N_2 N_3 N_4 N_5

Um grafo simples, com n vértices, regular de grau $n-1$, diz-se um grafo completo e representa-se por K_n. Este grafo tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arcos.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Como consequência do Teorema do aperto de mãos, temos:

Proposição

Não existem grafos regulares de grau ímpar com um número ímpar de vértices.

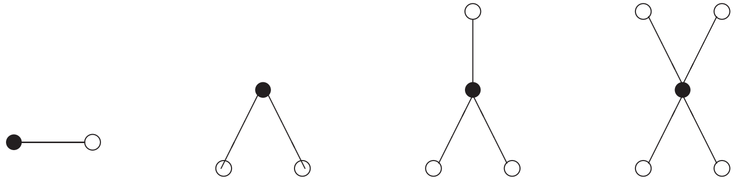
Diz-se que um grafo simples $G = (X,\ \mathcal{U})$ é bipartido, com classes de vértices X_1 e X_2, se $\{X_1, X_2\}$ é uma partição de X e cada arco de G tem uma extremidade num elemento de X_1 e a outra extremidade num elemento de X_2. A notação utilizada é $G = (X_1 \dot\cup X_2,\ \mathcal{U})$.

Um grafo simples $G = (X,\ \mathcal{U})$ diz-se p-partido, com classes de vértices $X_1, \ldots X_p$, se $\{X_1, \ldots,\ X_p\}$ é uma partição de X e nenhum elemento de $\mathcal{U}$ tem ambas as extremidades em elementos da mesma classe.

Um grafo p-partido, com $p \geq 2$, em que existe um arco unindo todo o par de vértices pertencentes a classes de vértices distintas diz-se um grafo p-partido completo.

Se este grafo tiver $n_1, \ldots, n_p$ elementos nas classes, representá-lo-emos por $K_{n_1,\ldots,n_p}$.

Destacamos em particular os grafos estrelas $K_{1,n-1}$.



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{1,4}$

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples completo, com $n \geq 2$ vértices. Chamamos torneio a um digrafo resultante da orientação de G.

A menos de isomorfismo, há apenas dois torneios com 3 vértices (resultantes da orientação do K_3).

Diz-se que $G' = (X', \mathcal{U}')$ é um subgrafo do grafo orientado (respectivamente, não orientado) $G = (X, \mathcal{U})$ se $X \subseteq X'$ e $\mathcal{U}' \subseteq (X' \times X') \cap \mathcal{U}$ (respectivamente, $\mathcal{U}' \subseteq (X' \otimes X') \cap \mathcal{U}$).

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo.

De entre os subgrafos destacamos:

Um grafo $G' = (X, \mathcal{U}')$ com $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ diz-se um grafo parcial de G. O grafo G' obtém-se de G eliminando em $\mathcal{U}$ os arcos pertencentes a $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$, pelo que pode representar-se por $G - \mathcal{U}''$.

Se $G' = (X', \mathcal{U}')$ é um subgrafo de $G = (X, \mathcal{U})$ com $\mathcal{U}' = (X' \otimes X') \cap \mathcal{U}$ (se G não é orientado) ou $\mathcal{U}' = (X' \times X') \cap \mathcal{U}$ (se G é orientado), dizemos que G' é o subgrafo de G gerado por X'.
Sendo $X'' = X \setminus X'$ representamos G' por $G - X''$.

Se $G = (X, \mathcal{U})$ é um grafo orientado (respectivamente, não orientado) e $\mathcal{U}'' \subseteq (X \times X) \setminus \mathcal{U}$ (respectivamente, $\mathcal{U}'' \subseteq (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$) representamos por $G + \mathcal{U}''$ o grafo $(X, \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'')$.

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Chama-se grafo complementar de G e representa-se por $\overline{G}$, o grafo simples $\overline{G} = (X, \overline{\mathcal{U}})$ em que $\overline{\mathcal{U}} = (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$.

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo orientado. Chama-se grafo complementar de G e representa-se por $\overline{G}$, o grafo orientado $\overline{G} = (X, \overline{\mathcal{U}})$ em que $\overline{\mathcal{U}} = (X \times X) \setminus \mathcal{U}$.

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo. Chama-se digrafo complementar de G e representa-se por $\overline{G}$, o digrafo $\overline{G} = (X, \overline{\mathcal{U}})$ em que $\overline{\mathcal{U}} = (X \times X) \setminus (\mathcal{U} \cup \{(x,x) \mid x \in X\})$.

Matemática Discreta

2009/10

Jorge Manuel L. André
FCT/UNL

Programa

2.2. Conexidade

Muitas das aplicações da teoria de grafos falam "ir de um vértice para outro" num grafo. Por exemplo, qual o caminho mais curto entre Lisboa e Porto? Começamos por precisar este conceito.

Definição

Num multigrafo não orientado (respectivamente, multigrafo orientado) $G = (X,\ \mathcal{U})$ chama-se cadeia a uma sequência alternada de vértices e arcos de G, iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade no vértice que imediatamente o precede na sequência e a outra extremidade no vértice que imediatamente o sucede na sequência.

Trata-se, pois, de uma sequência da forma

$$L: \qquad x_0,\ u_1,\ x_1,\ u_2, \ldots,\ u_r,\ x_r$$

com $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, \ldots r\}$, $x_j \in X$, $j \in \{0,\ 1, \ldots,\ r\}$ e em que $u_i = \{x_{i-1},\ x_i\}$ (respectivamente, $u_i = (x_{i-1},\ x_i)$ ou $u_i = (x_i,\ x_{i-1})$), $i \in \{1, \ldots,\ r\}$.

O vértice x_0 diz-se o vértice inicial da cadeia L e o vértice x_r o seu vértice final. Diz-se que x_0 e x_r são as **extremidades** da cadeia L.

Designamos, frequentemente, por cadeia $x_0 - x_r$ uma cadeia cujo vértice inicial é x_0 e o vértice final é x_r.

Definição

Uma cadeia cujas extremidades são iguais diz-se uma cadeia fechada, caso contrário, diz-se uma cadeia aberta. O número de arcos de uma cadeia diz-se o seu comprimento.

Se $x \in X$, então x é uma cadeia $x - x$ de comprimento zero. As cadeias de comprimento zero designam-se por cadeias triviais e as de comprimento não nulo por cadeias não triviais.

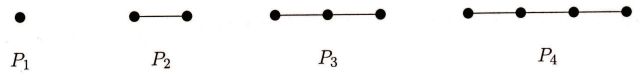
Definição

Uma cadeia diz-se simples se todos os arcos da cadeia são distintos e diz-se elementar se todos os vértices da cadeia são distintos, à excepção das extremidades que podem coincidir no caso da cadeia ser fechada.

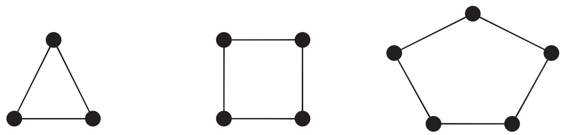
Definição

Uma cadeia simples, fechada e não trivial diz-se um ciclo

Um grafo simples com n vértices, formado por uma única cadeia elementar aberta, que contenha todos os seus vértices, diz-se um grafo cadeia e denota-se por P_n.



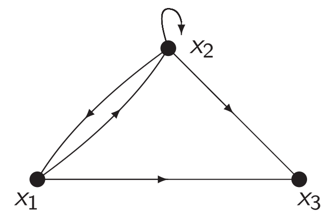
Um grafo simples com n vértices, regular de grau 2, formado por um único ciclo (elementar) diz-se um grafo ciclo e denota-se por C_n.



C_3 C_4 C_5

Exemplo:
No grafo orientado

G

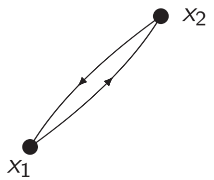


$x_2,\ (x_2,\ x_2),\ x_2$ é um **ciclo** de comprimento 1
$x_1,\ (x_1,\ x_2),\ x_2,\ (x_1,\ x_2),\ x_1$ é uma cadeia não trivial, fechada que é elementar mas não é simples

Observação: Num grafo simples (ou resultante da orientação de um grafo simples), uma cadeia fica completamente determinada se indicarmos a subsequência dos seus vértices.

Num multigrafo e mesmo num grafo orientado tal não sucede.
Por exemplo no grafo orientado

G



Definição

Um multigrafo $G = (X, \mathcal{U})$ (orientado ou não) diz-se conexo se, para quaisquer vértices x_i e x_j existe, em G, uma cadeia $x_i - x_j$. Caso contrário diz-se desconexo.

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo e R a relação binária, definida em X, por

$$x_i \, R \, x_j \quad \text{se, e só se,} \quad \text{existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j.$$

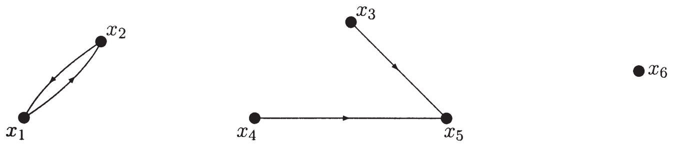
Proposição

R é uma relação de equivalência.

A relação de equivalência R origina uma partição de X em classes $X_1, \ldots, X_p$ cujo número p se designa por número de conexidade de G.

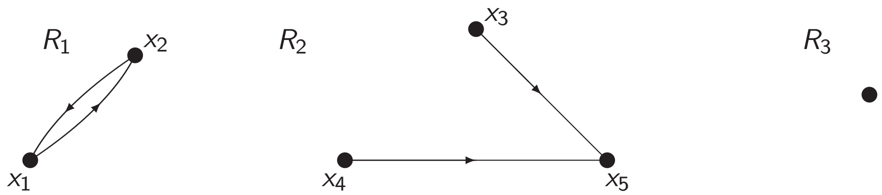
Os subgrafos de G, gerados respectivamente por $X_1, \ldots, X_p$ dizem-se as componentes conexas de G e representam-se por $R_1, \ldots, R_p$.

Exemplo: Consideremos o grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$



A relação de equivalência R origina uma partição de X em 3 classes $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$ e $X_3 = \{x_6\}$.

As componentes conexas de G são os grafos



e o número de conexidade de G é 3.

Observação

1. As componentes conexas de um grafo são grafos conexos.
2. Um grafo é conexo se e só se o seu número de conexidade é 1.

Proposição

Num grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$ existe uma cadeia $x_0 - x_r$ se, e só se, existe uma cadeia $x_0 - x_r$ elementar.

Proposição

Sejam $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples e x_0 e x_r dois vértices distintos de G. Se em G existem duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, então em G existe um ciclo.

Proposição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples sem ciclos. Se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G + u$ tem, no máximo, um ciclo.

Teorema

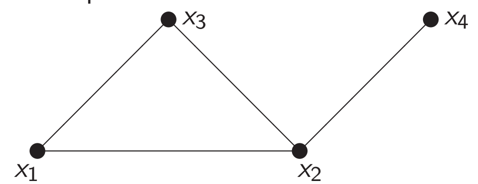
Um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, é bipartido se, e só se, não tem ciclos de comprimento ímpar.

Definição

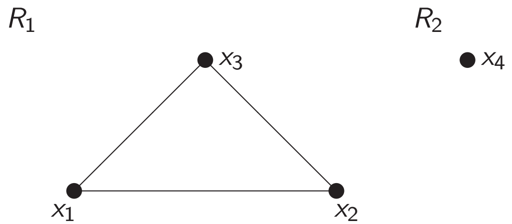
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Diz-se que $u \in \mathcal{U}$ é uma ponte de G se o número de conexidade de $G - u$ é superior ao número de conexidade de G.

Observação: Se $G = (X, U)$ é um grafo simples com número de conexidade p e $u \in U$ é uma ponte, então $G - u$ tem número de conexidade $p + 1$.

Exemplo: Consideremos o grafo simples conexo G



o arco $u = \{x_2, x_4\}$ é uma ponte pois o grafo $G - u$ tem duas componentes conexas



Proposição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Então $u \in \mathcal{U}$ é uma ponte se, e só se, u não faz parte de nenhum ciclo.

Proposição

Um grafo simples G e o seu grafo complementar $\overline{G}$ não podem ser ambos desconexos.

Definição

Num multigrafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ chama-se caminho a uma sequência alternada de vértices e arcos de G, iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade inicial no vértice que imediatamente o precede na sequência e extremidade final no vértice que imediatamente lhe sucede na sequência.

Trata-se de uma sequência da forma

$$L: \qquad x_0,\ u_1,\ x_1,\ u_2, \ldots,\ u_r,\ x_r$$

em que $x_i \in X$, $i = 0, \ldots, r$, e $u_i = (x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{U}$, $i = 1, \ldots, r$.

Diz-se que x_0 (respectivamente, x_r) é o **vértice inicial** (respectivamente, **vértice final**) do caminho L e que L é um caminho $x_0 - x_r$.

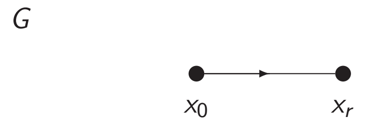
As definições de caminho fechado/aberto, comprimento de um caminho, caminho simples, caminho elementar, ..., obtêm-se substituindo, nas correspondentes definições para cadeias, "cadeia" por "caminho".

Definição

Um caminho simples, fechado e não trivial diz-se um circuito.

Observações:

1. Se L é um caminho $x_0 - x_r$ num multigrafo orientado G então L é também uma cadeia $x_0 - x_r$.
2. Num grafo orientado pode existir um caminho $x_0 - x_r$ e não existir nenhum caminho $x_r - x_0$.
   Por exemplo



3. Num digrafo, um caminho fica completamente determinado se indicarmos apenas a subsequência dos seus vértices.

Definição

Um multigrafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ diz-se fortemente conexo se, para quaisquer dois vértices x_i e x_j, existem em G um caminho $x_i - x_j$ e um caminho $x_j - x_i$.

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo orientado e S a relação binária, definida em X, por: para quaisquer $x_i, x_j \in X$,

$x_i \, S \, x_j$ se, e só se, existem em G um caminho $x_i - x_j$ e um caminho $x_j - x_i$.

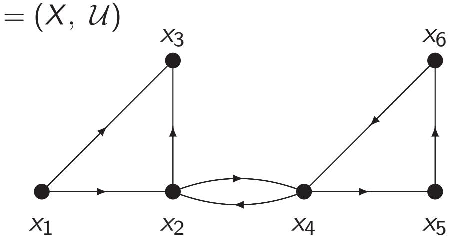
Tem-se que S é uma relação de equivalência.

Sejam $X'_1, \ldots, X'_q$ as suas classes de equivalência.

Ao número q chama-se **número de conexidade forte** de G.

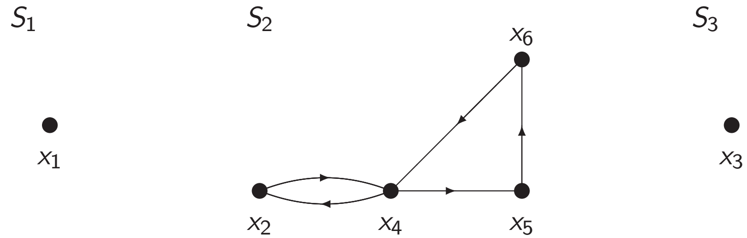
Os subgrafos gerados por $X'_1, \ldots, X'_q$ dizem-se as **componentes fortemente conexas** de G e representam-se, respectivamente, por $S_1, \ldots, S_q$.

Exemplo: Seja $G = (X, \mathcal{U})$



A relação de equivalência S, origina uma partição de X em três classes: $X'_1 = \{x_1\}$; $X'_2 = \{x_2, \; x_4, \; x_5, \; x_6\}$ e $X'_3 = \{x_3\}$.

Assim, as componentes fortemente conexas de G são:



Proposição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo orientado. Então:

(i) *Um arco de G pode não pertencer a nenhuma componente fortemente conexa;*

(ii) *Um arco de G não pode pertencer a mais do que uma componente fortemente conexa;*

(iii) *Um arco de G pertence a uma componente fortemente conexa se, e só se, faz parte de um circuito.*

Proposição

Seja G um digrafo. Se G é desconexo então o seu digrafo complementar $\overline{G}$ é fortemente conexo.

Matemática Discreta

2009/10

Jorge Manuel L. André
FCT/UNL

Programa

Na secção anterior, conhecemos os grafos cadeia, P_n, que são conexos e verificam a seguinte propriedade: qualquer seu arco é uma ponte. Estes grafos são árvores.

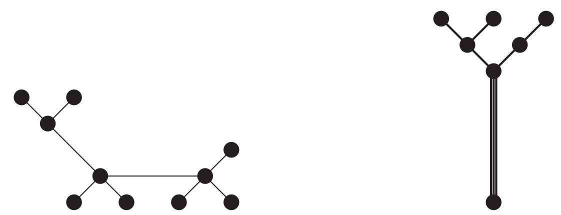
Como o próprio nome indica, quando construímos a árvore genealógica, de uma determinada família, estamos a construir um grafo que é uma árvore.

Definição

Designa-se por floresta um grafo sem ciclos e por árvore um grafo conexo sem ciclos.

Observação Uma floresta é um grafo em que cada componente conexa é uma árvore.

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo:



Este grafo é uma floresta composta por duas árvores.

Teorema

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices. Então são equivalentes as afirmações:

(i) *G é um grafo conexo sem ciclos.*

(ii) *G não tem ciclos e tem $n-1$ arcos.*

(iii) *G é conexo e tem $n-1$ arcos.*

(iv) *G é conexo e se $u \in \mathcal{U}$ então $G-u$ é desconexo.*

(v) *$\forall x_i,\ x_j \in X$, tais que $x_i \neq x_j$ existe uma, e uma só, cadeia elementar $x_i - x_j$, em G.*

(vi) *G não tem ciclos e se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G+u$ tem um, e um só, ciclo.*

Dem:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Por indução em n.
Para $n = 2$ o resultado é verdadeiro.
Suponhamos o resultado verdadeiro para todo o grafo conexo sem ciclos com um número de vértices inferior ou igual a k, com $k \geq 2$.
Seja $G' = (X', \mathcal{U}')$ um grafo conexo sem ciclos com $k+1$ vértices. Como G' não tem ciclos, todo o arco $u' \in \mathcal{U}'$ é uma ponte.
Logo, $G' - u'$, com $u' \in \mathcal{U}'$, tem duas componentes conexas R_1 e R_2 com k_1 e k_2 vértices, respectivamente. Como R_1 e R_2 são grafos conexos sem ciclos, por hipótese de indução, o número de arcos de R_1 é $k_1 - 1$ e o número de arcos de R_2 é $k_2 - 1$. Porque $1 + k = k_1 + k_2$ e o número de arcos de G' é $1 + k_1 - 1 + k_2 - 1$, temos

$$1 + k_1 - 1 + k_2 - 1 = 1 + k - 1 = k.$$

Dem(cont.):
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G não é conexo e sejam $R_1, \ldots, R_p$ as componentes conexas de G, com $p \geq 2$. Sejam n_i e m_i, respectivamente, o número de vértices e o número de arcos de R_i, $i = 1, \ldots, p$.
Porque R_i é conexo sem ciclos, temos

$$m_i = n_i - 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, p.$$

então, o número de arcos de G seria

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{i=1}^{p} n_i - p = n - p.$$

Como $p \geq 2$, concluiríamos que o número de arcos de G

$$n - p \leq n - 2,$$

o que contradiz a hipótese.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Dado que G tem n vértices e $n-1$ arcos, então para qualquer $u \in \mathcal{U}$, $G - u$ tem n vértices e $n-2$ arcos. Demonstremos que se $G' = G - u$ fosse conexo então o seu número de arcos m' verificaria $m' \geq n-1$, o que é uma contradição com $m' = n-2$. De facto se G' fosse conexo sem ciclos então por $(i) \Rightarrow (ii)$ teriamos $m' = n-1$. Por outro lado se G' fosse conexo com ciclos então retirando arcos pertencentes a ciclos obteriamos um grafo parcial de G ainda conexo e sem ciclos em que $m' > n-1$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Como G é conexo, então para quaisquer dois vértices de G existe uma cadeia elementar, da qual são extremidades.
Se existissem dois vértices distintos de G que fossem extremidades de pelo menos duas cadeias elementares distintas, então, em G, existiria um ciclo. Sendo u um arco deste ciclo, como u não era ponte, $G - u$ era conexo, o que contradiz a hipótese.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Se em G existisse um ciclo, então sendo x e y dois vértices distintos deste ciclo, existiriam duas cadeias elementares distintas $x - y$, o que contradiz (v). Logo, G não tem ciclos. Seja $u = \{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U}$, com $x_i \neq x_j$, vértices de X. Por (v) existe em G uma cadeia elementar $x_i - x_j$, e dado que $x_i \neq x_j$ também é uma cadeia simples. Assim, $x_i - x_j,\ u,\ x_i$ é um ciclo em $G + u$.
Porque G não tem ciclos, então $G + u$ tem no máximo um ciclo.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G é desconexo e sejam $x_i,\ x_j$ vértices de componentes conexas distintas. Tem-se $\{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U}$. Como G não tem ciclos e não existem cadeias com extremidades em vértices de componentes conexas distintas, podemos dizer que $G + u$ não tem ciclos, o que contradiz (vi). Logo, G é conexo.

Proposição

Uma floresta com n vértices e p componentes conexas tem $n - p$ arcos.

Observação.

Existem grafos simples com n vértices e $n - 1$ arcos que não são florestas e, portanto, não são árvores.

Por exemplo, $G = C_{n-1} \cup K_1$, com $n \geq 4$.

Proposição

Numa árvore, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Dem: Seja G uma árvore com $n \geq 2$ vértices. Seja $(d_1, \ldots,\ d_n)$ com $d_1 \geq \ldots \geq d_n$, a sequência de graus de G. Como G é conexo e $n \geq 2$ então, $d_n \geq 1$.
Suponhamos que, no máximo, G tinha um vértice de grau 1, então

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 1 + 2(n-1).$$

Como G é uma árvore com n vértices, o número de arcos é

$$m = n - 1.$$

Aplicando o Teorema do aperto de mãos, temos a contradição,

$$2(n-1) \geq 1 + 2(n-1).$$

Logo, G tem pelo menos dois vértices de grau 1.

Teorema

Sejam $d_1, \ldots,\ d_n$, com $n \geq 2$, inteiros tais que

$$d_1 \geq \ldots \geq d_n > 0.$$

Então, existe uma árvore cuja sequência de graus é

$$(d_1, \ldots,\ d_n)$$

se, e só se

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

Em certas situações, o grafo conexo que temos não é uma árvore, mas queremos obter, a partir do grafo inicial, um grafo parcial que seja uma árvore.

Teorema

Um grafo é conexo se, e só se, admite uma árvore como grafo parcial.

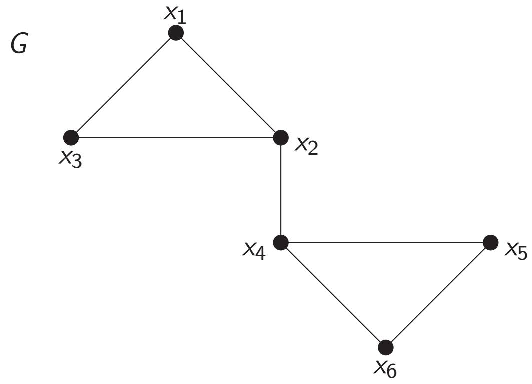
Dem: $\Longleftarrow$ Se um grafo G admite uma árvore como grafo parcial então G admite um grafo parcial conexo, logo é conexo.

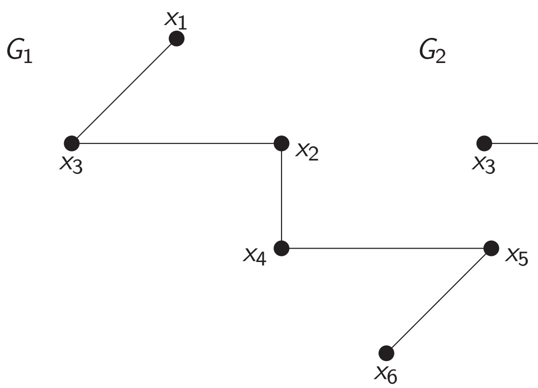
$\Longrightarrow$ Se G não tem ciclos, então G é uma árvore (grafo parcial de G).
Se G tem um ciclo, seja u_1 um arco de um dos ciclos de G. Então u_1 não é ponte, pelo que $G_1 = G - u_1$ é conexo e tem um número de ciclos inferior ao número de ciclos de G. Se $G - u_1$ não tem ciclos então $G_1 = G - u_1$ é árvore (grafo parcial de G). Caso contrário, seja u_2 um arco de um ciclo de $G_1 - u_2 = G_2$.
Porque o número de ciclos de G é finito, procedendo deste modo, obtemos um grafo $G_k = G_{k-1} - u_{k-1}$ que é conexo, sem ciclos. Logo G_k é árvore (grafo parcial de G).

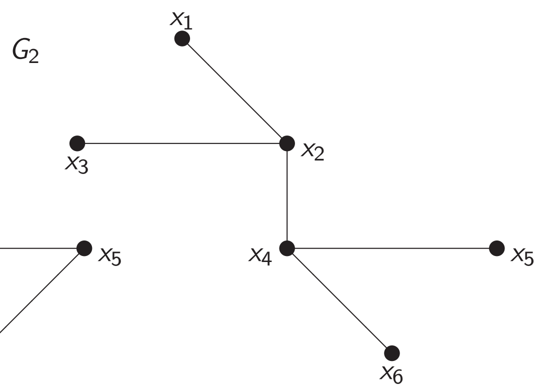
Definição

Seja G um grafo (respectivamente, grafo conexo). Designa-se por floresta (respectivamente, **árvore***) maximal de G qualquer grafo parcial de G, que tenha o mesmo número de conexidade que G e que seja* **floresta** *(respectivamente,* **árvore***).*

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo simples,







G_1 e G_2 são duas árvores maximais, não isomorfas de G

Definição

Chamamos grafo ponderado a um par (G, v) em que $G = (X, \mathcal{U})$ é um grafo e v é uma aplicação de $\mathcal{U}$ no conjunto dos números reais.

Se $u \in \mathcal{U}$ designa-se por valor/peso do arco **u** *o número real $v(u)$ e designa-se por* **valor de G***, e representa-se por $v(G)$, o número real*

$$v(G) = \sum_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

Vejamos dois algoritmos para determinar árvores maximais com valor mínimo.

Algoritmo de Kruskal

Seja $(G,\ v)$ um grafo ponderado, sendo $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

$1^o)$ Escolha-se um arco u_1 de G tal que

$$v(u_1) = \min_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

$2^o)$ Se os arcos $u_1, \ldots,\ u_i$ já foram escolhidos, então, sendo $\mathcal{U}_i = \{u_1, \ldots,\ u_i\}$, escolha-se um arco $u_{i+1} \in \mathcal{U}$ tal que

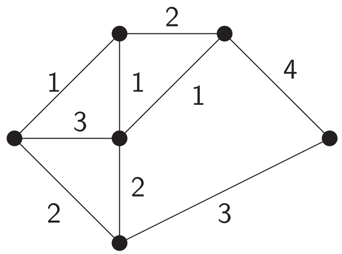
(1) $u_{i+1} \notin \mathcal{U}_i$

(2) $G' = (X,\ \mathcal{U}_i \cup \{u_{i+1}\})$ não tem ciclos

(3) u_{i+1} é de entre os arcos que verificam as condições (1) e (2), um com valor mínimo.

$3^o)$ Se já foram escolhidos $n-1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se $2^o)$.

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo ponderado



Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Algoritmo de Prim

Seja $(G,\ v)$ um grafo ponderado, sendo $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

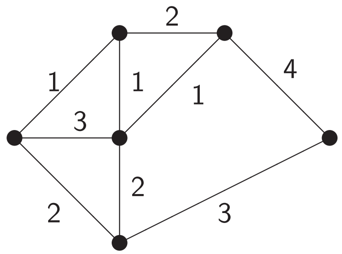
$1^o)$ Considere-se um vértice arbitrário de G, que designamos por x_1.

$2^o)$ Escolha-se um arco u_1 de G, incidente em x_1, que tenha valor mínimo.

$3^o)$ Se os arcos $u_1, \ldots, u_i$ já foram escolhidos e sendo $X_i = \{x_1, \ldots, x_{i+1}\}$ o conjunto de vértices formado pela suas extremidades, escolha-se um arco u_{i+1} de valor mínimo entre os arcos $\{x_j, x_{i+2}\}$ de G tal que $x_j \in X_i$ e $x_{i+2} \notin X_i$ (i.e. u_{i+1} é um arco de valor mínimo entre os arcos ainda não escolhidos com precisamente uma extremidade em X_i).

$4^o)$ Se já foram escolhidos $n-1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se $3^o)$.

Exemplo: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1.

Observações:

• Se temos um grafo simples conexo e queremos uma sua árvore maximal, podemos usar qualquer um dos algoritmos anteriores bastando para isso, atribuir o mesmo valor a todos os arcos do grafo.

• Em geral, em termos de implementação em computador, o Algoritmo de Prim é mais rápido do que o de Kruskal.

2.3. Árvores (adenda) - *Vítor Hugo Fernandes*

O problema da cadeia mais curta

Sejam (G, v) um grafo conexo ponderado e x e y dois vértices de G. O problema da cadeia mais curta consiste em determinar uma cadeia $x - y$

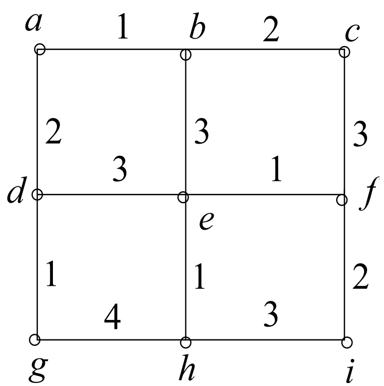
$$L: \ x = x_0, u_1, x_1, u_2, \ldots, u_k, x_k = y$$

por forma que o valor de L, i.e.

$$v(L) = \sum_{i=1}^{k} v(u_i)$$

(soma dos valores dos arcos de L), seja o mínimo possível. Neste caso, dizemos que L é uma cadeia $x - y$ (de valor) mínima.

Exemplo. Consideremos o seguinte grafo ponderado:



Uma breve análise permite-nos determinar facilmente que

$$L: \ a \to b \to e \to f \to i$$

é uma cadeia mínima do vértice a para o vértice i (cujo valor é igual a 7).

No entanto, para grafos ponderados de ordens e tamanhos maiores, o problema da cadeia mais curta é, naturalmente, mais complicado de resolver através de uma análise directa que corresponda a determinar todas (ou quase todos) as possíveis cadeias e escolher a mais curta.
Assim, torna-se necessário aplicar um método sistemático para encontrar uma tal cadeia. Enunciamos a seguir um algoritmo para resolver este problema.

Algoritmo da Cadeia mais Curta (Dijkstra)

Seja (G, v) um grafo conexo ponderado, em que v toma valores não negativos, e sejam x e y dois vértices distintos de G. Designemos x por vértice inicial e y por vértice final.

PASSO 1.

1. Atribuir a x uma *etiqueta definitiva* igual a 0;
2. Atribuir a cada vértice x' adjacente a x uma *etiqueta temporária* igual ao valor do arco correspondente, i.e. igual a $v(\{x, x'\})$;
3. Sendo ε a menor das etiquetas temporárias acabadas de atribuir, para cada vértice z com etiqueta temporária igual a ε, atribuir a z uma etiqueta definitiva igual a ε.

PASSO 2.

Se y tem atribuída uma etiqueta definitiva, TERMINAR, caso contrário ir para o PASSO 3.

PASSO 3.

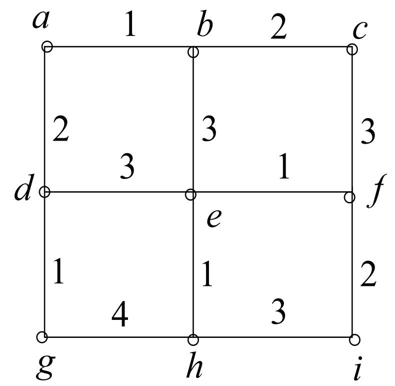
1. Para cada vértice z ao qual se acabou de atribuir uma etiqueta definitiva, $\bar{\varepsilon}$, e para cada vértice z' adjacente a z, atribuir a z' uma etiqueta temporária igual a

$$\bar{\varepsilon} + v(\{z, z'\}),$$

excepto se z' já possui uma etiqueta de valor inferior;

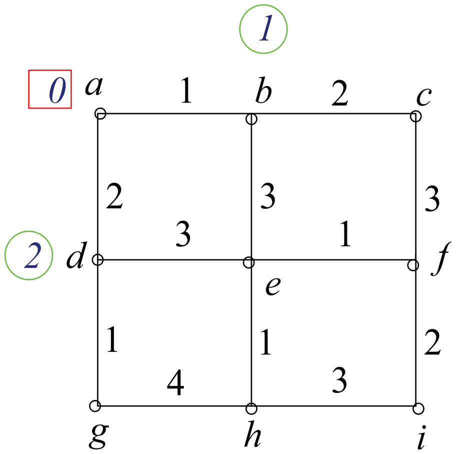
2. Sendo ε a menor das etiquetas temporárias de todos os vértices no grafo com etiquetas temporárias atribuídas (não só aos que acabámos de atribuir), para cada vértice z (no grafo) com etiqueta temporária igual a ε, atribuir a z uma etiqueta definitiva igual a ε;
3. Ir para o PASSO 2.

Exemplo. Voltemos a considerar o grafo ponderado do exemplo anterior:

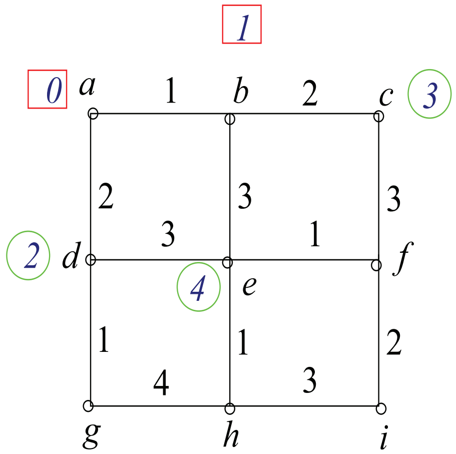


Apliquemos o algoritmo anterior, tomando a como vértice inicial e i como vértice final.
Dado um vértice x, designemos por $\varepsilon_T(x)$ uma etiqueta temporária de x e por $\varepsilon_D(x)$ a etiqueta definitiva (se as possuir).
Então:

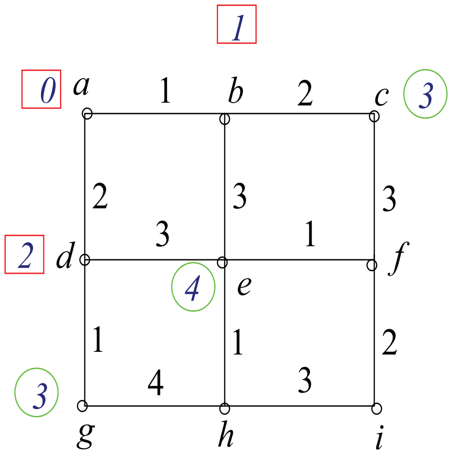
1. Atribuir $\varepsilon_D(a) = 0$, $\varepsilon_T(b) = 1$ e $\varepsilon_T(d) = 2$;



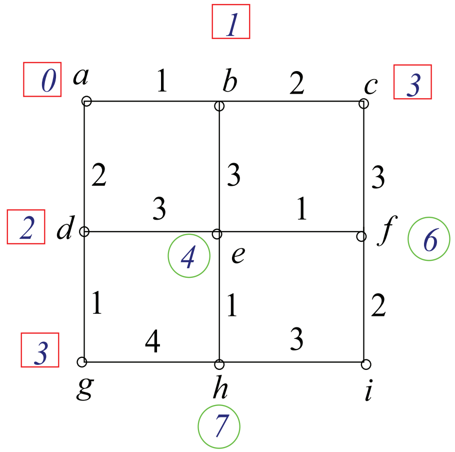
2. Atribuir $\varepsilon_D(b) = 1$, $\varepsilon_T(c) = 1 + 2 = 3$ e $\varepsilon_T(e) = 1 + 3 = 4$;



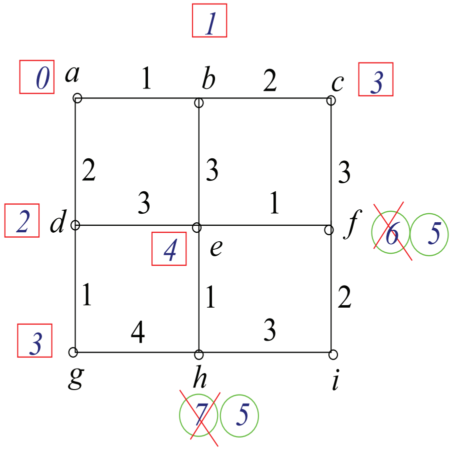
3. Atribuir $\varepsilon_D(d) = 2$, $\varepsilon_T(g) = 2 + 1 = 3$ e manter $\varepsilon_T(e) = 4 < 2 + 3$;



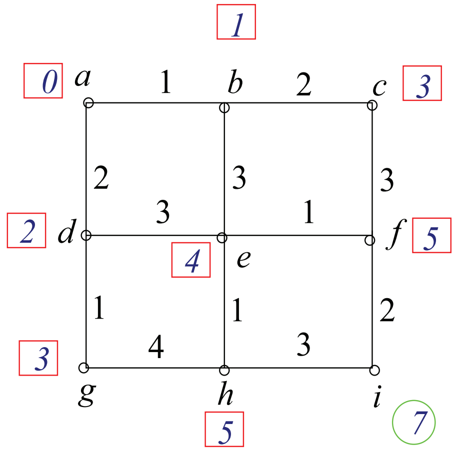
4. Atribuir $\varepsilon_D(c) = 3$, $\varepsilon_D(g) = 3$, $\varepsilon_T(f) = 3 + 3 = 6$ e $\varepsilon_T(h) = 3 + 4 = 7$;



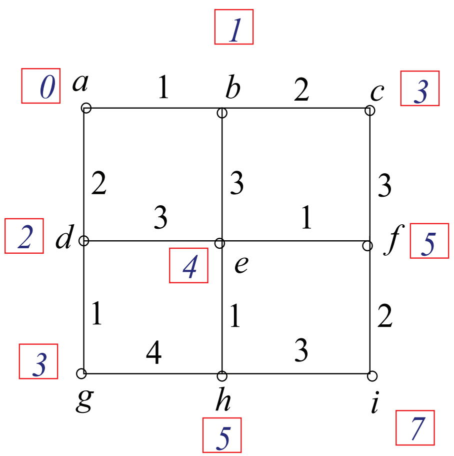
5. Atribuir $\varepsilon_D(e) = 4$, $\varepsilon_T(f) = 4 + 1 = 5 < 6$ e $\varepsilon_T(h) = 4 + 1 = 5 < 7$;



6. Atribuir $\varepsilon_D(f) = 5$, $\varepsilon_D(h) = 5$ e $\varepsilon_T(i) = 5 + 2 = 7 < 5 + 3$;



7. Atribuir $\varepsilon_D(i) = 7$ e terminar.



Proposição. *Sejam (G, v), com $G = (X, \mathcal{U})$, um grafo conexo ponderado e x e y dois vértices distintos de G.*

1. Se $|V| = n$ então o Algoritmo da Cadeia mais Curta, tomando x e y como vértices inicial e final respectivamente, termina ao fim de repetir o PASSO 3 *no máximo $n-2$ vezes;*

2. Consideremos as etiquetas dos vértices de G no fim de se aplicar o Algoritmo da Cadeia mais Curta, tomando x e y como vértices inicial e final respectivamente.
Seja z um vértice com etiqueta definitiva ε (em particular, $z = y$) e sejam $x = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = z$ vértices com etiquetas definitivas

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x_0) = 0, \quad \varepsilon(x_1), \quad \ldots, \quad \varepsilon(x_{k-1}), \quad \varepsilon(x_k) = \varepsilon(z) = \varepsilon$$

tais que, para $i \in \{1, \ldots, k\}$,

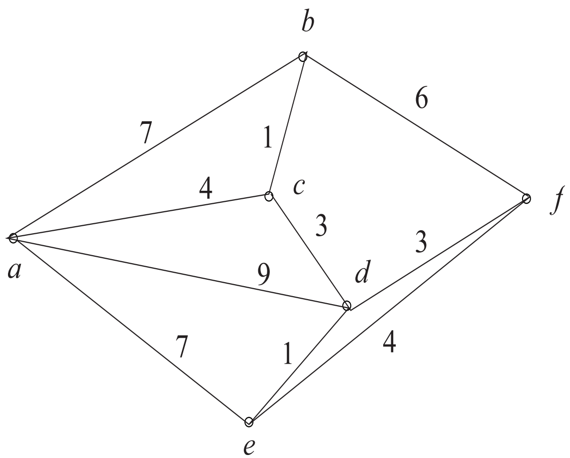
$$\{x_{i-1}, x_i\} \in \mathcal{U} \ \text{ e } \ \varepsilon(x_i) - \varepsilon(x_{i-1}) = v(\{x_{i-1}, x_i\}).$$

Então

$$x = x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{k-1} \longrightarrow x_k = z$$

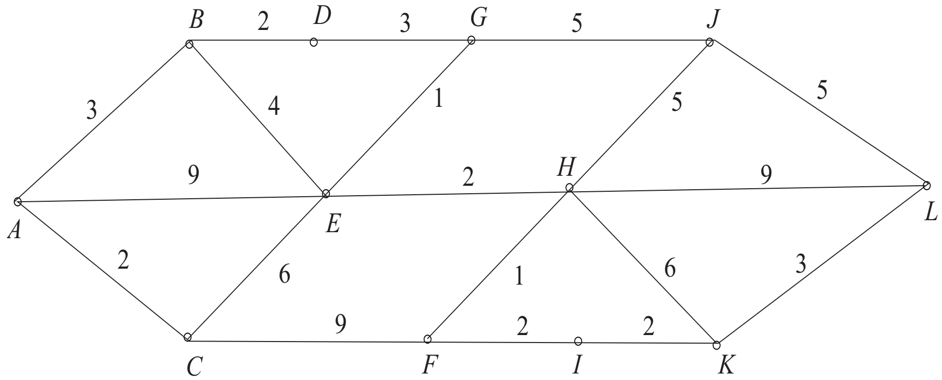
é uma cadeia $x - z$ mínima de valor igual a ε.

Exercício 1. Considere o seguinte grafo ponderado:



Aplique o Algoritmo da Cadeia mais Curta para mostrar que o valor de uma cadeia $a - f$ mínima é igual a 10.

Exercício 2. Considere o seguinte grafo ponderado:



Aplique o Algoritmo da Cadeia mais Curta para mostrar que o valor de uma cadeia $A - L$ mínima é igual a 17. Indique uma tal cadeia.

Matemática Discreta

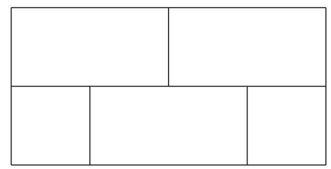
2009/10

Jorge Manuel L. André
FCT/UNL

2.4. Grafos Eulerianos

Como já o referimos, é neste capítulo que iremos tratar de resolver o problema das pontes de Königsberg.

Uma charada muito conhecida, deste tipo de problemas, é a seguinte: A figura



pode ser desenhada através de traços contínuos sem nunca passar por cima de um traço já feito?

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo. Chamamos cadeia euleriana a uma cadeia simples contendo todos os arcos de G e ciclo euleriano a um ciclo contendo todos os arcos de G.

Se G é um multigrafo orientado, substituindo na definição "cadeia" por "caminho" obtêm-se as correspondentes definições de caminho euleriano e de circuito euleriano.

Definição

Um multigrafo diz-se euleriano se admite um ciclo euleriano e semi-euleriano se admite uma cadeia euleriana aberta.

Teorema

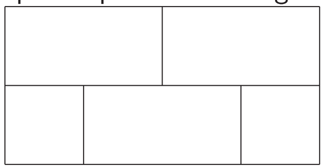
(i) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem um ciclo euleriano se, e só se, todo o vértice de G tem grau par.*

(ii) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$ se, e só se, x e y são os únicos vértices de G com grau ímpar.*

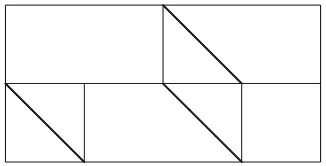
Observação:

1. Não existem multigrafos simultaneamente eulerianos e semi-eulerianos.
2. Se um multigrafo não conexo admite uma cadeia euleriana aberta ou um ciclo euleriano então, no máximo, uma componente conexa do multigrafo é um multigrafo não nulo e todas as outras componentes conexas são grafos nulos.

Regressando à pergunta que foi feita no inicio deste capítulo: Será possível desenhar a seguinte figura sem passar por cima de segmentos?



Construamos o seguinte grafo: os vértices correspondem ao ponto de encontro de dois segmentos de recta da figura e dois vértices são adjacentes, se os dois pontos a que correspondem estes dois vértices, na figura, estão unidos por um segmento de recta. Este grafo tem doze vértices, sendo oito deles de grau ímpar. Colocando mais três segmentos de recta na figura inicial, obtemos uma figura que representa um grafo com apenas dois vértices com grau ímpar. Logo tem uma cadeia semi-euleriana.



Teorema

(i) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X, \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um circuito euleriano se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x),$$

para todo o $x \in X$.

(ii) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X, \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um caminho* $x - y$ *euleriano, com* $x \neq y$ *se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x) + 1,$$

$$d^+(y) = d^-(y) - 1,$$

$$d^+(x_i) = d^-(x_i),$$

para todo o $x_i \in X \setminus \{x,\ y\}$.

Sendo $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo euleriano, como determinar um ciclo euleriano? O algoritmo seguinte, dá-nos a resposta.

O seguinte algoritmo permite encontrar um ciclo Euleriano num grafo Euleriano.

Algoritmo de Fleury

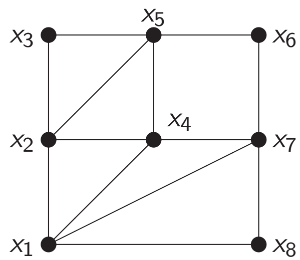
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo euleriano.

1^o Escolha um vértice x_1 de G.

2^o Sendo $L: \quad x_1,\ u_1,\ x_2, \ldots,\ u_p,\ x_k$ a cadeia simples, obtida pelo processo, seja $u_{k+1} = \{x_k, x_{k+1}\} \in \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots, u_k\}$ um arco incidente em x_k que não pertence a L e que, caso seja possível, não seja ponte de $G' = (X, \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots,\ u_k\})$.

3^o Se $d_{G'}(x_{k+1}) = 1$, o algoritmo termina, caso contrário repita-se 2^o.

Exemplo: Consideremos o grafo



que é euleriano pois é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Utilizemos o algoritmo de Fleury para determinar um ciclo euleriano.

Matemática Discreta

2009/10

Jorge Manuel L. André
FCT/UNL

Programa

2.5. Grafos Hamiltonianos

Consideremos o seguinte tabuleiro 3×4 em que as "casas" brancas estão identificadas com números e as "casas" pretas com letras:

f	5	c	2
3	a	6	d
e	4	b	1

É possível, através de movimentos lícitos no jogo de xadrez, o cavalo percorrer, uma e uma só vez, todas as "casas" do tabuleiro começando na "casa" número 1: por exemplo, $1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, f$.

Mas não existe maneira do cavalo começar e regressar à "casa" número 1, depois de percorrer todas as "casas" do tabuleiro.

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo. Chamamos cadeia hamiltoniana a uma cadeia elementar que contenha todos os vértices de G e ciclo hamiltoniano a um ciclo elementar que contenha todos os vértices de G.

Se G é um grafo orientado substituindo, nas definições anteriores "cadeia" por "caminho" obtêm-se as correspondentes definições de caminho hamiltoniano e de circuito hamiltoniano.

Definição

Um grafo diz-se hamiltoniano se admite um ciclo hamiltoniano e semi-hamiltoniano se admite uma cadeia hamiltoniana aberta.

Observação:

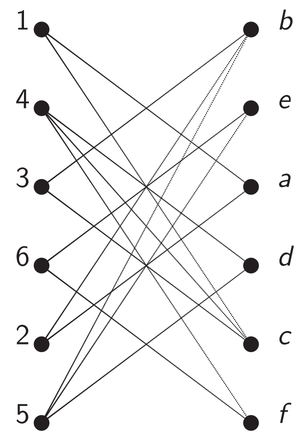
1. Todo o grafo hamiltoniano é semi-hamiltoniano.
2. Se um grafo admite uma cadeia hamiltoniana então é conexo.
3. Se um grafo orientado admite um circuito hamiltoniano então é fortemente conexo.
4. Não há perda de generalidade em enunciar os resultados referentes à existência de cadeias hamiltonianas em termos de grafos simples e os resultados referentes à existência de caminhos hamiltonianos em termos de digrafos.

Proposição

Se um grafo simples admite um ciclo hamiltoniano então não tem pontes.

O recíproco da Proposição anterior não é verdadeiro.

O grafo associado ao problema que colocámos no inicio do capítulo, é um grafo cujos vértices correspondem às "casas" do tabuleiro e dois vértices são adjacentes se for possível ao cavalo deslocar-se duma das "casas" para a outra, através de um movimento lícito. Neste caso, tabuleiro 3×4, temos o grafo bipartido:



Este grafo não possui ciclos hamiltonianos. Efectivamente, se o grafo possuísse um ciclo hamiltoniano, como os vértices 1, 2 e 3 têm grau 2, os troços $(c, 1, a)$, $(a, 2, b)$ e $(b, 3, c)$ teriam de fazer parte de tal ciclo que, por não poder repetir vértices, teria de ser $(c, 1, a, 2, b, 3, c)$, o qual não passa por todos os vértices, contra a hipótese de ser hamiltoniano.

Proposição

K_n, com $n \geq 3$, tem um ciclo hamiltoniano.

Teorema (Teorema de Ore)

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices, tal que

$$d(x) + d(x') \geq n, \qquad \forall x,\ x' \in X \text{ não adjacentes.}$$

Então, G é hamiltoniano.

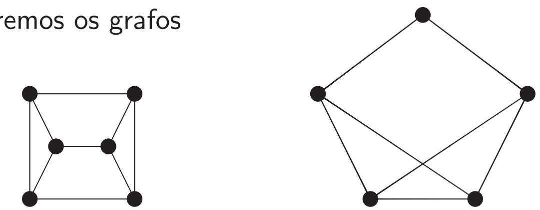
Corolário (Teorema de Dirac)

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices, tal que

$$d(x) \geq \frac{n}{2}, \qquad \forall x \in X.$$

Então, G é hamiltoniano.

Exemplo: Consideremos os grafos



A B

Usando o Corolário anterior, porque $d(x) \geq 3$, qualquer que seja o vértice do grafo A, e 6 é o número de vértices deste grafo, concluímos que o grafo tem um ciclo hamiltoniano.

No caso do grafo B, o Corolário não pode ser usado, no entanto pelo Teorema, podemos concluir que este grafo também tem um ciclo hamiltoniano.

Matemática Discreta

2009/10

Jorge Manuel L. André
FCT/UNL

2.6. Matrizes e Grafos

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

Definição

Chamamos marcação dos vértices de um grafo $G = (X,\mathcal{U})$, com $|X| = n$, a uma aplicação bijectiva ψ de X em $\{1,\dots,n\}$.

Um grafo marcado nos vértices é um par (G,ψ) em que G é um grafo e ψ é uma marcação dos vértices de G.

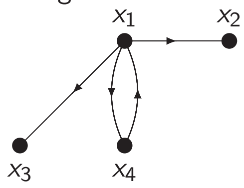
Definição

Seja $G = (X,\mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices, com (G,ψ) e $X = \{x_1,\dots,x_n\}$. Chamamos matriz de adjacências de G, em relação à marcação ψ, à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n, tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i,\ x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Seja $(G,\ \psi)$ um grafo marcado nos vértices, com $G = (X,\mathcal{U})$ e $X = \{x_1,\dots,\ x_n\}$. Referimo-nos à marcação $(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ para designar a marcação ψ tal que $\psi(x_{i_j}) = j$, para $j = 1,\dots,n$.

Exemplo. Consideremos o digrafo G



As matrizes de adjacências de G, em relação às marcações $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ e $(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4)$ são, respectivamente, as matrizes

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

Proposição

Sejam A e A' matrizes de adjacências de um digrafo $G = (X,\ \mathcal{U})$ em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação P tal que

$$A' = PAP^{-1}$$

(uma matriz de permutação de ordem n é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem n efectuando uma troca nas suas linhas).

Observação.

1. Sendo $G = (X,\mathcal{U})$ um digrafo com $X = \{x_1,\dots,x_n\}$, chamamos marcação usual dos vértices de G à marcação $(x_1,\dots,x_n)$. Assim, a matriz de adjacências de G, em relação à marcação usual, é a matriz $A = [a_{ij}]$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i,\ x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

2. Através da matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ de um digrafo G, em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$, podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de G:

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha i de A, ou equivalentemente, o número de elementos da linha i que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna i de A.

Exemplo. Considerando o grafo do exemplo anterior, cuja matriz de adjacências em relação à marcação $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, dos seus vértices é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\sum_{j=1}^{4} a_{1j} = 3 = d^+(x_1) \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{4} a_{j3} = 1 = d^-(x_3).$$

Teorema

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices e $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de G, em relação à marcação usual $(x_1, \ldots, x_n)$. Então, sendo s_{ij} o número de sucessores simultâneos de x_i e x_j, i.e. $s_{ij} = |\Gamma^+(x_i) \cap \Gamma^+(x_j)|$, temos

$$AA^T = [s_{ij}].$$

Prova. O elemento da linha i coluna j de AA^T é

$$s_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn}.$$

Se $i = j$ tem-se

$$s_{ij} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = d^+(x_i)$$

e, portanto, s_{ii} é igual ao número de sucessores de x_i. Se $i \neq j$, os vértices x_i e x_j têm o vértice x_k como sucessor simultâneo se, e só se,

$$(x_i,\ x_k) \in \mathcal{U} \qquad \text{e} \qquad (x_j,\ x_k) \in \mathcal{U}.$$

Mas tal sucede se, e só se, $a_{ik} = 1$ e $a_{jk} = 1$, ou ainda, se, e só se, $a_{ik}a_{jk} = 1$. Pelo que o resultado se verifica.

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um **grafo simples**, *com $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chama-se matriz de adjacências de G, em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$ dos seus vértices, à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n, tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i,\ x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Observação.

1. A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
2. A matriz de adjacências de um grafo simples é simétrica, isto é, $A = A^T$.

Teorema

Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$, em relação à marcação usual $(x_1, \ldots, x_n)$. Então, para $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}],$$

em que $a_{ij}^{(k)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$ com comprimento k existentes em G.

Prova. Por indução em k.
Para $k = 1$, verifica-se pois para $i = j$, $a_{ij} = 0$ e, para $i \neq j$, $a_{ij} = 1$ se, e só se, $\{x_i,\ x_j\} \in \mathcal{U}$. Como num grafo simples não existem arcos paralelos, a_{ij} representa o número de cadeias $x_i - x_j$, com comprimento 1, existentes em G.
Suponhamos então que, para $l - 1 \geq 1$, na matriz $A^{l-1} = [a_{ij}^{(l-1)}]$, $a_{ij}^{(l-1)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G, com comprimento $l - 1$, e demonstremos que em $A^l = [a_{ij}^{(l)}]$, $a_{ij}^{(l)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G, com comprimento l.
Tem-se $A^l = A^{l-1}A$ pelo que $a_{ij}^{(l)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(l-1)} a_{sj}$. Pela hipótese de indução, $a_{is}^{(l-1)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_s$, de G, com comprimento $l - 1$.
Então, $a_{is}^{(l-1)} a_{sj}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G, com comprimento $(l - 1) + 1 = l$ e tendo como penúltimo vértice x_s. Como no somatório x_s percorre todos os vértices do grafo o resultado é verdadeiro para l.
Pelo princípio de indução, o resultado é verdadeiro.

Observação. Substituindo no Teorema anterior, "grafo simples" por "digrafo" e "cadeia" por "caminho", obtemos um resultado válido.

Exemplo. Com o exemplo anterior, determinemos o número de caminhos $x_4 - x_3$ de comprimento 2, existentes em G. Ora,

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz tem na posição $(4, 3)$ um elemento não nulo, usando o Teorema, existe um, e um só, caminho de $x_4 - x_3$ de comprimento 2 em G.