

Matemática Discreta 2011

Departamento Matemática (FCT/UNL)

Capítulo 2

2.1 Grafos e Aplicações. Generalidades

O nosso estudo vai centrar-se em duas espécies de grafos:

- Grafos orientados;
- Grafos não orientados.

Definição 2.1.1:

Chamamos *grafo orientado*, G , a um par (X, \mathcal{U}) em que:

(i) X é um conjunto finito, não vazio e \longrightarrow **Conjunto de vértices de G**

(ii) \mathcal{U} é um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$.

\searrow **Conjunto dos arcos de G**

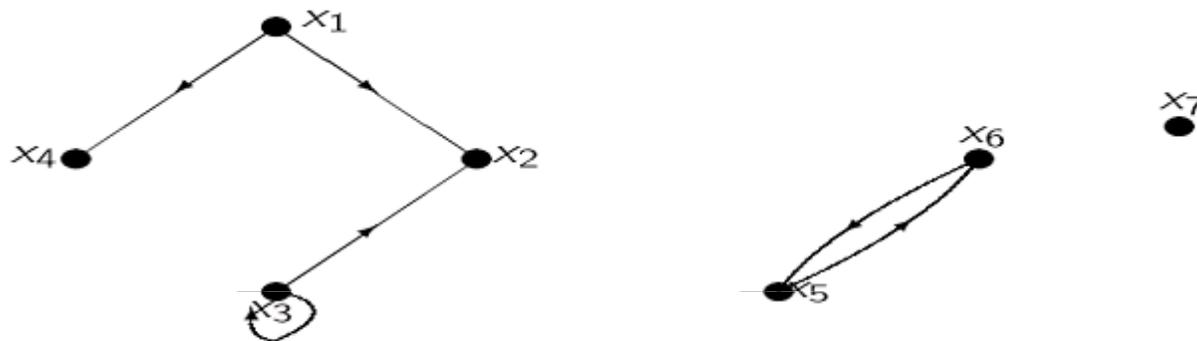
$|X|$ = número de vértices de G = **Ordem de G**

$|\mathcal{U}|$ = número de arcos de G = **Tamanho de G**

Exemplo: Uma representação possível para o grafo $G = (X, \mathcal{U})$, em que

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \text{ e}$$

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_5, x_6), (x_6, x_5), (x_3, x_3), (x_3, x_2)\}$$



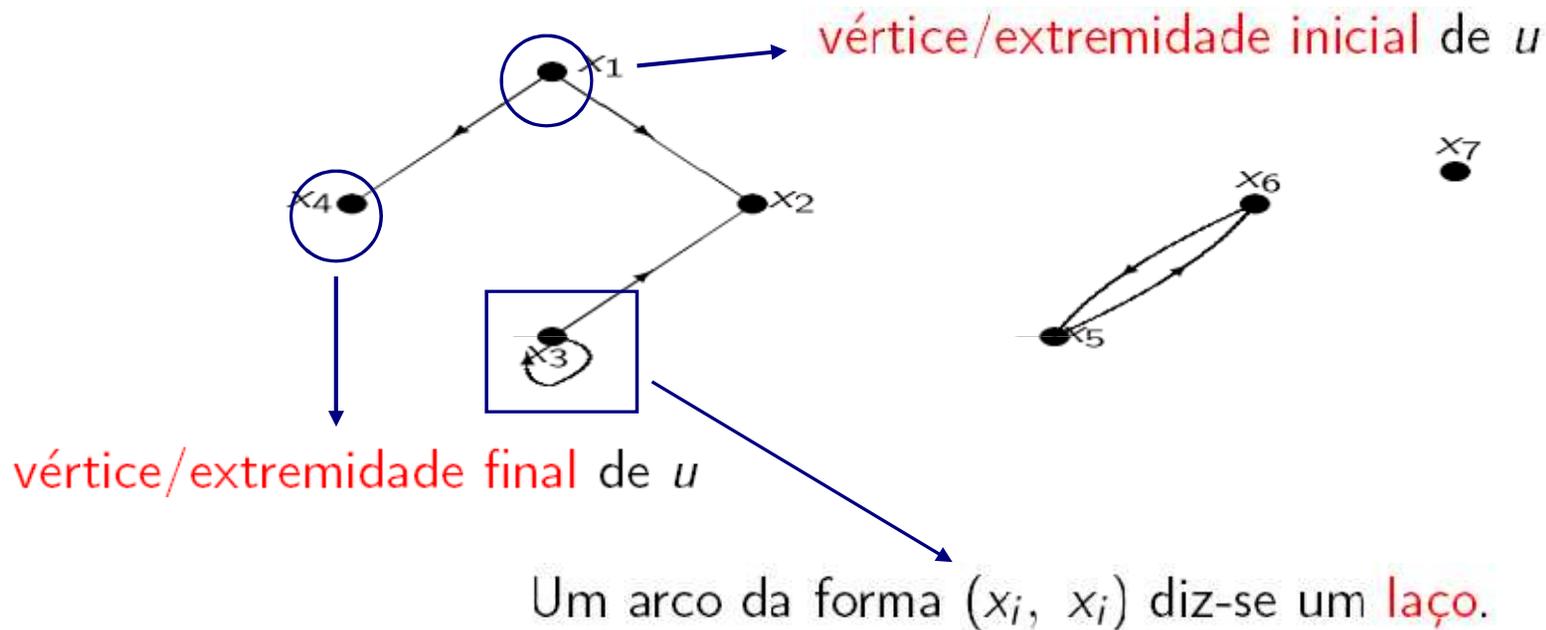
Grafo orientado de ordem 7

de tamanho 6

Exemplo: Uma representação possível para o grafo $G = (X, \mathcal{U})$, em que

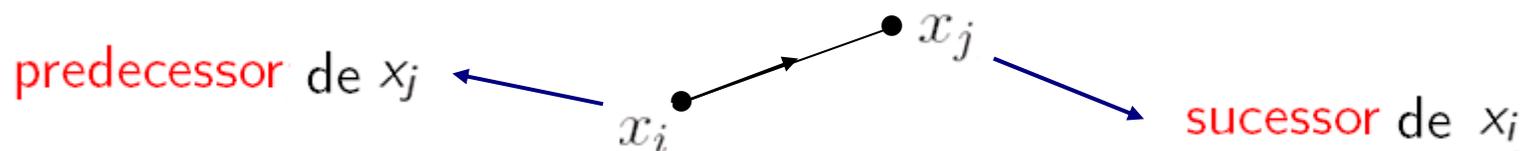
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \text{ e}$$

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_5, x_6), (x_6, x_5), (x_3, x_3), (x_3, x_2)\}$$

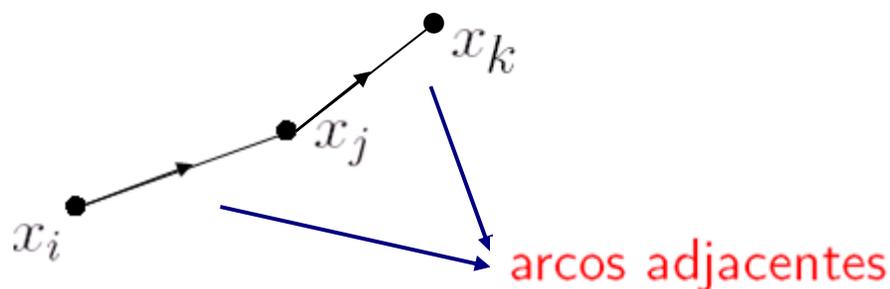


- $u = (x_i, x_j) \in \mathcal{U}$
 - u é um arco de x_i para x_j
 - x_i e x_j são os vértices terminais ou as extremidades de u

- Num grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ dois vértices distintos x_i e x_j dizem-se **vértices adjacentes** se existir, pelo menos, um arco neles incidentes, isto é, x_i e x_j , com $i \neq j$, são vértices adjacentes se $(x_i, x_j) \in \mathcal{U}$ ou $(x_j, x_i) \in \mathcal{U}$. Considera-se que um vértice x_i é adjacente a si próprio se, e só se, $(x_i, x_i) \in \mathcal{U}$.



- Dois arcos distintos dizem-se **arcos adjacentes** se têm, pelo menos, uma extremidade comum. Considera-se que um arco u é adjacente a si próprio se, e só se, u é um laço.



- O conjunto dos sucessores e o conjunto dos predecessores de x serão designados, respectivamente, por:

$$\Gamma^+(x) = \{y \in X : (x, y) \in \mathcal{U}\}$$

Conjunto dos
sucessores de x

$$\Gamma^-(x) = \{y \in X : (y, x) \in \mathcal{U}\}.$$

Conjunto dos
predecessores de x

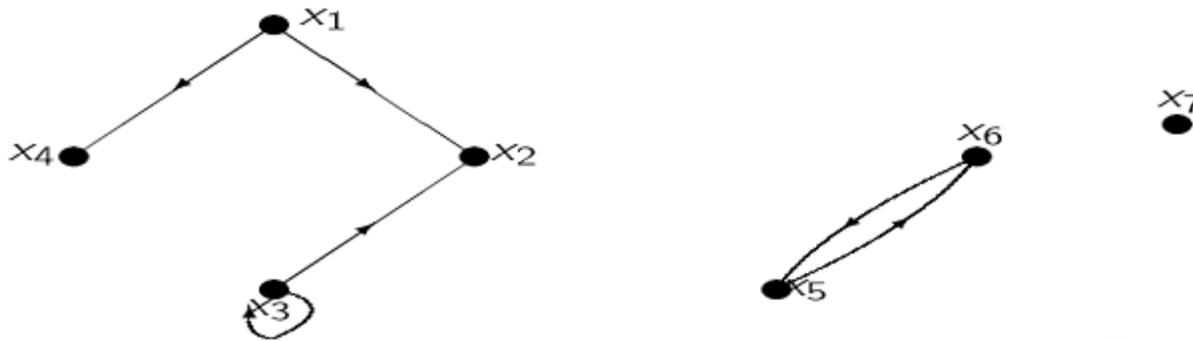
- Designaremos por $\Gamma(x)$ o conjunto dos vértices adjacentes a x .
Num grafo orientado tem-se

$$\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x).$$

Conjunto dos vértices
adjacentes a x

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$ $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ e

$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_5, x_6), (x_6, x_5), (x_3, x_3), (x_3, x_2)\}$



$$\Gamma^+(x_1) = \{x_2, x_4\} \quad \Gamma^-(x_1) = \emptyset$$

$$\Gamma^+(x_3) = \{x_2, x_3\} \quad \Gamma^-(x_3) = \{x_3\}$$

$$\Gamma^+(x_2) = \emptyset \quad \Gamma^-(x_2) = \{x_1, x_3\}$$

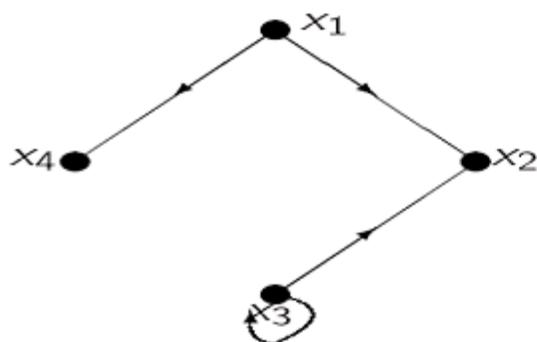
$$\Gamma^+(x_7) = \emptyset \quad \Gamma^-(x_7) = \emptyset$$

Fonte

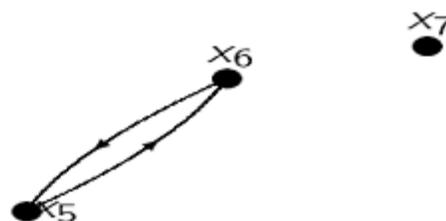
Poço

Vértice isolado

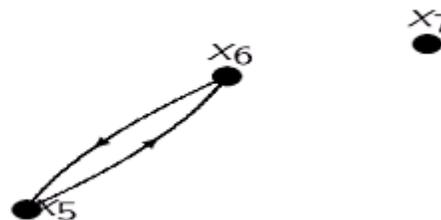
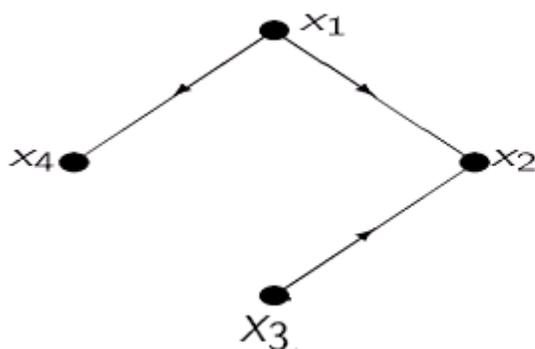
- De entre os grafos orientados, existe uma classe muito importante, os grafos orientados sem laços que se designam por **digrafos**.



Grafo orientado



**Grafo orientado
que é
digrafo**



Definição 2.1.2:

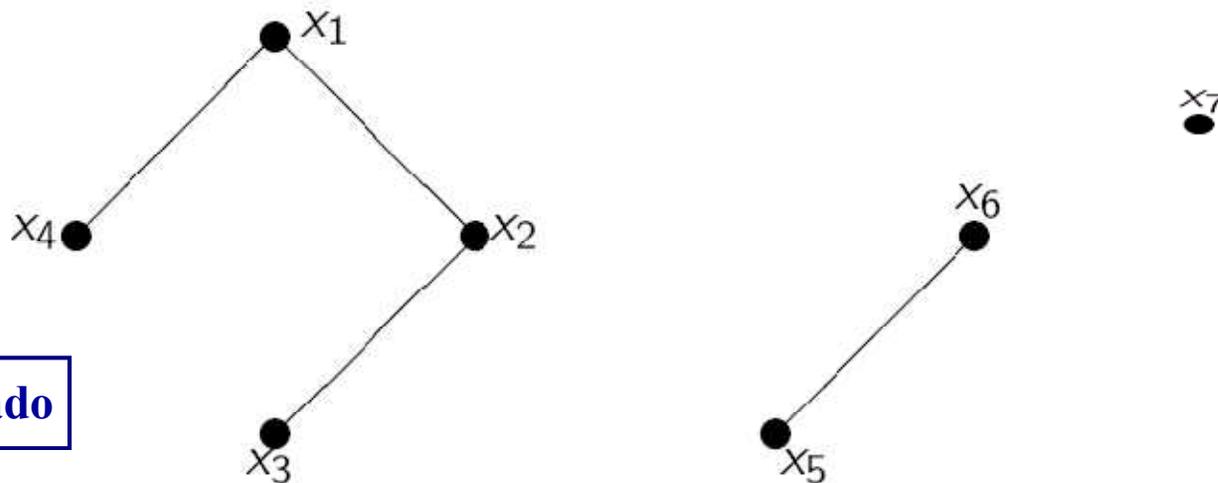
Dizemos que $G = (X, \mathcal{U})$ é um *grafo não orientado* ou, ainda, que $G = (X, \mathcal{U})$ é um *grafo simples* se:

- (i) X é um conjunto finito, não vazio e
- (ii) \mathcal{U} é um subconjunto de

$$X \otimes X = \{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}.$$

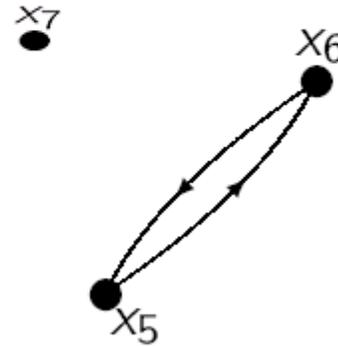
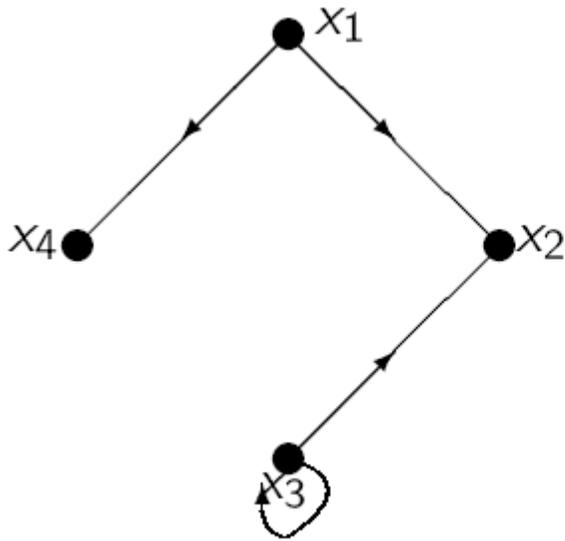
Atenção:
não há laços

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$ $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ e
 $\mathcal{U} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_3, x_2\}\}$



Grafo não orientado

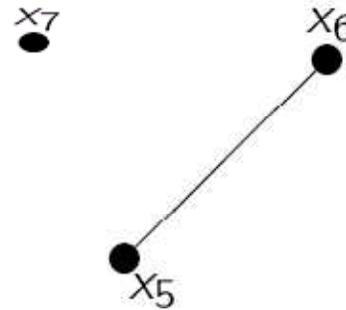
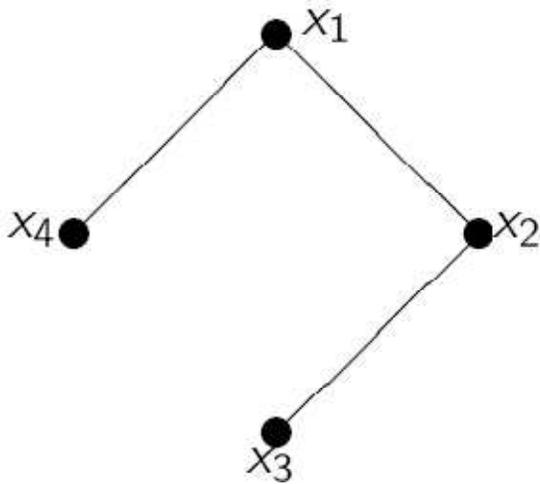
(1)



grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$

tem sempre
associado

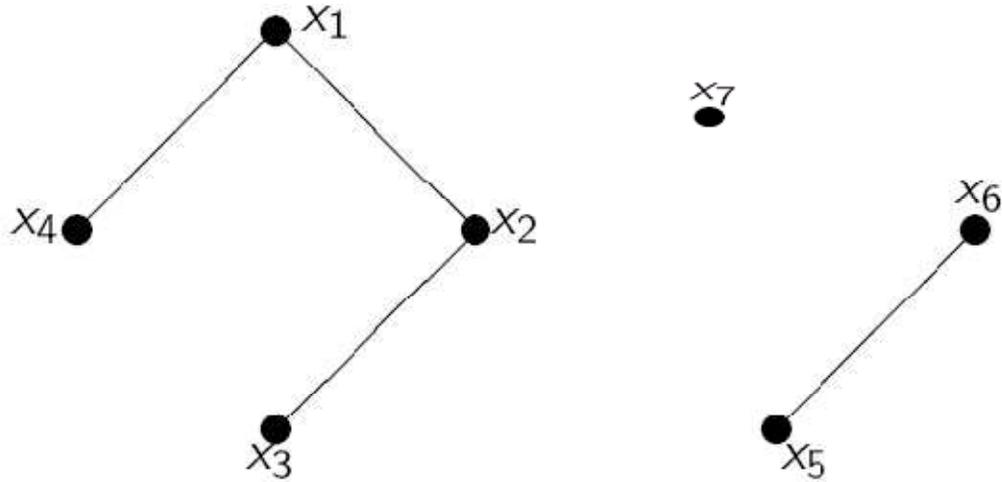
grafo simples $G' = (X, \mathcal{U}')$



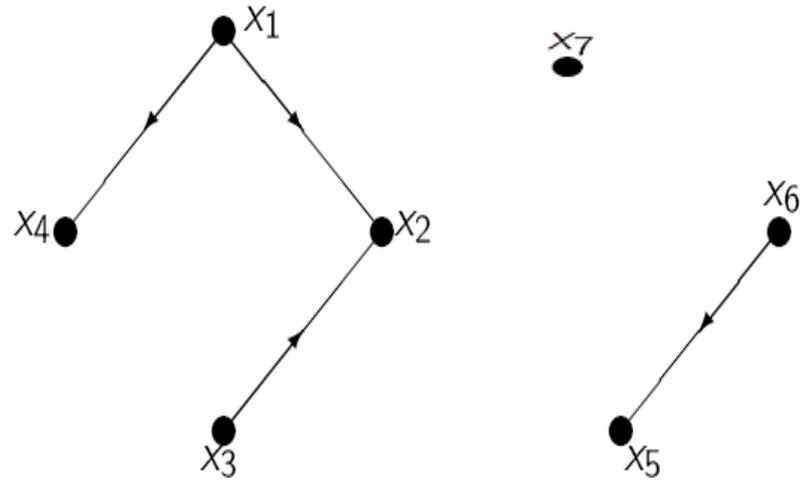
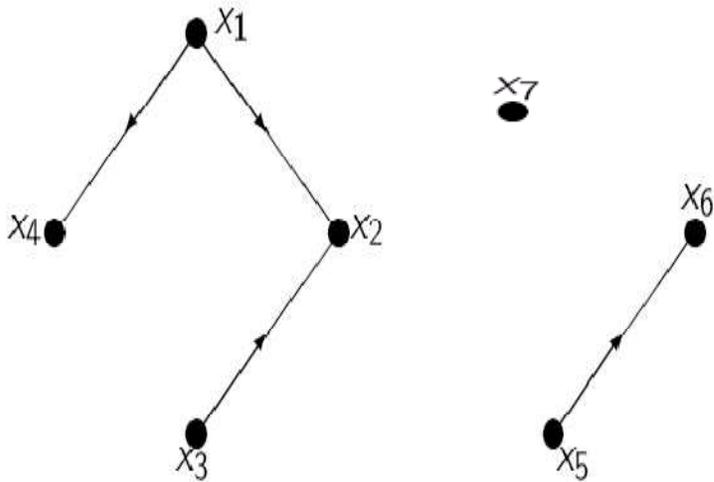
G' é o grafo subjacente a G

$G = (X, U)$ um grafo simples

Por orientação
dos arcos

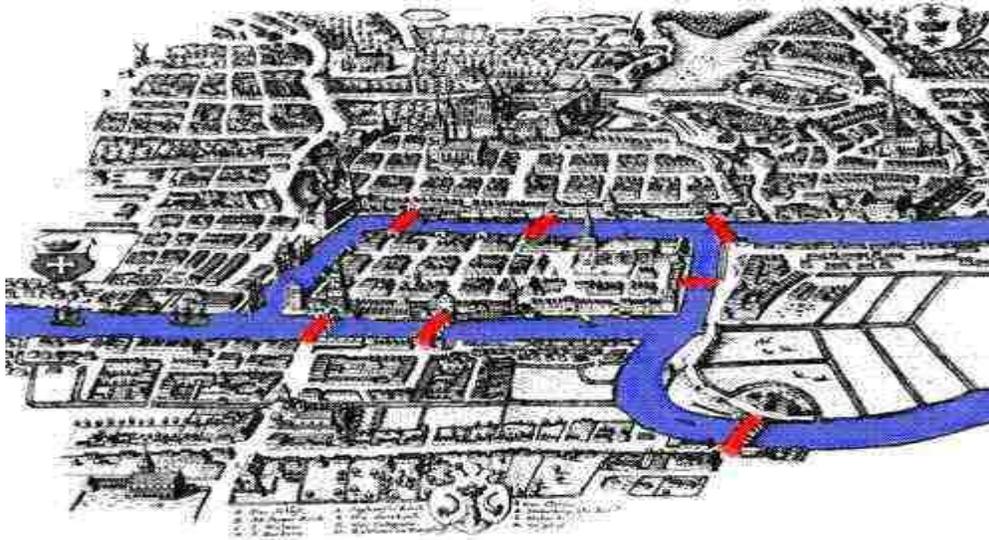


$G' = (X, U')$ grafo orientado

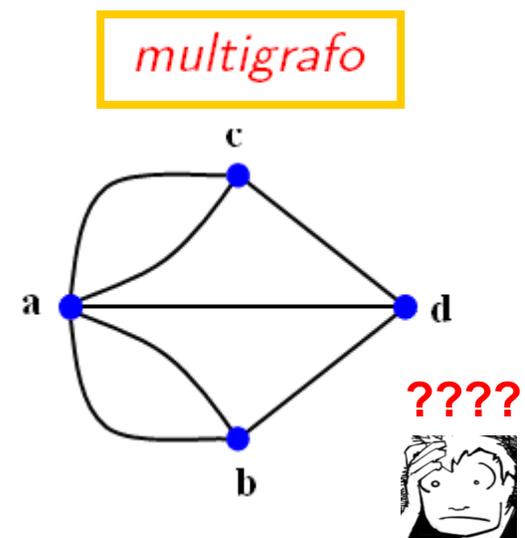


grafo resultante da orientação de G

Na quase totalidade dos problemas que estudaremos, as definições anteriores de grafo orientado e de grafo simples são as que interessam considerar. Contudo para estudarmos problemas do mesmo tipo do das pontes de Königsberg, teremos que considerar uma outra definição de grafo, que permita a um arco ocorrer repetido.



Pontes de Königsberg (1736 Euler)



Definição 2.1.3:

Um *multiconjunto* é um par ordenado (A, m) onde A é um conjunto e $m : A \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função.

Para cada $a \in A$, chamamos *multiplicidade de a* (ou n° de ocorrências de a) ao número natural $m(a)$.

Exemplo: Consideremos o multiconjunto $M = (A, m)$, com

$$A = \{a, b, c\}, \quad m : A \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{com} \quad m(a) = 3$$

Então

$$m(b) = 1$$

$$M = \{a, a, a, b, c, c\}.$$

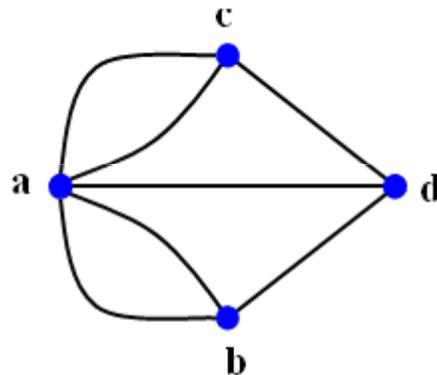
$$m(c) = 2.$$

Definição 2.1.4:

Chamamos *multigrafo* (respectivamente, *multigrafo orientado*) a um par $G = (X, \mathcal{E})$ em que:

- (i) X é um conjunto finito, não vazio e
- (ii) $\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$ é um multiconjunto com $\mathcal{U} \subseteq X \otimes X$ (respectivamente, $\mathcal{U} \subseteq X \times X$).

Exemplo: A figura



2-grafo não orientado

é uma representação do *multigrafo* não orientado $G = (X, \mathcal{E})$ onde,

$$X = \{a, b, c, d\},$$

$$\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$$

multiconjuntos dos arcos

$$\mathcal{U} = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, d\}\}$$

$$m(\{a, c\}) = 2$$

$$m(\{a, d\}) = 1$$

$$m(\{a, b\}) = 2$$

$$m(\{c, d\}) = 1$$

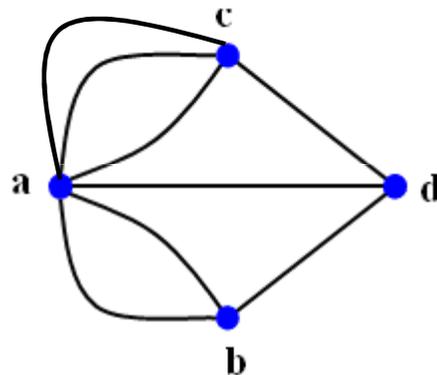
$$m(\{b, d\}) = 1$$

Definição 2.1.4:

Chamamos *multigrafo* (respectivamente, *multigrafo orientado*) a um par $G = (X, \mathcal{E})$ em que:

- (i) X é um conjunto finito, não vazio e
- (ii) $\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$ é um multiconjunto com $\mathcal{U} \subseteq X \otimes X$ (respectivamente, $\mathcal{U} \subseteq X \times X$).

Exemplo: A figura



3-grafo não orientado

é uma representação do *multigrafo* não orientado $G = (X, \mathcal{E})$ onde,

$$X = \{a, b, c, d\},$$

$$\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$$

multiconjuntos dos arcos

$$\mathcal{U} = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, d\}\}$$

$$m(\{a, c\}) = 3$$

$$m(\{a, d\}) = 1$$

$$m(\{a, b\}) = 2$$

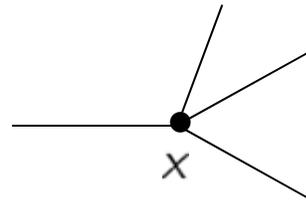
$$m(\{c, d\}) = 1$$

$$m(\{b, d\}) = 1$$

- Se a multiplicidade máxima dos elementos (arcos) do multiconjunto \mathcal{E} é p dizemos que G é um p -grafo (o grafo do problema das pontes de Königsberg é um 2-grafo não orientado).
- Aos elementos do multiconjunto \mathcal{E} que são “iguais” (considerando a representação “por extensão” de \mathcal{E}) chamamos **arcos paralelos**.

Grau de um vértice

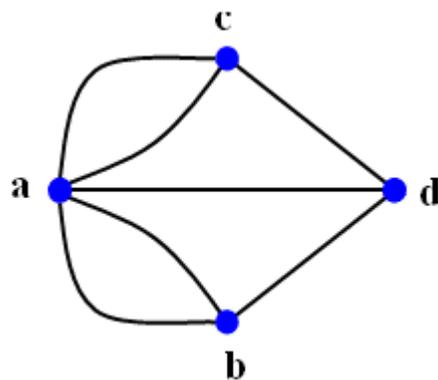
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo (respectivamente, multigrafo orientado).



O grau de um vértice x define-se como o número de arcos incidentes em x (respectivamente, o número de arcos incidentes em x mais ^{2 vezes} o número de laços incidentes em x).

$$d_G(x) = \text{grau de um vértice } x = d(x)$$

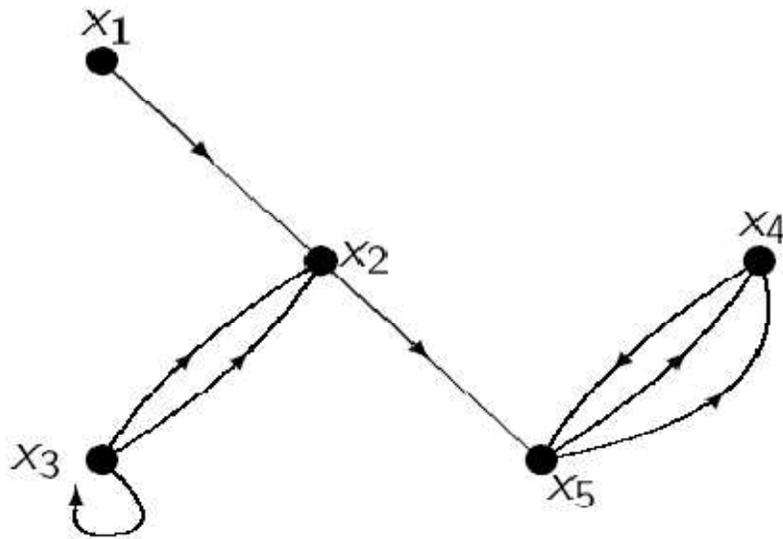
Exemplo: No multigrafo



tem-se:

$$\begin{aligned}d(a) &= 5 \\d(b) &= 3 \\d(c) &= 3 \\d(d) &= 3\end{aligned}$$

Exemplo: No multigrafo orientado



tem-se:

$$d(x_1) = 1$$

$$d(x_2) = 4$$

$$d(x_3) = 4$$

$$d(x_4) = 3$$

$$d(x_5) = 4$$

- Se G é um multigrafo orientado denomina-se

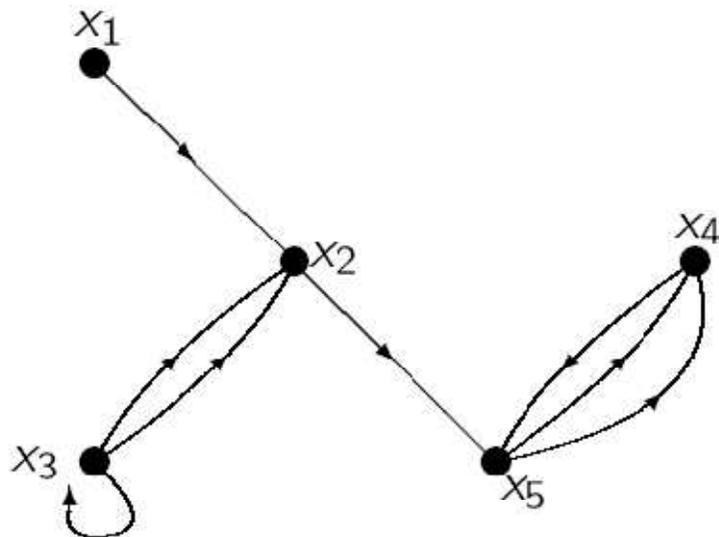
$$d_G^+(x)$$

grau exterior do vértice x = número de arcos de G que têm x como extremidade inicial

grau interior do vértice x = número de arcos de G que têm x como extremidade final

$$d_G^-(x)$$

Exemplo: Para o multigrafo orientado em baixo tem-se:



$$\begin{aligned}d^+(x_1) &= 1 & , & & d^-(x_1) &= 0 \\d^+(x_2) &= 1 & , & & d^-(x_2) &= 3, \\d^+(x_3) &= 3 & , & & d^-(x_3) &= 1, \\d^+(x_4) &= 1 & , & & d^-(x_4) &= 2, \\d^+(x_5) &= 2 & , & & d^-(x_5) &= 2.\end{aligned}$$

Nota:

(i) Num **multigrafo** orientado tem-se obviamente que

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x), \quad \text{para todo o } x \in X.$$

(ii) Num **grafo** orientado tem-se

$$d^+(x) = |\Gamma^+(x)| \quad \text{e} \quad d^-(x) = |\Gamma^-(x)|, \quad \text{para todo o } x \in X.$$

**Teorema 2.1.5:**

- (i) Num multigrafo $G = (X, \mathcal{U})$ com m arcos tem-se $\sum_{x \in X} d(x) = 2m$.
- (ii) Se $G = (X, \mathcal{U})$ é um multigrafo orientado com m arcos então $\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = m$.

“Dem.”: A demonstração da afirmação (ii) é imediata, se atendermos a que cada arco, independentemente de ser ou não um laço, tem uma, e uma só, extremidade inicial (respectivamente, final) contribuindo, assim, com uma parcela igual a 1 para o somatório $\sum_{x \in X} d^+(x)$ (respectivamente, $\sum_{x \in X} d^-(x)$). A demonstração de (i) para multigrafos orientados, pode fazer-se utilizando (ii), pois

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} (d^+(x) + d^-(x)) = \sum_{x \in X} d^+(x) + \sum_{x \in X} d^-(x) = 2m,$$

ou observando que para qualquer multigrafo, orientado ou não, cada arco tem duas extremidades (que podem ser iguais, no caso dos laços) e, portanto, por cada arco existe uma parcela igual a 2 no somatório $\sum_{x \in X} d(x)$.

Consequências imediatas do teorema do aperto de mão:

- (1) A soma dos graus de todos os vértices de um multigrafo é sempre par;
- (2) O número de vértices de grau ímpar é sempre par.

Proposição 2.1.6:

Num multigrafo, orientado ou não, $G = (X, U)$ é sempre par o número de vértices de G que têm grau ímpar.

Dem: Sejam m o número de arcos de G ,

$$X_1 = \{x \in X : d(x) \text{ é ímpar}\} \quad \text{e} \quad X_2 = \{x \in X : d(x) \text{ é par}\}.$$

Tem-se

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) = 2m.$$

Como $2m$ e $\sum_{x \in X_2} d(x)$ são números pares, concluímos que $\sum_{x \in X_1} d(x)$ é par. Dado que a paridade da soma de $k = |X_1|$ números ímpares é a paridade de k , concluímos que $k = |X_1|$ é um número par. Como $|X_1|$ é o número de vértices de G com grau ímpar, tem-se o resultado pretendido. \square

Definição 2.1.7:

Define-se *sequência de graus* de um multigrafo ou multigrafo orientado G , com n vértices, como sendo a sequência

$$(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

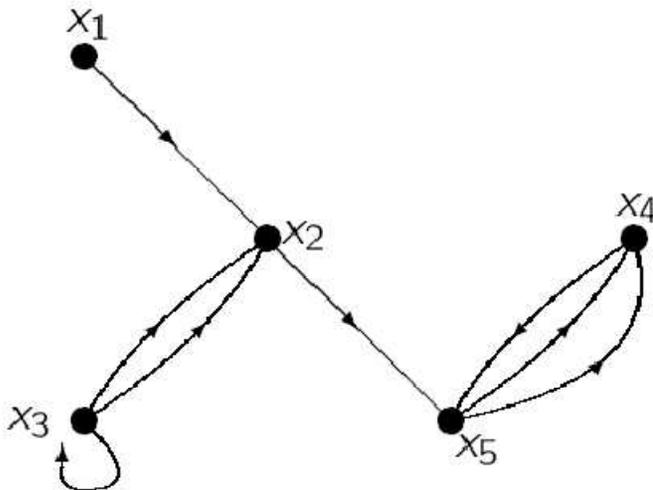
~~não crescente~~ (isto é, com

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$$

decrecente em sentido lato

cujos elementos são os graus dos vértices de G .

Exemplo: Para o multigrafo orientado em baixo tem-se:



$$d(x_1) = 1$$

$$d(x_2) = 4$$

$$d(x_3) = 4$$

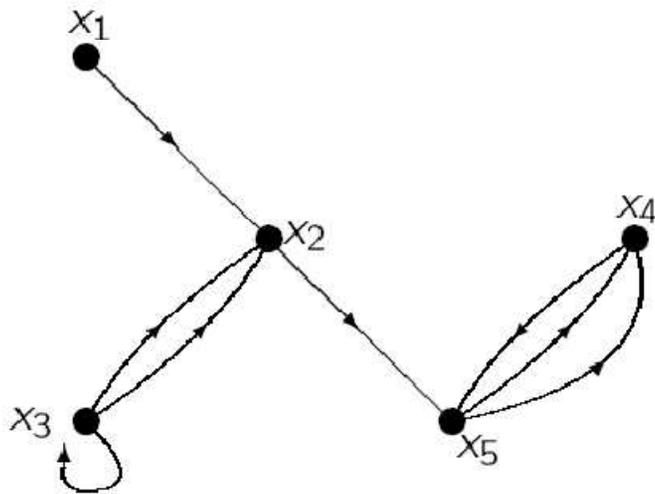
$$d(x_4) = 3$$

$$d(x_5) = 4$$

(4, 4, 4, 3, 1)
é a sequência de graus
de G

Observação: No caso dos multigrafos orientados define-se de forma análoga os conceitos de **sequência de graus exteriores** e **sequência de graus interiores**.

Exemplo: Para o multigrafo orientado anterior tem-se:



$$\begin{array}{l|l} d^+(x_1) = 1 & d^-(x_1) = 0 \\ d^+(x_2) = 1 & d^-(x_2) = 3 \\ d^+(x_3) = 3 & d^-(x_3) = 1 \\ d^+(x_4) = 1 & d^-(x_4) = 2 \\ d^+(x_5) = 2 & d^-(x_5) = 2 \end{array}$$

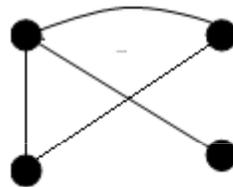
$(3, 2, 1, 1, 1)$ é a sequência de **graus exteriores** de G

$(3, 2, 2, 1, 0)$ é a sequência de **graus interiores** de G

Definição 2.1.8:

Uma sequência não crescente de inteiros não negativos (d_1, d_2, \dots, d_n) diz-se uma **sequência gráfica** se existir um **grafo simples** cuja sequência de graus seja (d_1, d_2, \dots, d_n) .

Exemplo: $(3, 2, 2, 1)$ é uma **sequência gráfica** pois existe um grafo simples cujos vértices têm os graus da sequência.



Proposição 2.1.9:

Se (d_1, d_2, \dots, d_n) é uma sequência gráfica então d_1, d_2, \dots, d_n são inteiros tais que:

- (i) $0 \leq d_i \leq n - 1$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$;
- (ii) $\sum_{i=1}^n d_i$ é um número par.

Observação: A Proposição diz que dada uma sequência não crescente de números inteiros (d_1, d_2, \dots, d_n) , se existe um grafo simples com a sequência de vértices (d_1, d_2, \dots, d_n) então a sequência satisfaz (i) e (ii).

No entanto, satisfazer

(i) e (ii)

não implica que exista um grafo com tal sequência de vértices.

Exemplo

A sequência $(2, 2, 0)$ satisfaz as condições (i) e (ii) mas não existe um grafo simples com 3 vértices e com esta sequência de graus.

Um exemplo para $n=4$?

$(3, 1, 0, 0)$

Um exemplo para $n=5$?

$(4, 0, 0, 0, 0)$

- A proposição é importante porque nos permite excluir casos.

$(3, 2, 2, 1, 1, 0)$ →

Não é sequência gráfica pois não satisfaz (ii)

Proposição 2.1.10:

Num grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

Dem. Se não existissem dois vértices com o mesmo grau, a sequência de graus do grafo seria

$$(n - 1, n - 2, \dots, 1, 0),$$

que não é uma sequência gráfica. □

Exemplo: $(3, 2, 1, 0)$ não é uma **sequência gráfica**.

Teorema 2.1.11:



A sequência de inteiros não negativos

$$S : \quad d_1, d_2, \dots, d_n$$

com $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, $n \geq 2$ e $d_1 \geq 1$ é uma sequência gráfica se, e só se, a sequência

$$S' : \quad d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$$

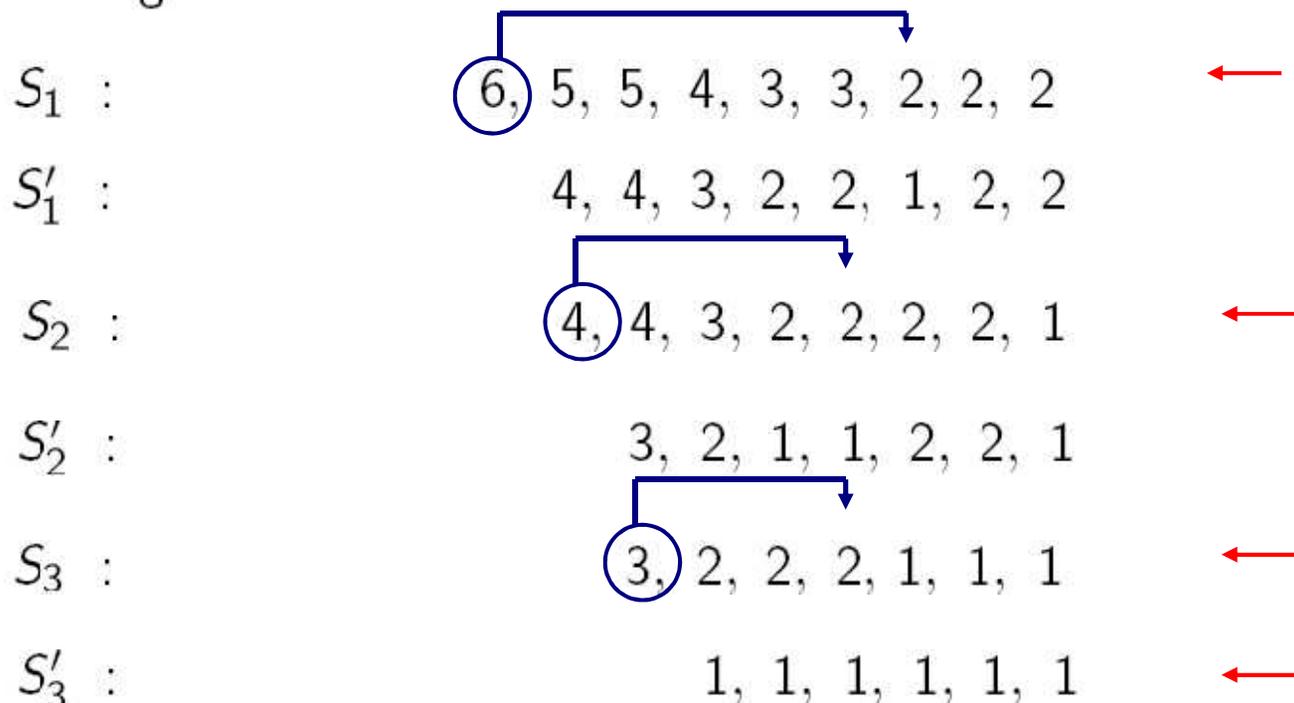
(depois de ordenada por ordem não crescente) é uma sequência gráfica.

Dem.(parcial) Suponhamos que S' é uma sequência gráfica e seja G' um grafo simples cuja sequência de graus é S' . Sejam x_2, \dots, x_n os vértices de G' e considere-se que

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1 & \text{se } 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i & \text{se } d_1 + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Seja G o grafo que se obtém de G' acrescentando um novo vértice x_1 e os d_1 arcos $\{x_1, x_i\}$, para $2 \leq i \leq d_1 + 1$. Então, G é um grafo simples cuja sequência de graus é S e, portanto, S é uma sequência gráfica. \square

Exemplo: Determinemos se a sequência $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2)$ é uma sequência gráfica.



em que de S_i para S'_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, se aplicou o teorema e de S'_i para S_{i+1} , $i \in \{1, 2\}$, se ordenou a sequência por ordem não crescente.

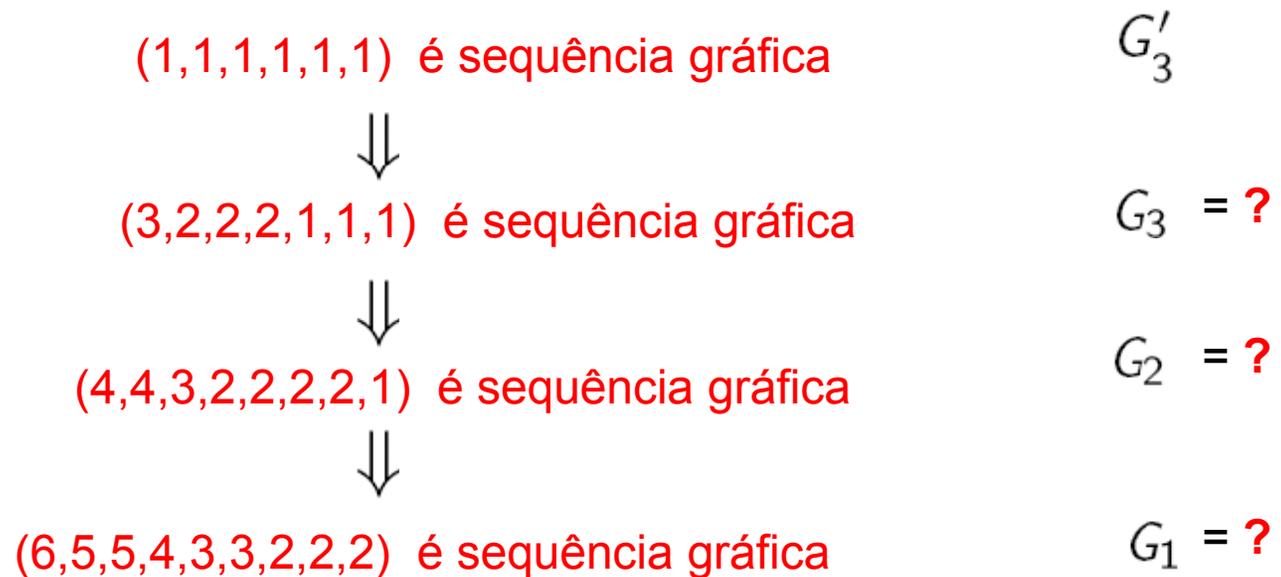


Embora possamos continuar a aplicar o teorema, concluímos facilmente, que S'_3 é uma sequência gráfica, pois um grafo simples da forma



tem S'_3 como sequência de graus.

Conclusão: De acordo com o teorema 2.1.11, como



Partindo de G'_3 obtenha grafos simples G_3 , G_2 e G_1 para as sequências indicadas

(1,1,1,1,1,1) é sequência gráfica G'_3



(3,2,2,2,1,1,1) é sequência gráfica $G_3 = ?$



(4,4,3,2,2,2,2,1) é sequência gráfica $G_2 = ?$



(6,5,5,4,3,3,2,2,2) é sequência gráfica $G_1 = ?$

G'_3



(1,1,1,1,1,1) é sequência gráfica G'_3



(3,2,2,2,1,1,1) é sequência gráfica $G_3 = ?$



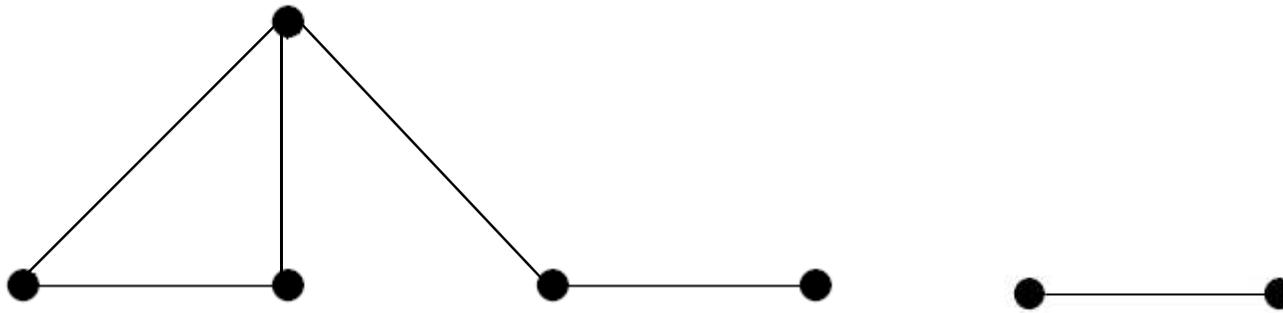
(4,4,3,2,2,2,2,1) é sequência gráfica $G_2 = ?$



(6,5,5,4,3,3,2,2,2) é sequência gráfica $G_1 = ?$

De acordo com o Teorema 2.1.11, para obter um grafo simples G_3 com a sequência de vértices (3,2,2,2,1,1,1) basta acrescentar um vértice a G'_3 e torná-lo adjacente a 3 vértices de grau 1

G_3



(1,1,1,1,1,1) é sequência gráfica G'_3



(3,2,2,2,1,1,1) é sequência gráfica $G_3 = ?$



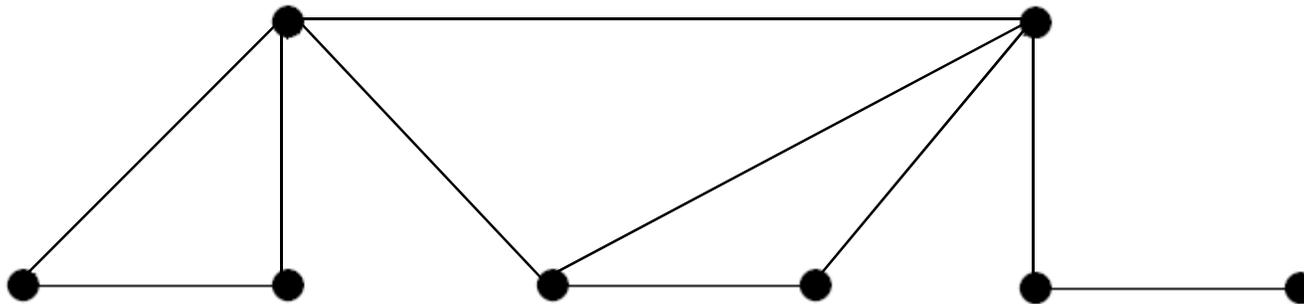
(4,4,3,2,2,2,2,1) é sequência gráfica $G_2 = ?$



(6,5,5,4,3,3,2,2,2) é sequência gráfica $G_1 = ?$

Agora, para obter um grafo simples G_2 com a sequência de vértices (4,4,3,2,2,2,2,1) basta acrescentar um vértice a G_3 e torná-lo adjacente a 1 vértice de grau 3, a 1 vértice de grau 2 e a 2 vértices de grau 1.

G_2



(1,1,1,1,1,1) é sequência gráfica G'_3



(3,2,2,2,1,1,1) é sequência gráfica $G_3 = ?$



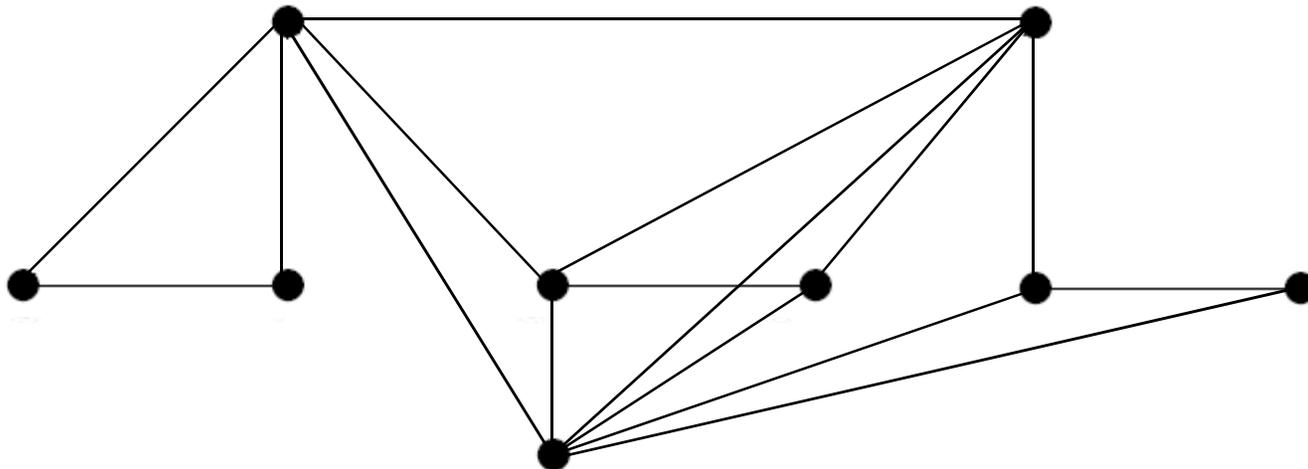
(4,4,3,2,2,2,2,1) é sequência gráfica $G_2 = ?$



(6,5,5,4,3,3,2,2,2) é sequência gráfica $G_1 = ?$

Para obter um grafo simples G_1 a partir de G_2 , que tenha a sequência de vértices (6,5,5,4,3,3,2,2,2), basta acrescentar 1 vértice de grau 6 a G_2 e torná-lo adjacente a 2 vértices de grau 4, 1 de grau 3, 2 de grau 2 e 1 de grau 1.

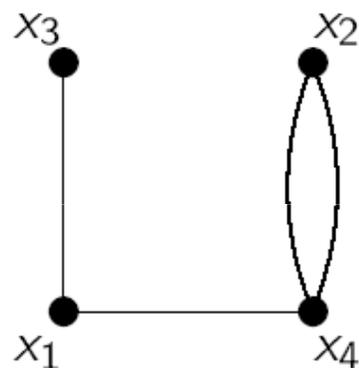
G_1



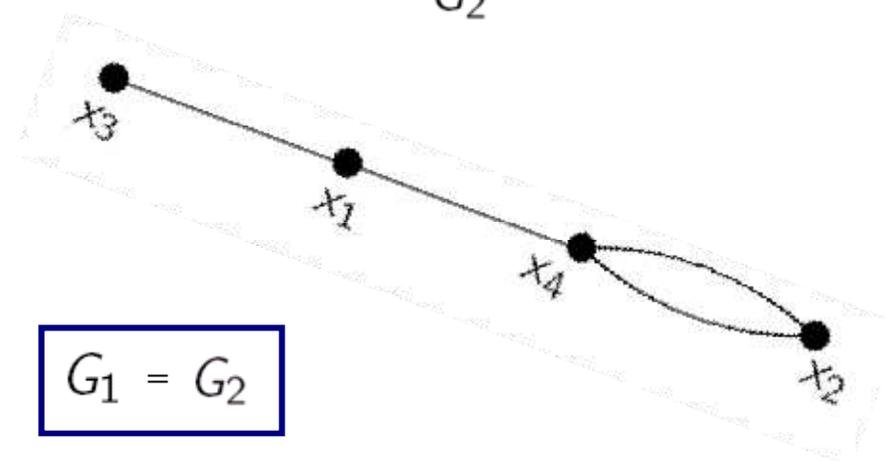
Multigrafos Isomorfos

Duas representações de multigrafos podem parecer diferentes, mas representarem o mesmo multigrafo. É o caso dos multigrafos G_1 e G_2 ,

G_1

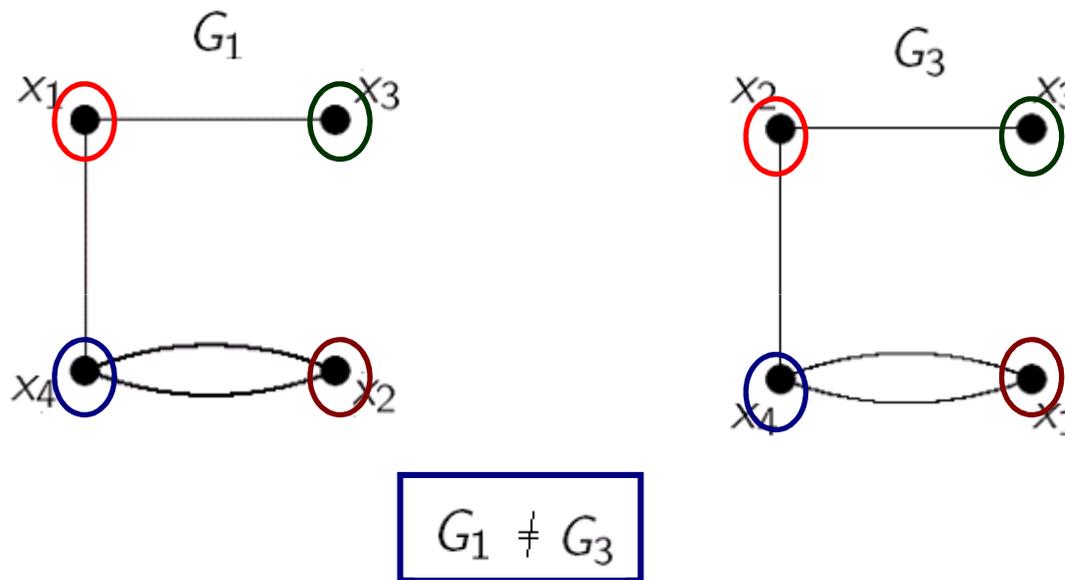


G_2

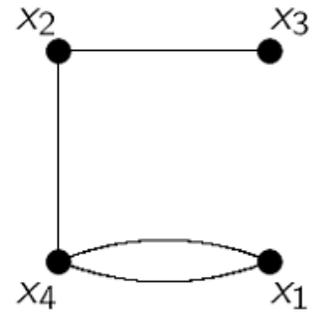
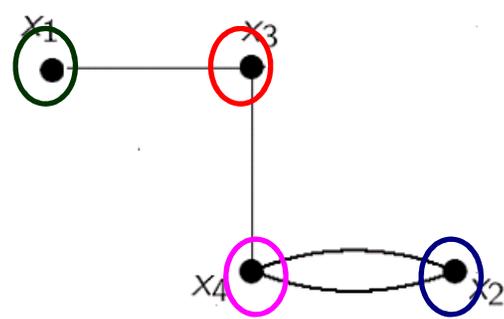
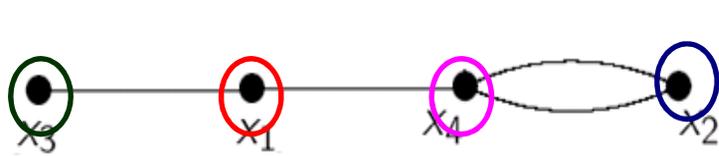


$$G_1 = G_2$$

No entanto pode acontecer que duas representações de multigrafos pareçam semelhantes mas representarem multigrafos distintos. É o caso dos multigrafos G_1 e G_3 (enquanto que em G_1 os vértices x_1 e x_3 são adjacentes, em G_3 não o são),



Multigrafos Isomorfos



Multigrafos Isomorfos

Definição 2.1.12:

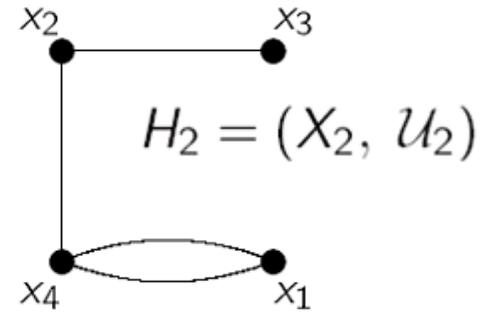
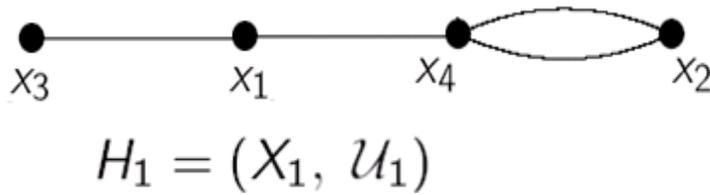
Sejam $H_1 = (X_1, \mathcal{U}_1)$ e $H_2 = (X_2, \mathcal{U}_2)$ multigrafos não orientados (respectivamente, multigrafos orientados). Diz-se que H_1 é **isomorfo** a H_2 se existe uma aplicação bijectiva

$$\varphi : X_1 \longrightarrow X_2 \quad \text{(Isomorfismo)}$$

tal que, para quaisquer x_i e $x_j \in X_1$, o número de arcos incidentes, em H_1 , nestes dois vértices (respectivamente, com extremidade inicial em x_i e extremidade final em x_j) seja igual ao número de arcos incidentes, no multigrafo H_2 , em $\varphi(x_i)$ e $\varphi(x_j)$ (respectivamente, com extremidade inicial em $\varphi(x_i)$ e extremidade final em $\varphi(x_j)$).

Exemplos:

1

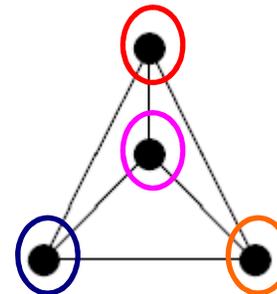
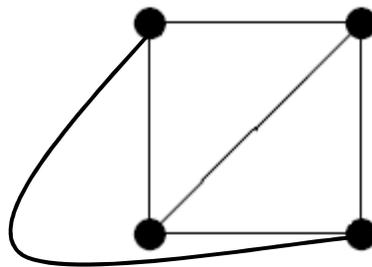
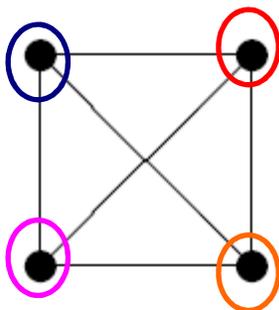


H_1 e H_2 são **multigrafos** isomorfos

$$\begin{aligned} \varphi : X_1 &\longrightarrow X_2 \\ x_1 &\longrightarrow x_2 \\ x_2 &\longrightarrow x_1 \\ x_3 &\longrightarrow x_3 \\ x_4 &\longrightarrow x_4 \end{aligned}$$

bijecção que preserva a existência de arcos.

2 Os grafos simples



são isomorfos.

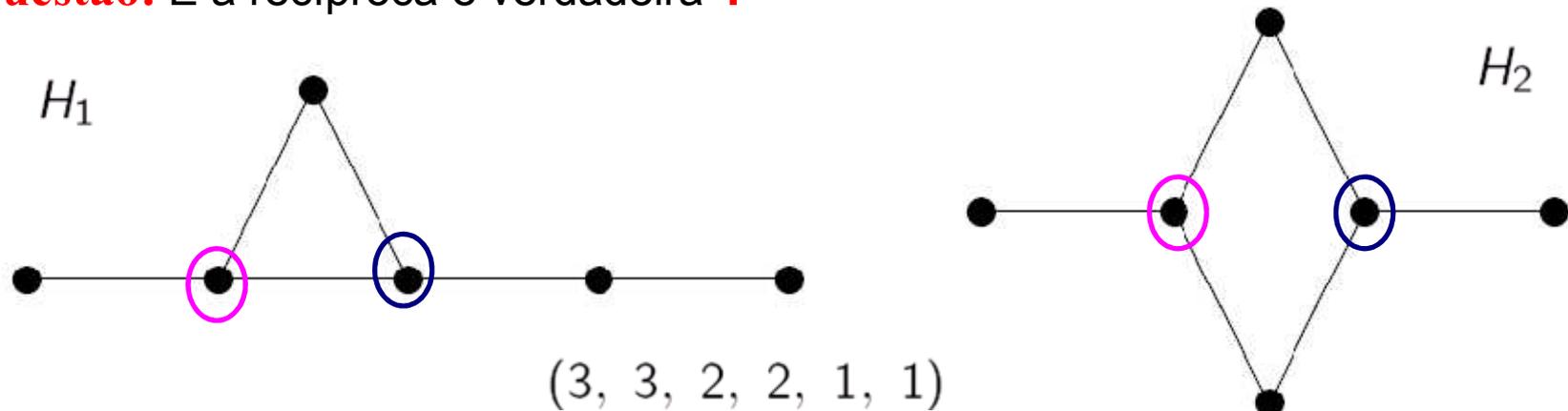
Conclusão: De acordo com a definição, se dois multigrafos são isomorfos, então

- (1) têm o mesmo número de vértices;
- (2) têm o mesmo número de arcos;
- (3) Se $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ é a bijecção que os torna isomorfos então

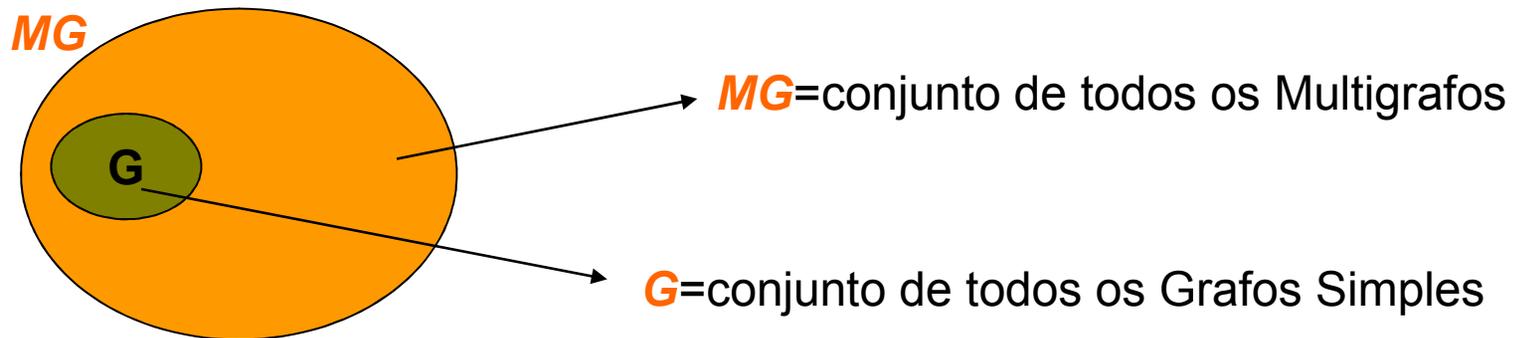
$$d_{H_1}(x) = d_{H_2}(\varphi(x)), \quad \forall x \in X_1.$$

Têm a mesma sequência de graus

Questão: E a recíproca é verdadeira ?



A Sequência de graus de G_1 e G_2
é a mesma mas os grafos não são isomorfos



Considere em MG a relação binária definida por:

$$\underline{M_1 \sim M_2 \text{ se e só se } M_1 \text{ e } M_2 \text{ são isomorfos, } M_1, M_2 \text{ em MG}}$$

Relação de isomorfismo

Teorema 2.1.13:

A relação de isomorfismo de multigrafos e de multigrafos orientados é uma relação de equivalência.

Alguns tipos de grafos

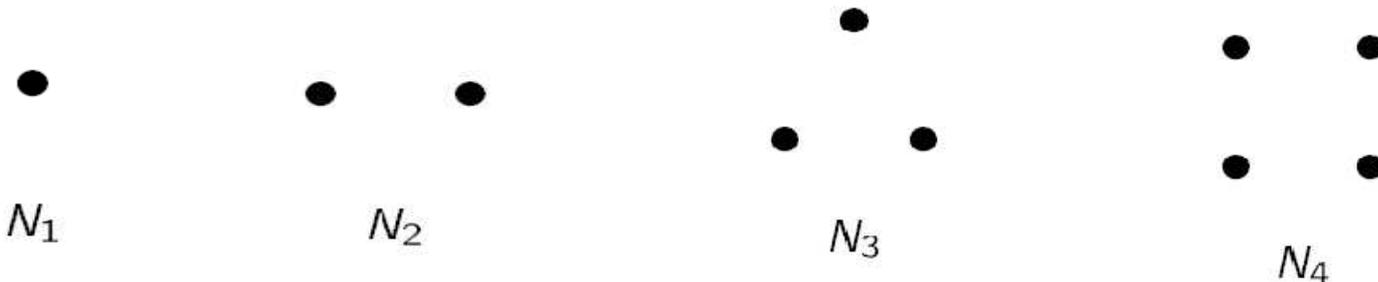
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples.

1 **Grafo regular de grau r ou r -regular** ($r \in \mathbb{N}_0$):

Se $d_G(x) = r$ para todo $x \in X$

Caso particular: Grafos regulares de grau 0 (**grafos nulos**)

N_n
Grafo nulo
com n vértices



Caso particular: Grafos regulares com n vértices e grau $n-1$ (**grafos completos**)

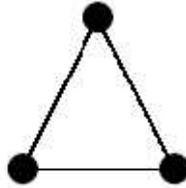
K_n
Grafo completo
com n vértices



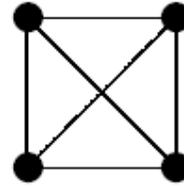
K_1



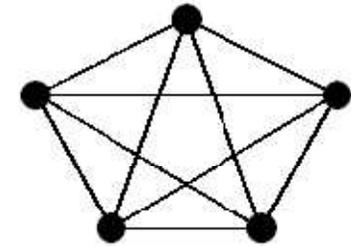
K_2



K_3



K_4



K_5

Qual o número de arcos de K_n ?

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

(Usar o teorema do aperto de mão)

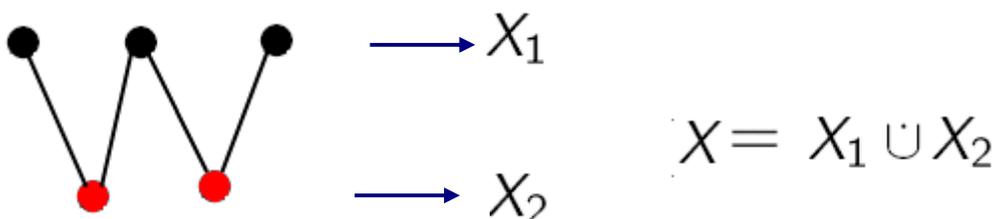
Qual o número de arcos de um grafo r-regular com n vértices?

n vértices cada um com grau r

$$m = \frac{n \times r}{2}$$

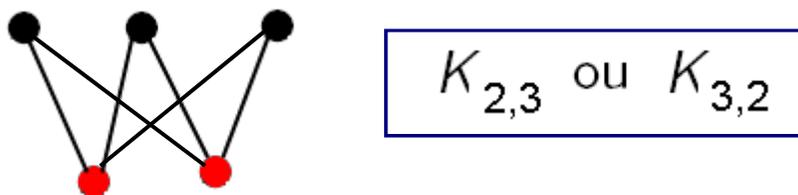
2 Grafo bipartidos

Diz-se que um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$ é **bipartido**, com classes de vértices X_1 e X_2 , se $\{X_1, X_2\}$ é uma partição de X e cada arco de G tem uma extremidade num elemento de X_1 e a outra extremidade num elemento de X_2 .



A notação utilizada é $G = (X_1 \cup X_2, \mathcal{U})$.

Caso particular: Grafos bipartidos completos



A notação utilizada é K_{n_1, n_2} $\begin{cases} \rightarrow n_1 \text{ elementos de } X_1 \\ \rightarrow n_2 \text{ elementos de } X_2 \end{cases}$

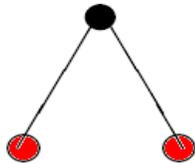
Qual o número de arcos de K_{n_1, n_2} ?

$$m = n_1 \times n_2$$

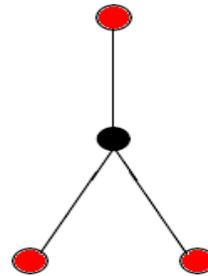
Dentro dos grafos bipartidos completos destacam-se os da forma $K_{1, n-1}$
(grafos estrelas)



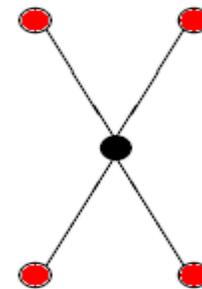
$K_{1,1}$



$K_{1,2}$



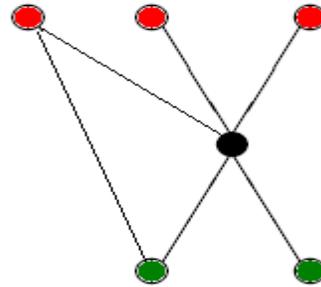
$K_{1,3}$



$K_{1,4}$

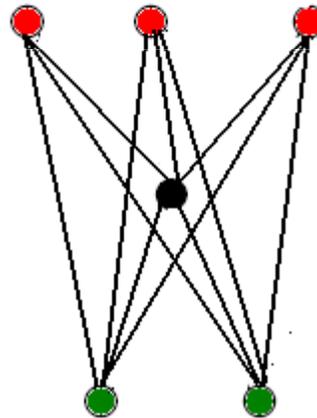
3 Grafo p-partido

Um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$ diz-se **p-partido**, com classes de vértices X_1, \dots, X_p , se $\{X_1, \dots, X_p\}$ é uma partição de X e nenhum elemento de \mathcal{U} tem ambas as extremidades em elementos da mesma classe.



3-partido

Um grafo p -partido, com $p \geq 2$, em que existe um arco unindo todo o par de vértices pertencentes a classes de vértices distintas diz-se um **grafo p -partido completo**.

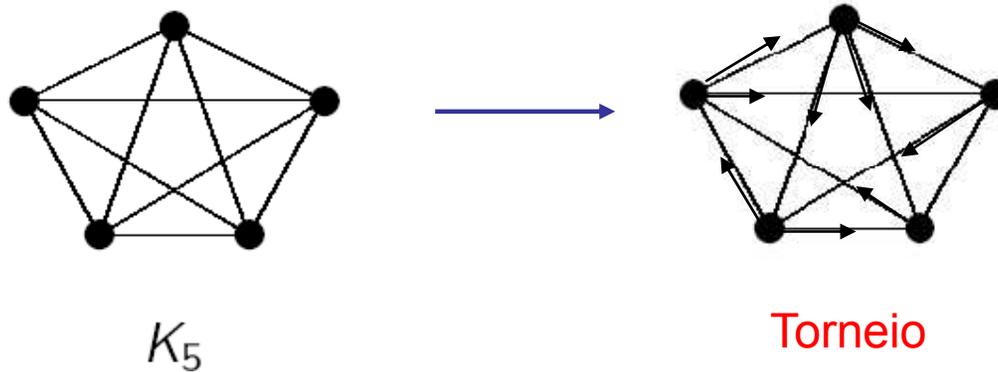


$K_{1,2,3}$

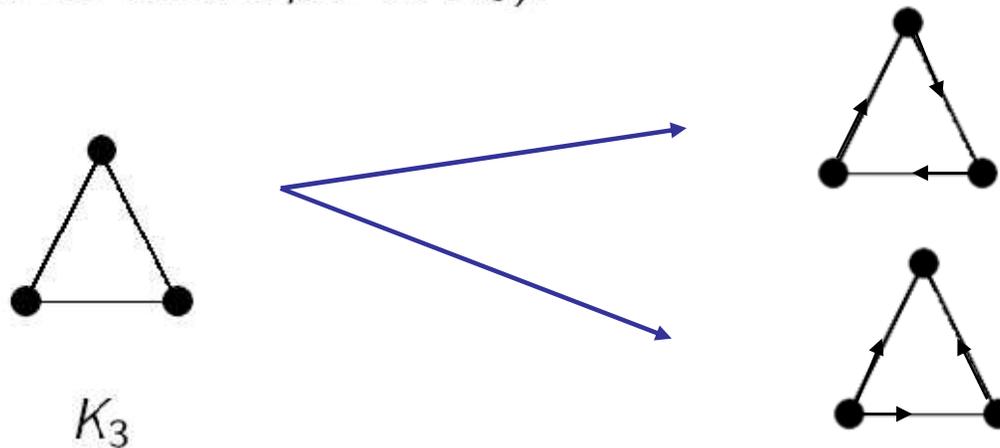
3-partido completo

Se este grafo tiver n_1, \dots, n_p elementos nas classes, representá-lo-emos por K_{n_1, \dots, n_p} .

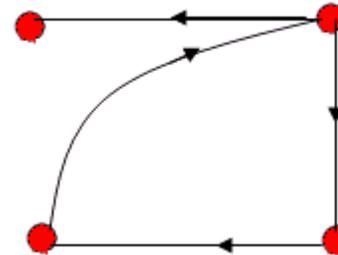
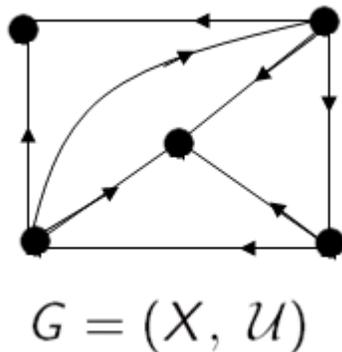
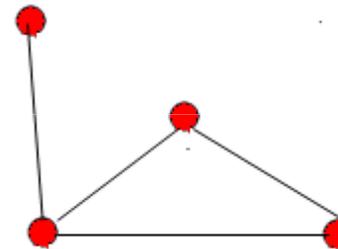
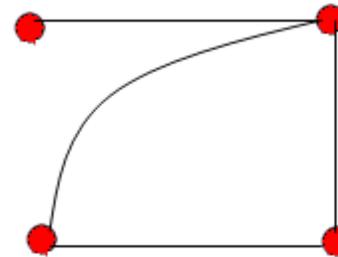
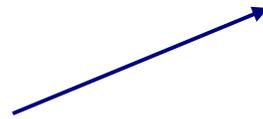
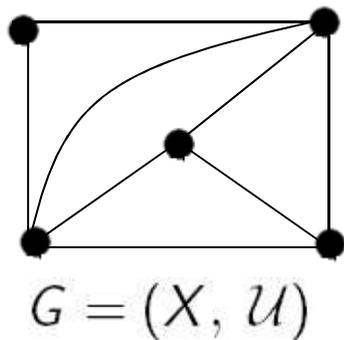
Nota: Chama-se **torneio** a todo o digrafo resultante da orientação de um grafo completo.



A menos de isomorfismo, há apenas dois torneios com 3 vértices (resultantes da orientação do K_3).



Subgrafos de grafos orientados (não orientados)



$G' = (X', U')$
é um subgrafo de G

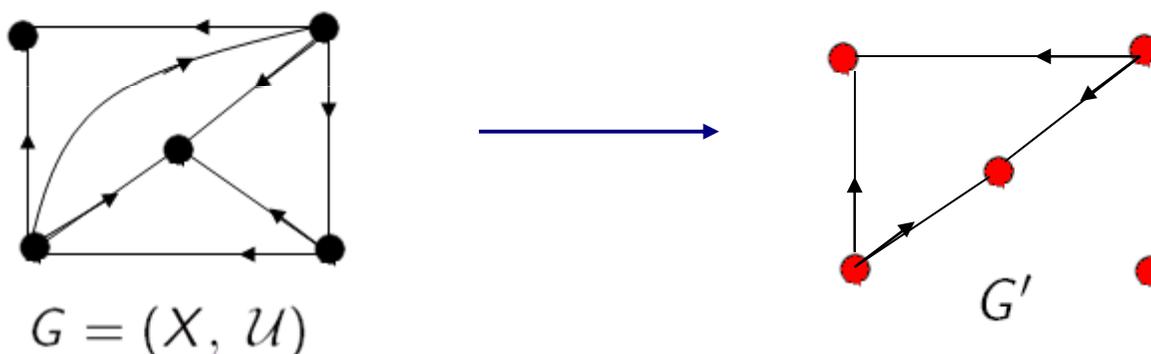
$G' = (X', U')$
é um subgrafo de G

$G' = (X', U')$
é um subgrafo de G

Diz-se que $G' = (X', U')$ é um **subgrafo** do grafo orientado (respectivamente, não orientado) $G = (X, U)$ se $X \subseteq X'$ e $U' \subseteq (X' \times X') \cap U$ (respectivamente, $U' \subseteq (X' \otimes X') \cap U$).

De entre os subgrafos destacamos:

(1) Um grafo $G' = (X, U')$ com $U' \subseteq U$ diz-se um **grafo parcial** de G .

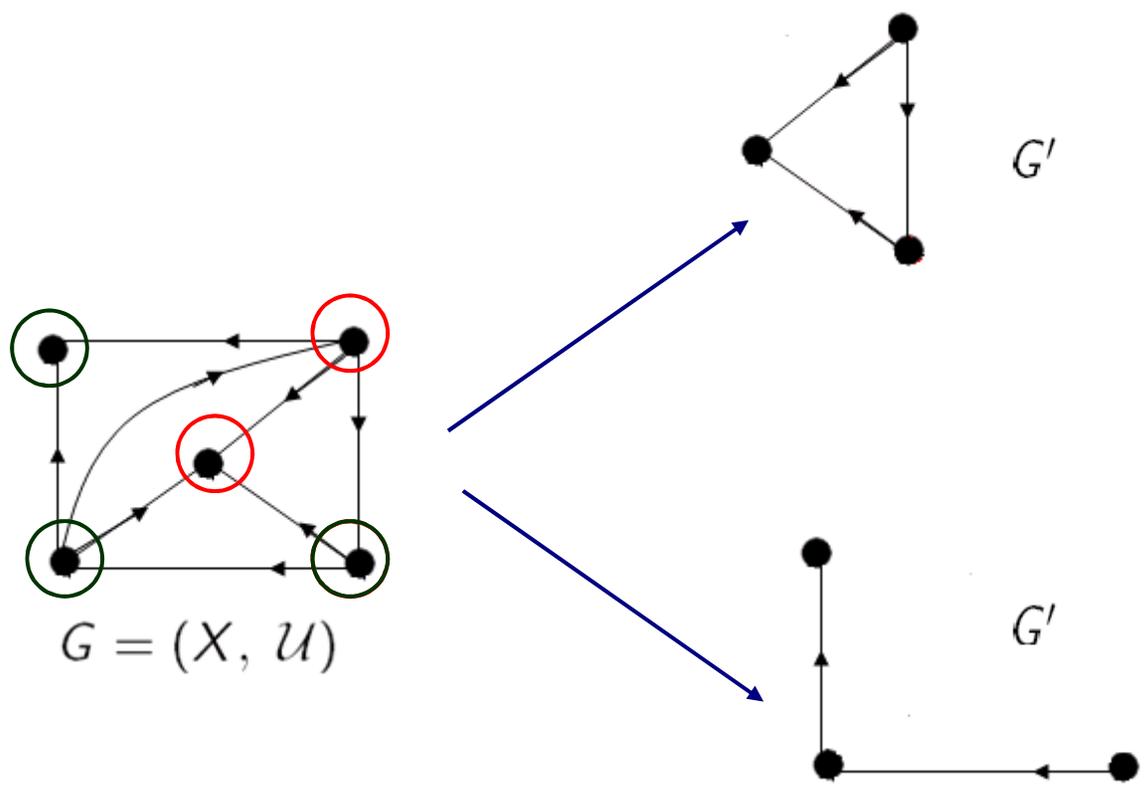


Representa-se G' por $G - U''$

Arcos que se
retiram a U

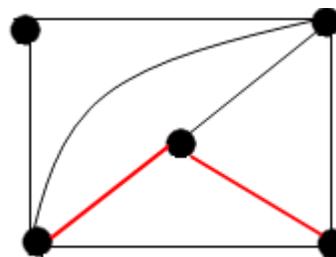
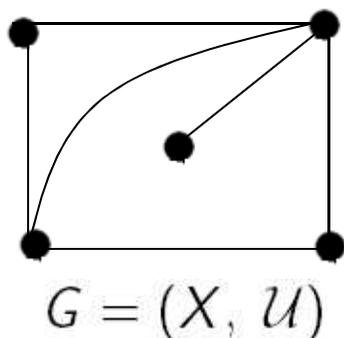
(2) Um grafo $G' = (X', U')$ com $X \subseteq X'$ diz-se um **subgrafo de G gerado por X'** se

$$\left\{ \begin{array}{l} U' = (X' \otimes X') \cap U \\ \text{(caso } G \text{ seja simples)} \\ \text{ou} \\ U' = (X' \times X') \cap U \\ \text{(caso } G \text{ seja orientado)} \end{array} \right.$$



Representa-se G' por $G - X''$. ← Arcos que se retiram a X

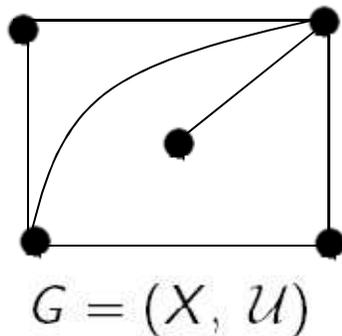
Grafos complementares



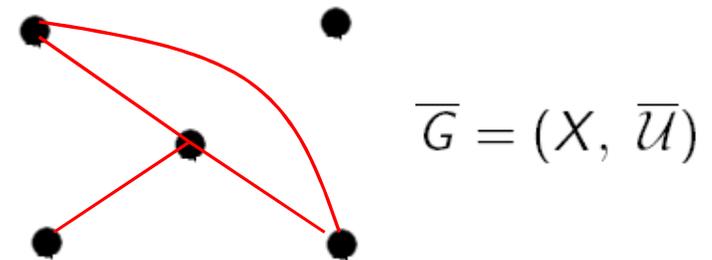
$G + U''$

Arcos que se
adicionam a U

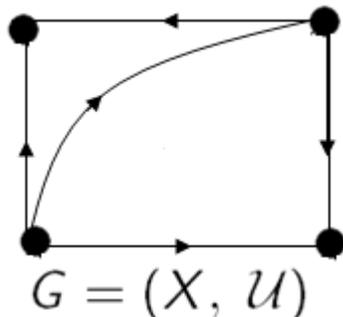
Se $G = (X, U)$ é um grafo orientado (respectivamente, não orientado) e $U'' \subseteq (X \times X) \setminus U$ (respectivamente, $U'' \subseteq (X \otimes X) \setminus U$) representamos por $G + U''$ o grafo $(X, U \cup U'')$.



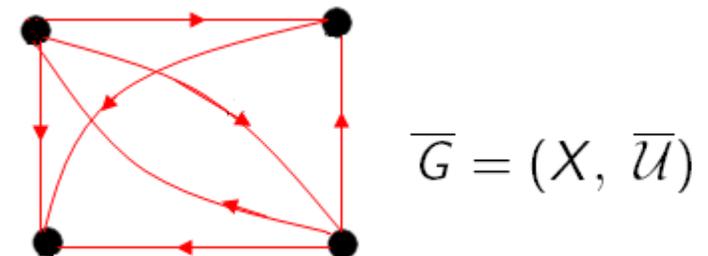
Grafo complementar de G



Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Chama-se **grafo complementar** de G e representa-se por \bar{G} , o grafo simples $\bar{G} = (X, \bar{\mathcal{U}})$ em que $\bar{\mathcal{U}} = (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$.



Digrafo complementar de G



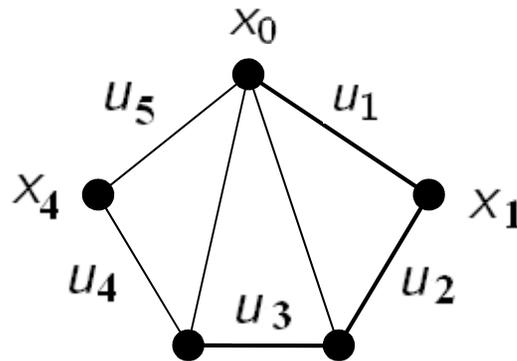
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo. Chama-se **digrafo complementar** de G e representa-se por \bar{G} , o digrafo $\bar{G} = (X, \bar{\mathcal{U}})$ em que $\bar{\mathcal{U}} = (X \times X) \setminus (\mathcal{U} \cup \{(x, x) \mid x \in X\})$.

2.2 Conexidade

Definição 2.2.1:

Num multigrafo não orientado (respectivamente, multigrafo orientado) $G = (X, U)$ chama-se **cadeia** a uma sequência alternada de vértices e arcos de G , iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade no vértice que imediatamente o precede na sequência e a outra extremidade no vértice que imediatamente o sucede na sequência.

Exemplo: $G = (X, U)$

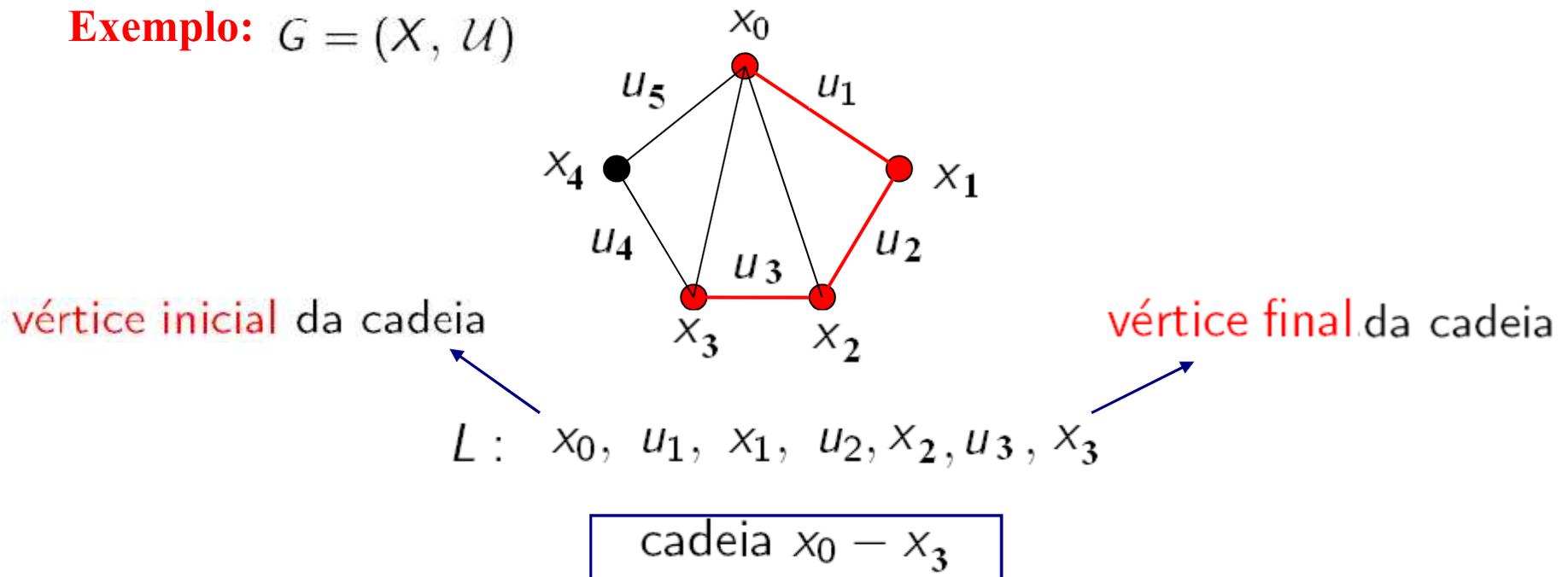


2.2 Conexidade

Definição 2.2.1:

Num multigrafo não orientado (respectivamente, multigrafo orientado) $G = (X, U)$ chama-se **cadeia** a uma sequência alternada de vértices e arcos de G , iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade no vértice que imediatamente o precede na sequência e a outra extremidade no vértice que imediatamente o sucede na sequência.

Exemplo: $G = (X, U)$



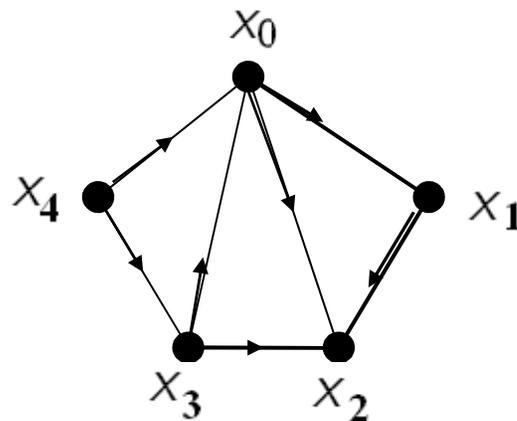
Trata-se, pois, de uma sequência da forma

$$L : \quad x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, u_r, x_r$$

com $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $x_j \in X$, $j \in \{0, 1, \dots, r\}$ e em que $u_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ (respectivamente, $u_i = (x_{i-1}, x_i)$ ou $u_i = (x_i, x_{i-1})$), $i \in \{1, \dots, r\}$.

O vértice x_0 diz-se o **vértice inicial** da cadeia L e o vértice x_r o seu **vértice final**. Diz-se que x_0 e x_r são as **extremidades** da cadeia L .

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$



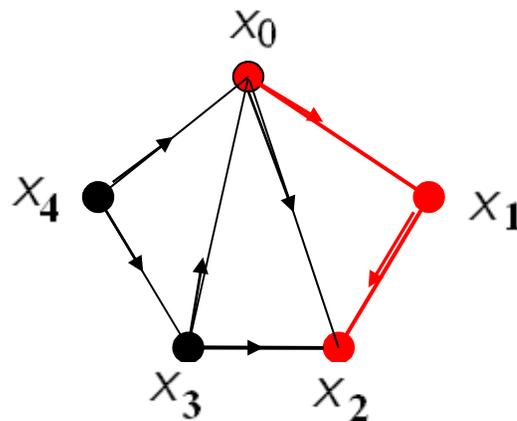
Trata-se, pois, de uma sequência da forma

$$L : \quad x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, u_r, x_r$$

com $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $x_j \in X$, $j \in \{0, 1, \dots, r\}$ e em que $u_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ (respectivamente, $u_i = (x_{i-1}, x_i)$ ou $u_i = (x_i, x_{i-1})$), $i \in \{1, \dots, r\}$.

O vértice x_0 diz-se o **vértice inicial** da cadeia L e o vértice x_r o seu **vértice final**. Diz-se que x_0 e x_r são as **extremidades** da cadeia L .

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$



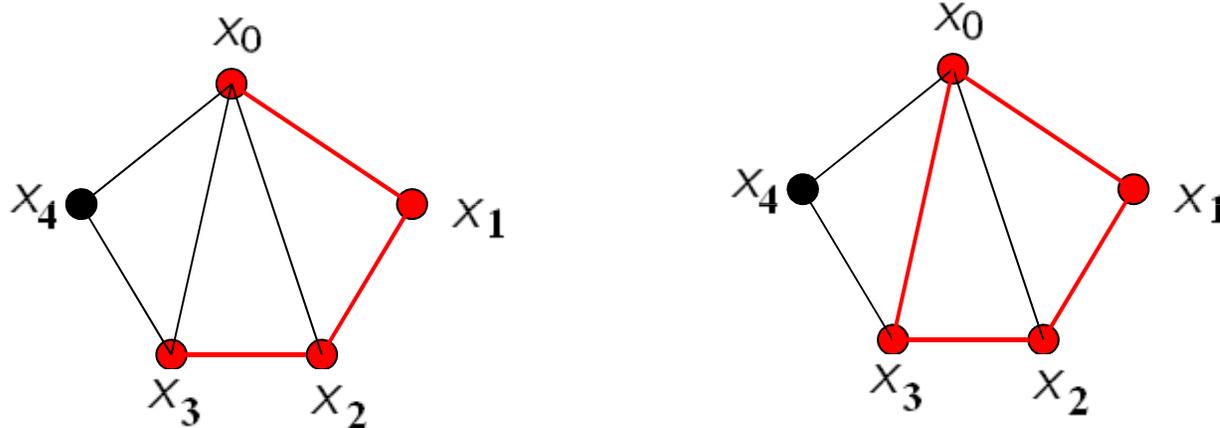
$L_1 : \quad x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), x_2$ **cadeia entre x_0 e x_2**

$L_2 : \quad x_2, (x_1, x_2), x_1, (x_0, x_1), x_0$ **cadeia entre x_2 e x_1**

Definição 2.2.2:

Uma cadeia cujas extremidades são iguais diz-se uma **cadeia fechada**, caso contrário, diz-se uma **cadeia aberta**. O número de arcos de uma cadeia diz-se o seu **comprimento**.

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$



$L : x_0, \{x_0, x_1\}, x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3$ **Cadeia aberta de comprimento 3**

$C : x_0, \{x_0, x_1\}, x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_0\}, x_0$

Cadeia fechada de comprimento 4

$N : x_0$ **Cadeia fechada de comprimento 0
(cadeia trivial)**

Observação:

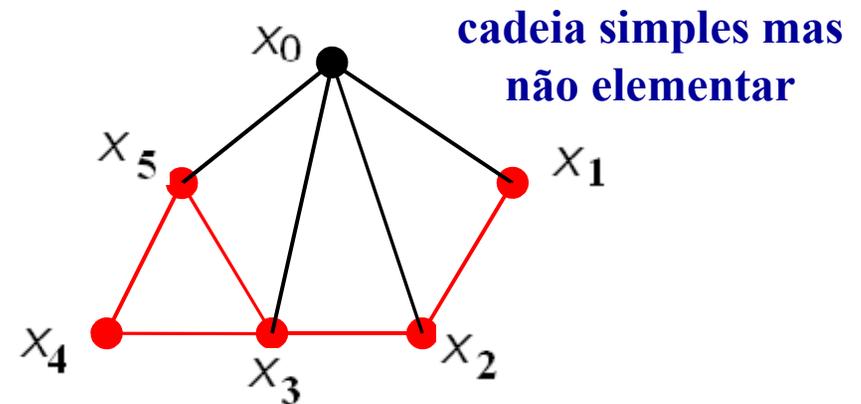
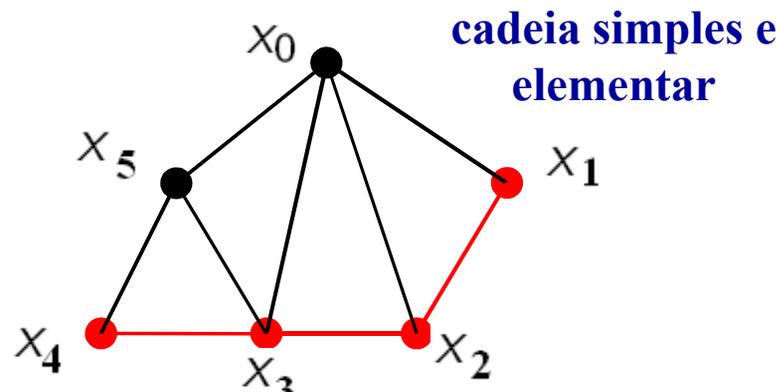
Se $x \in X$, então x é uma de comprimento zero ou **cadeias triviais**.

As cadeias de comprimento não nulo designam-se **não triviais**.

Definição 2.2.3:

Uma cadeia diz-se **simples** se todos os arcos da cadeia são distintos e diz-se **elementar** se todos os vértices da cadeia são distintos, à excepção das extremidades que podem coincidir no caso da cadeia ser fechada.

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$

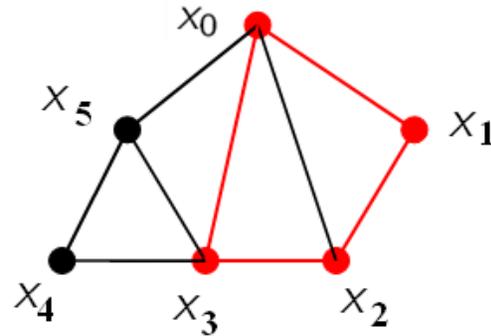


$L_1 : x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_4\}, x_4$

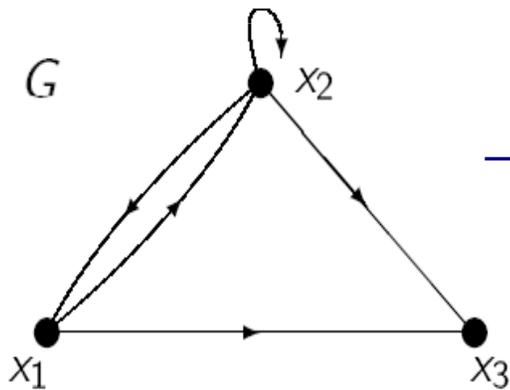
$L_2 : x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_3\}, x_3, \{x_3, x_4\}, x_4, \{x_4, x_5\}, x_5, \{x_5, x_3\}, x_3$

Definição 2.2.4:

Uma cadeia simples, fechada e não trivial diz-se um *ciclo*



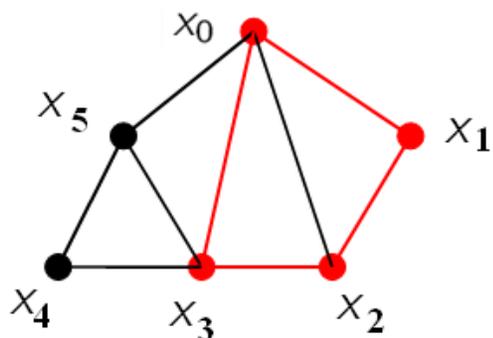
Exemplo: No grafo orientado



→ $x_2, (x_2, x_2), x_2$ é um **ciclo** de comprimento 1

→ $x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_1, x_2), x_1$ é uma cadeia não trivial, fechada que é elementar mas não é simples

Observação: Num grafo simples (ou resultante da orientação de um grafo simples), uma cadeia fica completamente determinada se indicarmos a subsequência dos seus vértices.



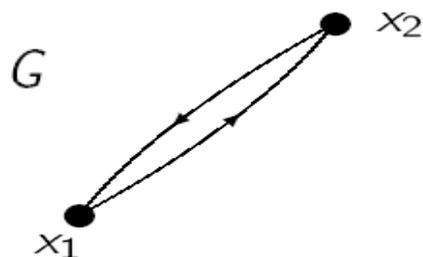
$$L : x_0, \{x_0, x_1\}, x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \{x_2, x_0\}, x_0$$

A cadeia anterior pode ser representada por

$$L : x_0, x_1, x_2, x_3, x_0$$

Num multigrafo e mesmo num grafo orientado tal não sucede.

Por exemplo no grafo orientado

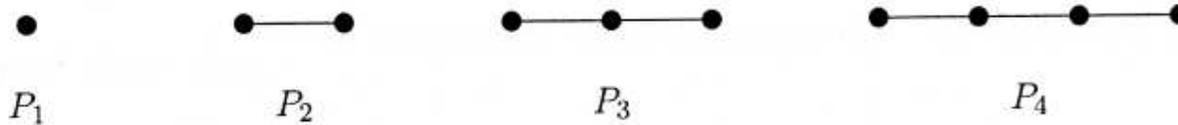


$$x_1, x_2, x_1$$

**Pode ter mais do que um significado,
logo precisamos indicar os arcos**

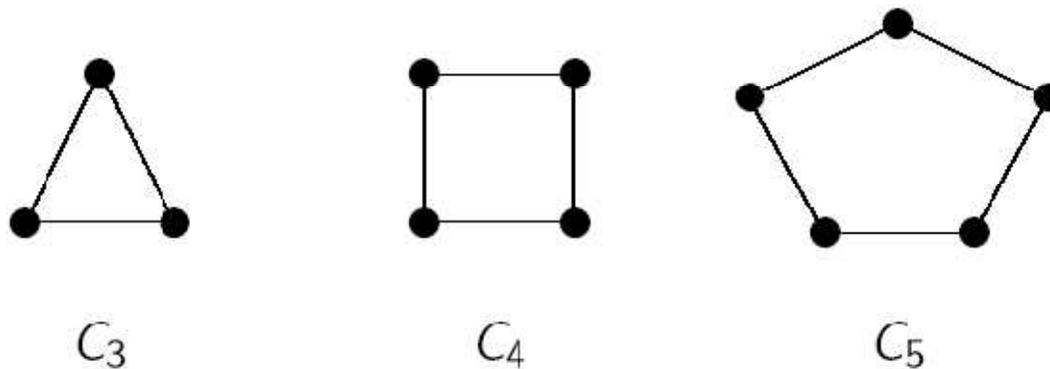
Dois tipos de Grafos simples $\left\{ \begin{array}{l} \text{Grafo cadeia } (P_n) \\ \text{Grafo ciclo } (C_n) \end{array} \right.$

Um grafo simples com n vértices, formado por uma única cadeia elementar aberta, que contenha todos os seus vértices, diz-se um **grafo cadeia** e denota-se por P_n .



Um grafo simples com n vértices, regular de grau 2, formado por um único ciclo (elementar) diz-se um **grafo ciclo** e denota-se por C_n .

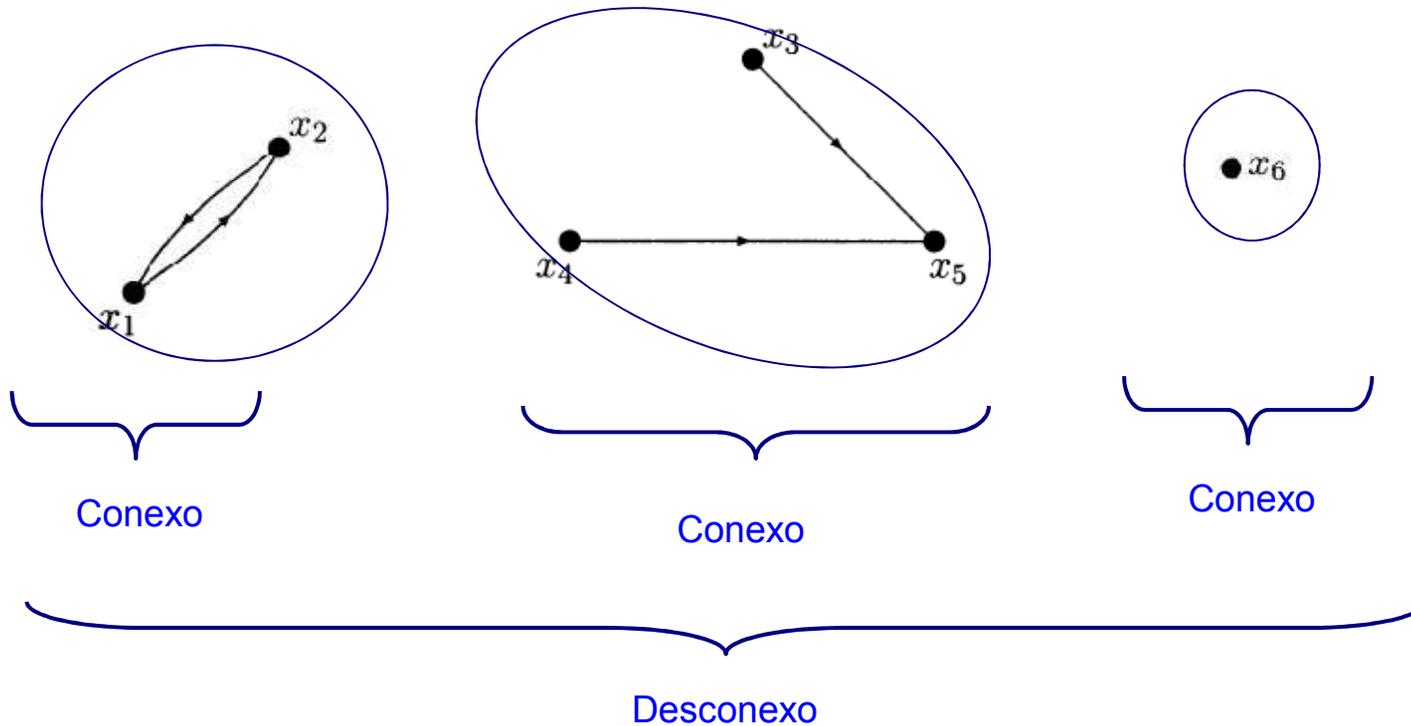
$n > 2$



Definição 2.2.5:

Um multigrafo $G = (X, \mathcal{U})$ (orientado ou não) diz-se **conexo** se, para quaisquer vértices x_i e x_j existe, em G , uma cadeia $x_i - x_j$. Caso contrário diz-se **desconexo**.

Exemplo: $G = (X, \mathcal{U})$



Componentes conexas de G

Seja $G = (X, U)$ um multigrafo e R a relação binária, definida em X , por

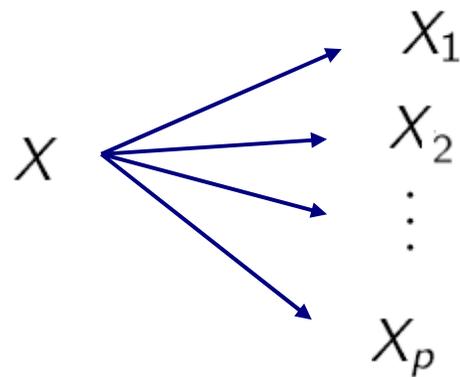
$x_i R x_j$ se, e só se, existe em G uma cadeia $x_i - x_j$.

Relação de conexidade

Proposição 2.2.6:

R é uma relação de equivalência.

A relação de equivalência R origina uma partição de X em classes X_1, \dots, X_p cujo número p se designa por **número de conexidade** de G .

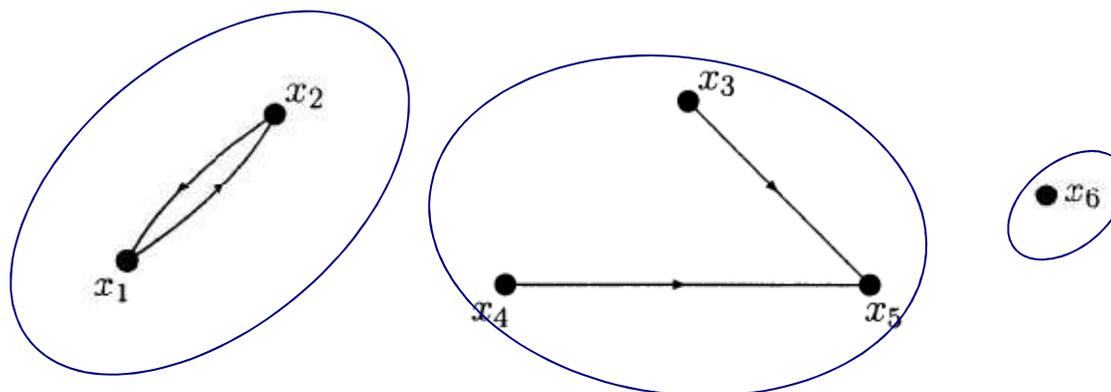


$p =$ **número de conexidade**

$X_i =$ classe de equivalência para R

Os subgrafos de G , gerados respectivamente por X_1, \dots, X_p dizem-se as **componentes conexas** de G e representam-se por R_1, \dots, R_p .

Exemplo: Consideremos o grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$



$$[x_1]_R = \{x_1, x_2\} = [x_2]_R$$

$$[x_3]_R = \{x_3, x_4, x_5\} = [x_4]_R = [x_5]_R$$

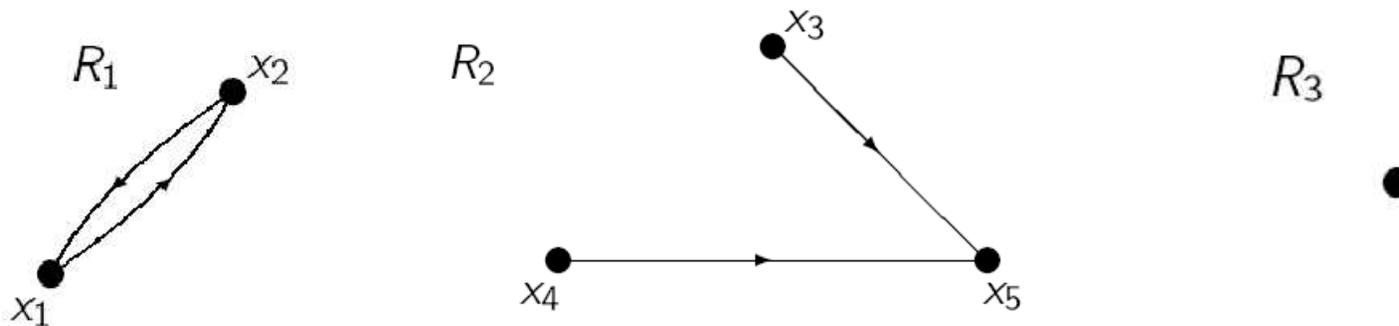
$$[x_6]_R = \{x_6\}$$

**Classes de equivalência
para a relação R**

A relação de equivalência R origina uma partição de X em 3 classes
 $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$ e $X_3 = \{x_6\}$.

Número de
conexidade = 3

Cada classe de equivalência tem associado um subgrafo de G que são as **componentes conexas** de G :



Observação

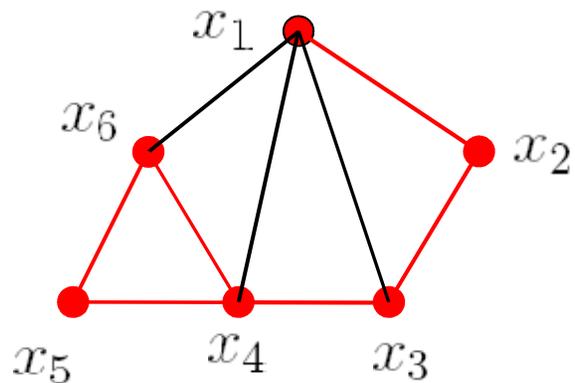
- 1 As componentes conexas de um grafo são grafos conexos.
- 2 Um grafo é conexo se e só se o seu número de conexidade é 1.

Alguns resultados sobre cadeias:

Proposição 2.2.7:

Num grafo simples $G = (X, U)$ existe uma cadeia $x_0 - x_r$ se, e só se, existe uma cadeia $x_0 - x_r$ elementar.

Observação:



$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_4$

Cadeia não elementar $x_1 - x_4$

x_1, x_2, x_3, x_4

Cadeia elementar $x_1 - x_4$

Alguns resultados sobre cadeias:

Proposição 2.2.7:

Num grafo simples $G = (X, U)$ existe uma cadeia $x_0 - x_r$ se, e só se, existe uma cadeia $x_0 - x_r$ elementar.

Demonstração \implies Se $x_0 = x_r$, a cadeia trivial x_0 é elementar. Suponhamos que $x_0 \neq x_r$. Seja L uma cadeia $x_0 - x_r$ e x um vértice arbitrário de L . Se x ocorre mais do que uma vez na cadeia L então elimine-se a subsequência de L compreendida entre a primeira e a última ocorrência de x , bem como uma dessas ocorrências. Obtém-se, ainda, uma cadeia $x_0 - x_r$, mas em que x já não aparece repetido.

Repita-se este procedimento para todo o vértice que ocorra repetido em L . Obtém-se então uma cadeia sem vértices repetidos e, portanto, uma cadeia $x_0 - x_r$ elementar.

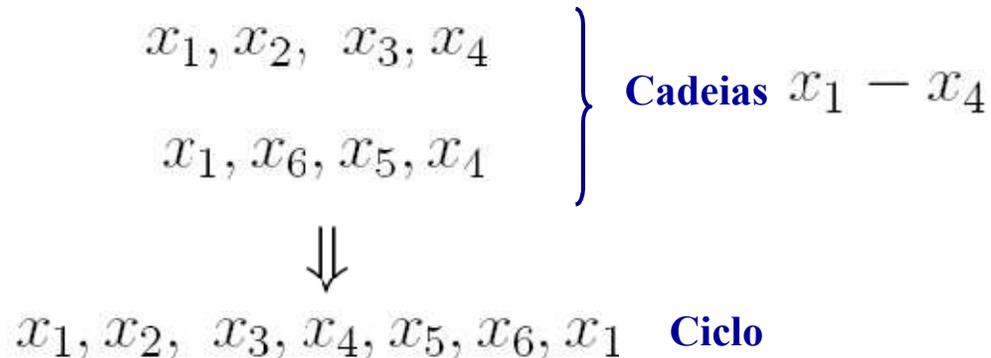
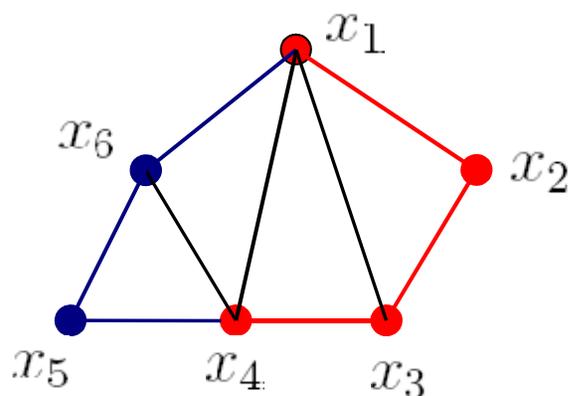
\longleftarrow Imediato.

□

Proposição 2.2.8:

Sejam $G = (X, U)$ um grafo simples e x_0 e x_r dois vértices distintos de G . Se em G existem duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, então em G existe um ciclo.

Observação:



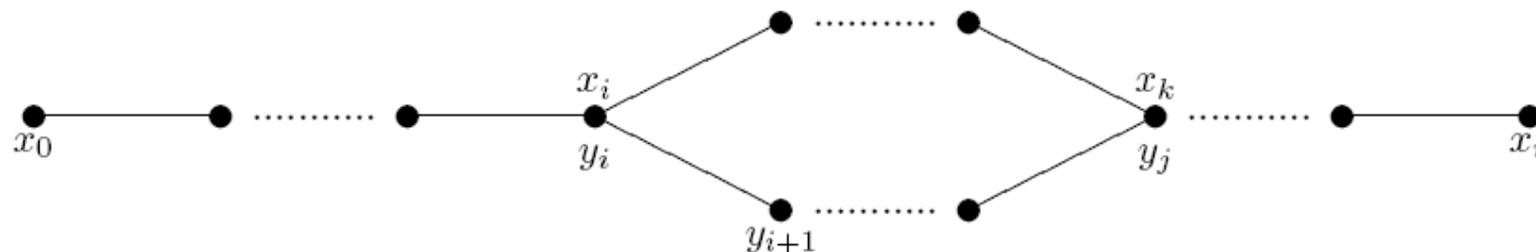
Proposição 2.2.8:

Sejam $G = (X, U)$ um grafo simples e x_0 e x_r dois vértices distintos de G . Se em G existem duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, então em G existe um ciclo.

Demonstração Sejam

$$L_1 : x_0, x_1, x_2, \dots, x_r \quad \text{e} \quad L_2 : x_0, y_1, y_2, \dots, x_r$$

duas cadeias $x_0 - x_r$ elementares distintas, existentes em G . Seja i o índice mínimo para o qual $x_{i+1} \neq y_{i+1}$ e j o índice mínimo tal que $j > i$ e y_j é vértice de L_1 , isto é, $y_j = x_k \in L_1$.



Então,

$$x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, y_{j-1}, \dots, y_{i+1}, y_i$$

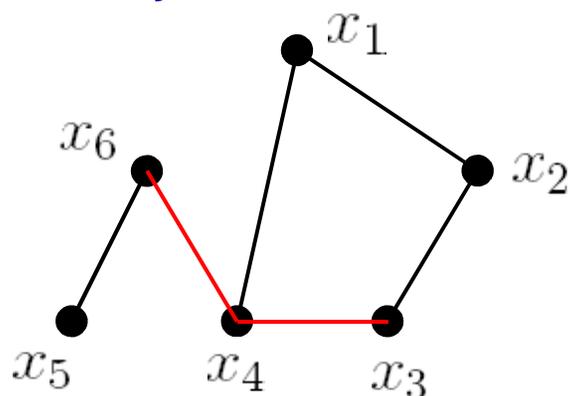
é um ciclo de G .

□

Proposição 2.2.9:

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples sem ciclos. Se $u \in (X \otimes X) \setminus U$ então $G + u$ tem, no máximo, um ciclo.

Observação:



Acrescentando o arco $\{x_4, x_6\}$ continuamos sem ciclos, mas acrescentado $\{x_4, x_3\}$ passamos a ter um ciclo (no máximo um).

Demonstração Suponhamos que em $G + u$ existiam pelo menos dois ciclos e sejam C_1 e C_2 dois desses ciclos. Se o arco u não pertencesse aos dois ciclos, então concluiríamos que $(G + u) - u = G$ tinha um ciclo, o que é impossível.

Portanto, $u = \{x, y\}$ é arco de C_1 e de C_2 . Então existiam duas cadeias $x - y$ elementares distintas, não incluindo o arco u . Consequentemente, estas cadeias existiam também em G . Mas isto implicaria que G tinha um ciclo, o que é impossível.

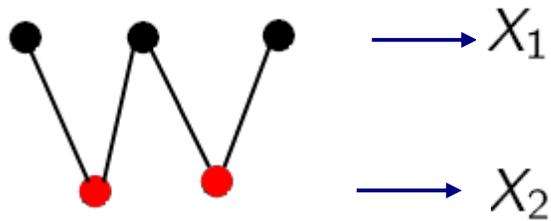
Portanto, em $G + u$ existe, no máximo, um ciclo. □

Teorema 2.2.10:

Um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, é bipartido *se, e só se*, não tem ciclos de comprimento ímpar.

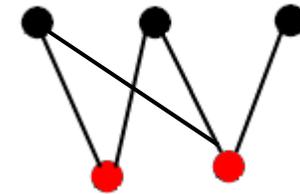
Observação:

(1)



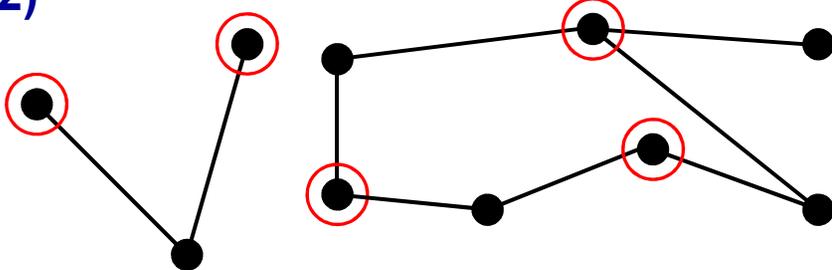
Grafo bipartido sem ciclos

$$X = X_1 \cup X_2$$



Grafo bipartido com ciclos

(2)

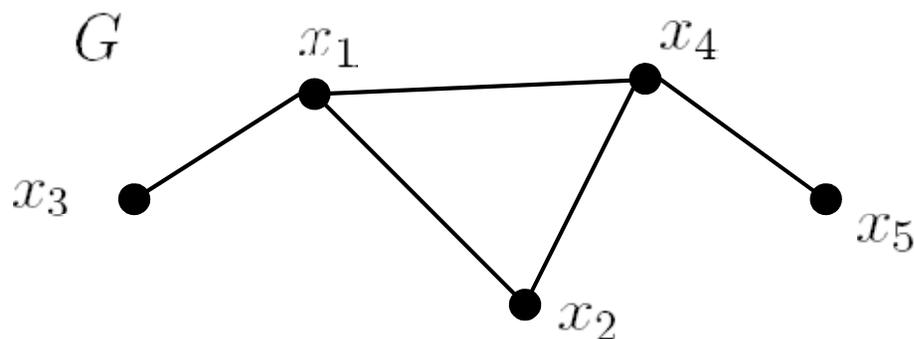


Como não tem ciclos de comprimento ímpar, pelo teorema sabe-se que o grafo é bipartido.

Definição 2.2.11:

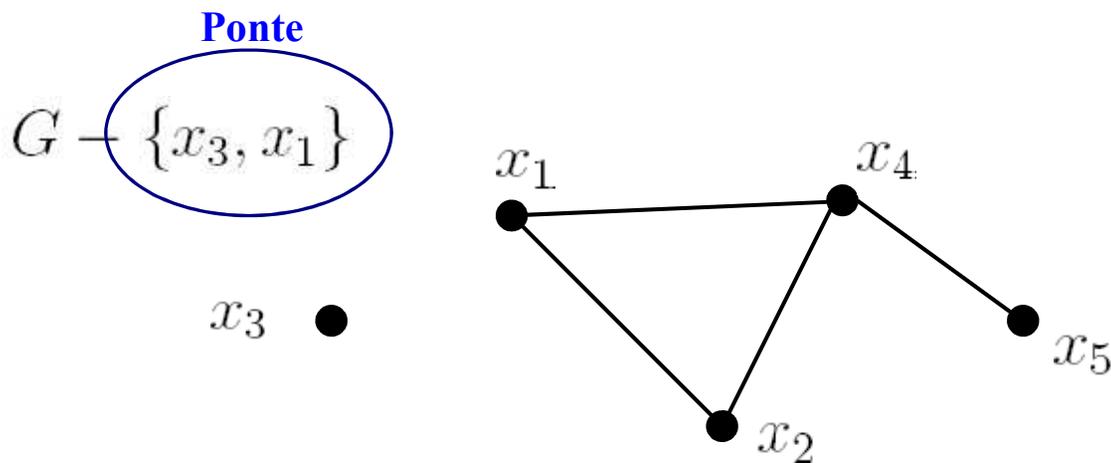
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Diz-se que $u \in \mathcal{U}$ é uma **ponte** de G se o número de conexidade de $G - u$ é superior ao número de conexidade de G .

Exemplo:



1

número de conexidade G



2

número de conexidade

Observação: Se $G = (X, U)$ é um grafo simples com número de conexidade p e $u \in U$ é uma ponte, então $G - u$ tem número de conexidade $p + 1$.

Boa caracterização
das pontes



Proposição 2.2.11:

Seja $G = (X, U)$ um grafo simples. Então $u \in U$ é uma ponte se, e só se, u não faz parte de nenhum ciclo.

Demonstração Dado que todo o arco de G tem extremidades, em vértices da mesma componente conexa, podemos supor que G é conexo.

\Leftarrow Suponhamos que $u = \{x, y\}$ não é ponte. Então, $G - u$ é conexo, pelo que existe uma cadeia elementar $x - y$, em $G - u$. Então,

$$x - y, \{x, y\}, x$$

é um ciclo em G ao qual u pertence.

\implies Suponhamos que $u = \{x, y\}$ faz parte de um ciclo,

$$x, y, y_1, \dots, y_k, x.$$

Sejam x_i, x_j vértices de G , $i \neq j$. Como G é conexo, existe uma cadeia elementar $x_i - x_j$. Se u não é arco desta cadeia, então a cadeia $x_i - x_j$, é cadeia em $G - u$. Se u é arco da cadeia, então $x_i - x_j$ é cadeia

$$x_i, \dots, x, y, \dots, x_j$$

pelo que,

$$x_i, \dots, x, y_k, \dots, y_1, y, \dots, x_j$$

também é cadeia $x_i - x_j$, só que não inclui o arco u . Portanto, cadeia em $G - u$. Logo, $G - u$ é conexo, ou seja, u não é ponte. \square

Proposição 2.2.12:

Um grafo simples G e o seu grafo complementar \overline{G} não podem ser ambos desconexos.

Observação:



Proposição 2.2.12:

Um grafo simples G e o seu grafo complementar \overline{G} não podem ser ambos desconexos.

Demonstração Suponhamos que G é desconexo e vejamos que \overline{G} é conexo.

Sejam x_i, x_j dois vértices de G .

Se $x_i = x_j$, tem-se a cadeia trivial. Suponhamos que $x_i \neq x_j$. Se $\{x_i, x_j\}$ não é arco de G , então é arco de \overline{G} , pelo que x_i, x_j é cadeia $x_i - x_j$ em \overline{G} .

Se $\{x_i, x_j\}$ é arco de G , então x_i e x_j pertencem à mesma componente conexa de G . Como G é desconexo, existe um vértice x_k que não pertence à componente conexa de x_i e x_j , em G . Então, $\{x_i, x_k\}$ e $\{x_k, x_j\}$ não são arcos de G , pelo que o são de \overline{G} . Assim,

$$x_i, x_k, x_j$$

é cadeia $x_i - x_j$ em \overline{G} . Logo, \overline{G} é conexo.

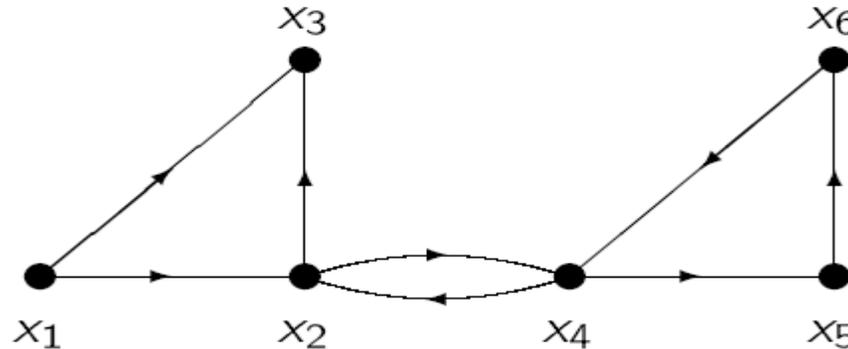
Se \overline{G} fosse desconexo, então por um raciocínio análogo, $\overline{\overline{G}} = G$ é conexo. Logo, G e \overline{G} não podem ser ambos desconexos. \square

Noção de caminho (multigrafos orientados):

Definição 2.2.13:

Num multigrafo orientado $G = (X, U)$ chama-se **caminho** a uma sequência alternada de vértices e arcos de G , iniciada e terminada num vértice, tal que cada arco tem uma extremidade inicial no vértice que imediatamente o precede na sequência e extremidade final no vértice que imediatamente lhe sucede na sequência.

Exemplo: Seja $G = (X, U)$



$L : x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_2, x_4), x_4, (x_4, x_5), x_5$

Caminho (cadeia)

$C : x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_4, x_2), x_4, (x_4, x_5), x_5$

Cadeia que não é um caminho

Trata-se de uma sequência da forma

$L : x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, u_r, x_r$
em que $x_i \in X, i = 0, \dots, r$, e $u_i = (x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{U}, i = 1, \dots, r$.

L é um caminho $x_0 - x_r$ **vértice inicial** **vértice final**

As definições de caminho fechado/aberto, comprimento de um caminho, caminho simples, caminho elementar, ..., obtêm-se substituindo, nas correspondentes definições para cadeias, "cadeia" por "caminho".

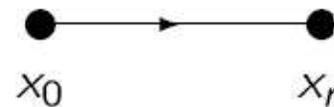
Definição 2.2.14:

Um caminho simples, fechado e não trivial diz-se um *circuito*.

não repete arcos

Observações:

- 1 Se L é um caminho $x_0 - x_r$ num multigrafo orientado G então L é também uma cadeia $x_0 - x_r$.
- 2 Num grafo orientado pode existir um caminho $x_0 - x_r$ e não existir nenhum caminho $x_r - x_0$.



- 3 Num digrafo, um caminho fica completamente determinado se indicarmos apenas a subsequência dos seus vértices.

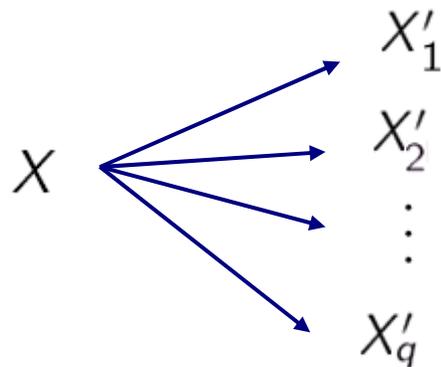
Definição 2.2.15:

Um multigrafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ diz-se *fortemente conexo* se, para quaisquer dois vértices x_i e x_j , existem em G um caminho $x_i - x_j$ e um caminho $x_j - x_i$.

Componentes fortemente conexas de G

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo orientado e S a relação binária, definida em X , por: para quaisquer $x_i, x_j \in X$,

$x_i S x_j$ se, e só se, existem em G um caminho $x_i - x_j$ e um caminho $x_j - x_i$.
 S é relação de equivalência



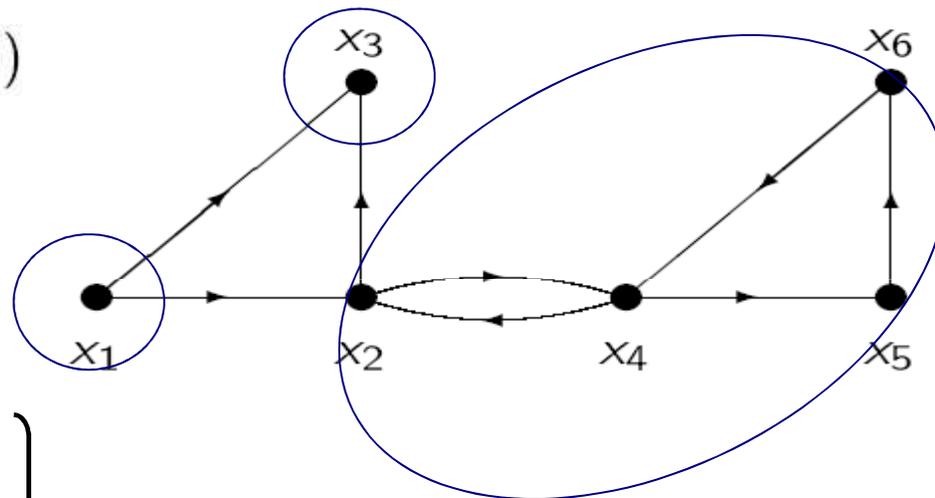
q = número de conexidade forte
 X'_i = classe de equivalência para S

Sejam X'_1, \dots, X'_q as suas classes de equivalência.

Ao número q chama-se **número de conexidade forte** de G .

Os subgrafos gerados por X'_1, \dots, X'_q dizem-se as **componentes fortemente conexas** de G e representam-se, respectivamente, por S_1, \dots, S_q .

Exemplo: Seja $G = (X, U)$



$$[x_1]_S = \{x_1\}$$

$$[x_2]_S = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$$

$$[x_3]_S = \{x_3\}$$

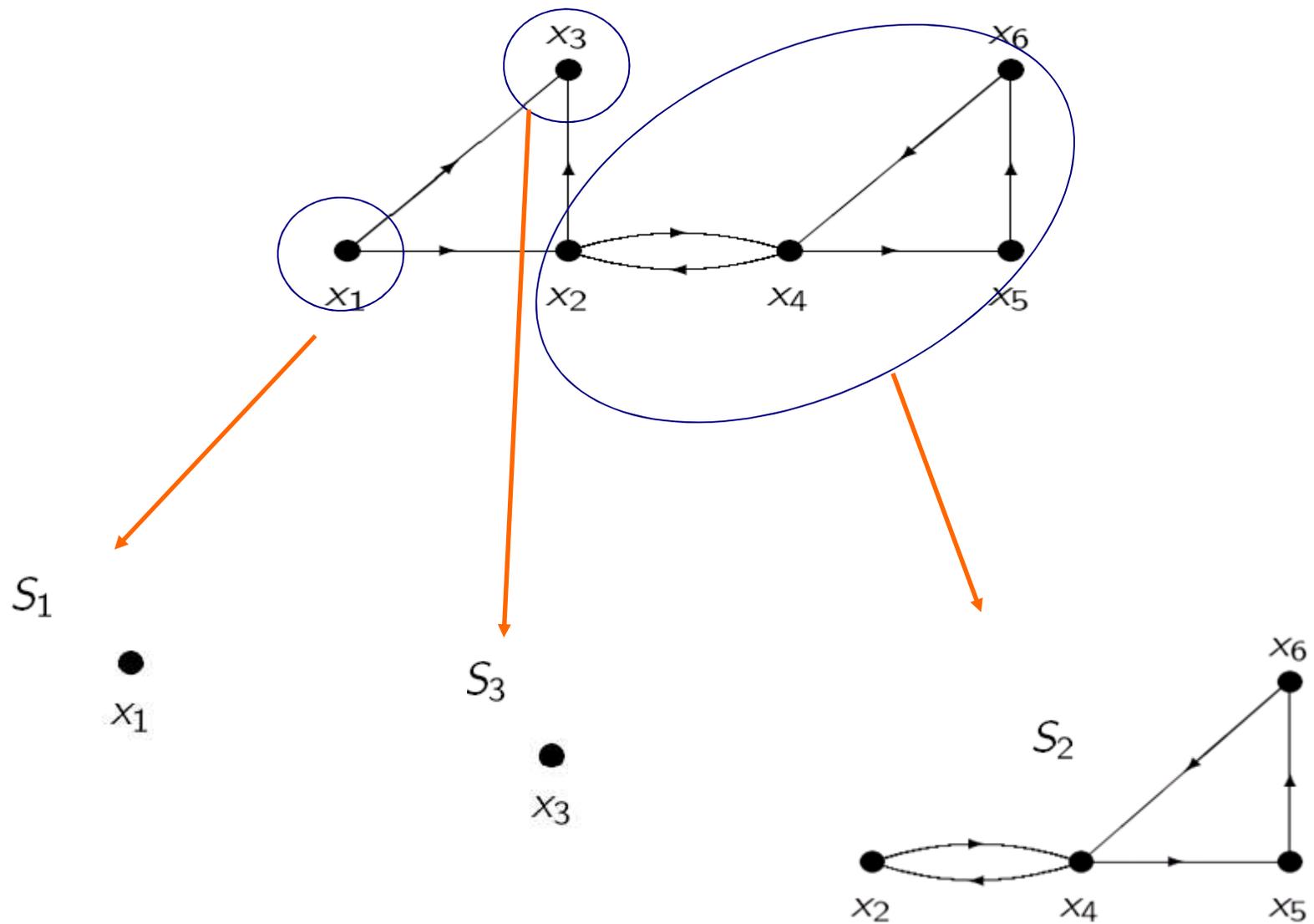
Classes de equivalência da relação S

A relação S origina uma partição de X em 3 classes de equivalência:

$$X'_1 = \{x_1\}; X'_2 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\} \text{ e } X'_3 = \{x_3\}.$$

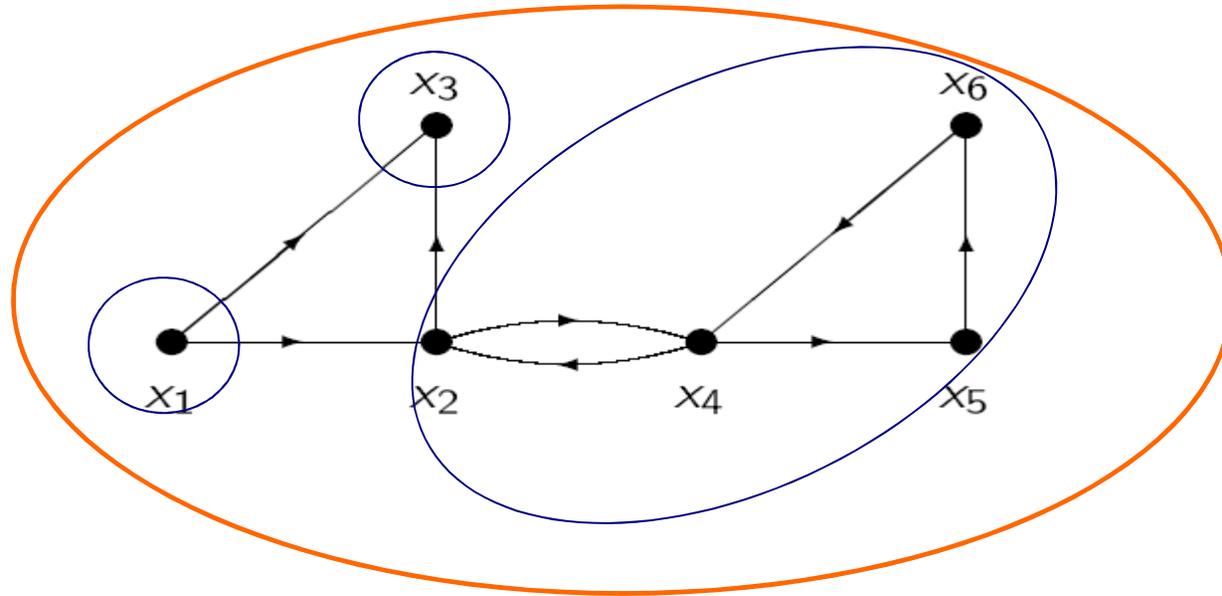
**Número de
conexidade forte = 3**

Assim, as componentes fortemente conexas de G são:



Comparação entre as **componentes conexas** e as **componentes fortemente conexas**:

$G = (X, U)$



Para $G = (X, U)$ temos : **1** componente conexa;
3 componentes fortemente conexas;

Proposição 2.2.15:

Seja $G = (X, U)$ um multigrafo orientado. Então:

- (i) Um arco de G pode não pertencer a nenhuma componente fortemente conexa;*
- (ii) Um arco de G não pode pertencer a mais do que uma componente fortemente conexa;*
- (iii) Um arco de G pertence a uma componente fortemente conexa se, e só se, faz parte de um circuito.*

Proposição 2.2.16:

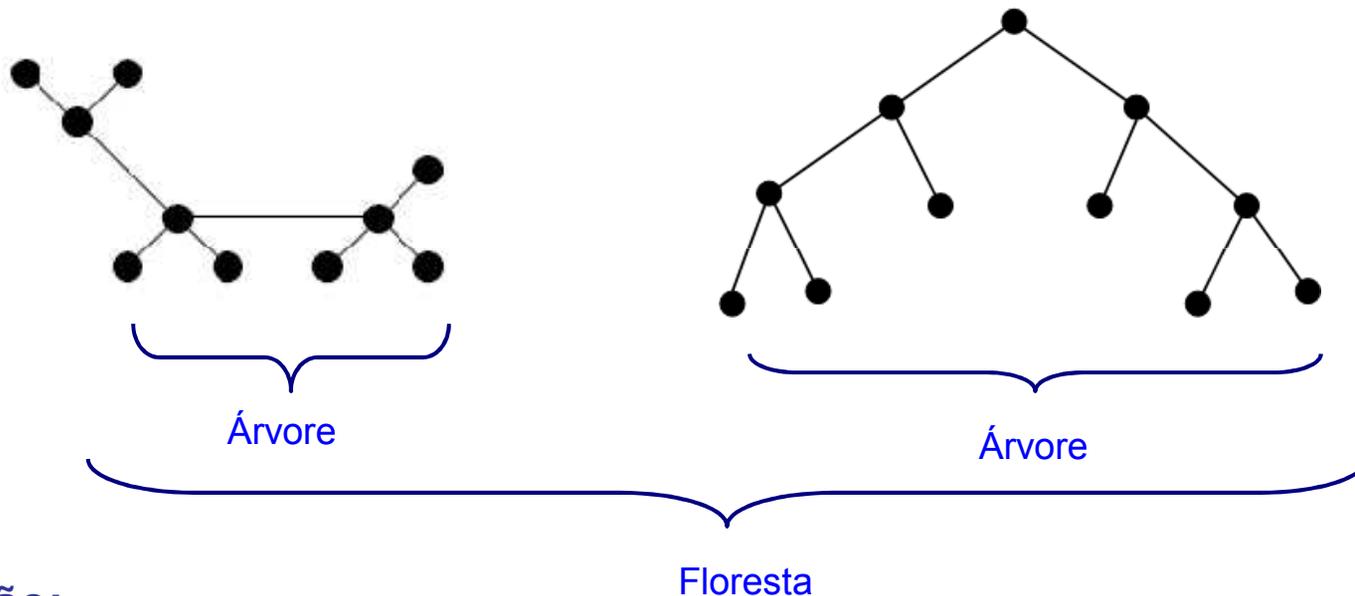
Seja G um digrafo. Se G é desconexo então o seu digrafo complementar \overline{G} é fortemente conexo.

2.3 Árvores

Definição 2.3.1:

Um grafo conexo sem ciclos diz-se uma **Árvore**.

Um grafo sem ciclos diz-se uma **Floresta**



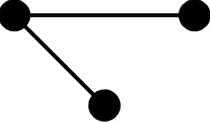
Observação:

- 1 Uma **Árvore** é um grafo conexo onde todos os arcos são pontes.
- 2 Uma **Floresta** é um grafo onde cada componente conexa é uma árvore.

Questão: Quantos arcos tem uma árvore com n vértices ?

$n=1$  \Rightarrow 0 arcos

$n=2$  \Rightarrow 1 arcos

$n=3$  \Rightarrow 2 arcos

⋮

$n=k$ \Rightarrow $k-1$ arcos, k natural

Conclusão: Uma árvore com n vértices tem $n-1$ arcos (Prova-se por indução completa)

Teorema 2.3.2: Toda a árvore com n vértices tem $n - 1$ arcos (n um natural).

Dem: Usemos o princípio de indução completa.

$n=1$ É claro que para $n=1$ a árvore tem de ter 0 arcos, pois coincide com o grafo



Hipótese: Suponha-se que toda a árvore com k vértices, em que $1 \leq k \leq n$, tem $k - 1$ arcos (para algum n).

Tese: Mostre-se que uma árvore com $n+1$ vértices tem n arcos ($n \geq 2$)

Teorema 2.3.2: Toda a árvore com n vértices tem $n - 1$ arcos (n um natural).

Dem: Usemos o princípio de indução completa.

$n=1$ É claro que para $n=1$ a árvore tem de ter 0 arcos, pois coincide com o grafo



Hipótese: Suponha-se que toda a árvore com k vértices, em que $1 \leq k \leq n$, tem $k - 1$ arcos (para algum n).

Tese: Mostre-se que uma árvore com $n+1$ vértices tem n arcos ($n \geq 2$)

Seja $G' = (X', U')$ uma árvore com $n+1$ vértices. Seja $\bar{u}' \in U'$ um arco.

Como G' é árvore então \bar{u}' é uma ponte pelo que $G' - \bar{u}'$ é desconexo com duas componentes conexas R_1 e R_2 com k_1 e k_2 vértices respectiva/.

Tem-se,

$$k_1 + k_2 = n+1.$$

Como R_1 e R_2 são árvores, por hipótese de indução, R_1 tem $k_1 - 1$ arcos e R_2 tem $k_2 - 1$. Assim, $G' - \bar{u}'$ tem $k_1 + k_2 - 2$ arcos, logo G' tem n arcos.

Efectivamente,

$$(K_1 + K_2 - 2) + 1 = n \quad (\text{n}^\circ \text{ de arcos de } G'). \quad \square$$

Questão: Quantos arcos tem uma floresta com n vértices ?

Depende do número de árvores que a constituem.

Proposição 2.3.3:

Uma floresta com n vértices e p componentes conexas tem $n - p$ arcos.



p árvores

Dem: Seja $G = (X, U)$ uma floresta constituída por p componentes conexas com n_1, n_2, \dots, n_p vértices, respectivamente. Tem-se obviamente,

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p = n.$$

Como cada componente conexa é uma árvore, então

$$R_i \text{ tem } n_i - 1 \text{ arcos, } \quad i=1, 2, \dots, p.$$

Assim, G tem

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_p - 1) = n - p, \quad \text{arcos. } \square$$

Teorema 2.3.4:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices. Então são equivalentes as afirmações:

- (i) G é um grafo conexo sem ciclos. \longleftarrow (G é árvore)
- (ii) G não tem ciclos e tem $n - 1$ arcos.
- (iii) G é conexo e tem $n - 1$ arcos.
- (iv) G é conexo e se $u \in \mathcal{U}$ então $G - u$ é desconexo.
- (v) $\forall x_i, x_j \in X$, tais que $x_i \neq x_j$ existe uma, e uma só, cadeia elementar $x_i - x_j$, em G .
- (vi) G não tem ciclos e se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G + u$ tem um, e um só, ciclo.

Observação: Um grafo conexo com n vértices e $n - 1$ arcos é uma árvore

Dem:

(i) \Rightarrow (ii) Por indução em n .

Para $n = 2$ o resultado é verdadeiro.

Suponhamos o resultado verdadeiro para todo o grafo conexo sem ciclos com um número de vértices inferior ou igual a k , com $k \geq 2$.

Seja $G' = (X', U')$ um grafo conexo sem ciclos com $k + 1$ vértices. Como G' não tem ciclos, todo o arco $u' \in U'$ é uma ponte.

Logo, $G' - u'$, com $u' \in U'$, tem duas componentes conexas R_1 e R_2 com k_1 e k_2 vértices, respectivamente. Como R_1 e R_2 são grafos conexos sem ciclos, por hipótese de indução, o número de arcos de R_1 é $k_1 - 1$ e o número de arcos de R_2 é $k_2 - 1$. Porque $1 + k = k_1 + k_2$ e o número de arcos de G' é $1 + k_1 - 1 + k_2 - 1$, temos

$$1 + k_1 - 1 + k_2 - 1 = 1 + k - 1 = k.$$

Dem(cont.):

(ii) \Rightarrow (iii) Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G não é conexo e sejam R_1, \dots, R_p as componentes conexas de G , com $p \geq 2$. Sejam n_i e m_i , respectivamente, o número de vértices e o número de arcos de R_i , $i = 1, \dots, p$. Porque R_i é conexo sem ciclos, temos

$$m_i = n_i - 1 \quad i = 1, \dots, p.$$

então, o número de arcos de G seria

$$\sum_{i=1}^p m_i = \sum_{i=1}^p n_i - p = n - p.$$

Como $p \geq 2$, concluiríamos que o número de arcos de G

$$n - p \leq n - 2,$$

o que contradiz a hipótese.

(iii) \Rightarrow (iv) Dado que G tem n vértices e $n - 1$ arcos, então para qualquer $u \in \mathcal{U}$, $G - u$ tem n vértices e $n - 2$ arcos. Demonstremos que se $G' = G - u$ fosse conexo então o seu número de arcos m' verificaria $m' \geq n - 1$, o que é uma contradição com $m' = n - 2$. De facto se G' fosse conexo sem ciclos então por (i) \Rightarrow (ii) teríamos $m' = n - 1$. Por outro lado se G' fosse conexo com ciclos então retirando arcos pertencentes a ciclos obteríamos um grafo parcial de G ainda conexo e sem ciclos em que $m' > n - 1$.

(iv) \Rightarrow (v) Como G é conexo, então para quaisquer dois vértices de G existe uma cadeia elementar, da qual são extremidades.

Se existissem dois vértices distintos de G que fossem extremidades de pelo menos duas cadeias elementares distintas, então, em G , existiria um ciclo. Sendo u um arco deste ciclo, como u não era ponte, $G - u$ era conexo, o que contradiz a hipótese.

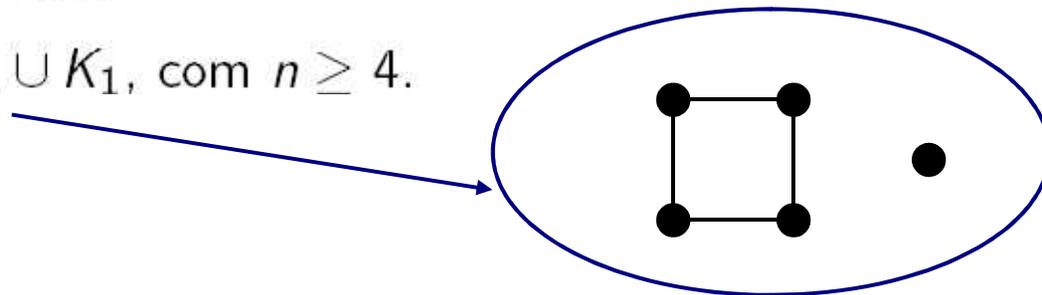
(v) \Rightarrow (vi) Se em G existisse um ciclo, então sendo x e y dois vértices distintos deste ciclo, existiriam duas cadeias elementares distintas $x - y$, o que contradiz (v). Logo, G não tem ciclos. Seja $u = \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U}$, com $x_i \neq x_j$, vértices de X . Por (v) existe em G uma cadeia elementar $x_i - x_j$, e dado que $x_i \neq x_j$ também é uma cadeia simples. Assim, $x_i - x_j, u, x_i$ é um ciclo em $G + u$. Porque G não tem ciclos, então $G + u$ tem no máximo um ciclo.

(vi) \Rightarrow (i) Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G é desconexo e sejam x_i, x_j vértices de componentes conexas distintas. Tem-se $\{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U}$. Como G não tem ciclos e não existem cadeias com extremidades em vértices de componentes conexas distintas, podemos dizer que $G + u$ não tem ciclos, o que contradiz (vi). Logo, G é conexo. □

Observação.

Existem grafos simples com n vértices e $n - 1$ arcos que não são florestas e, portanto, não são árvores.

Por exemplo, $G = C_{n-1} \cup K_1$, com $n \geq 4$.



Questão:

(1) Considere a sequência de números $(3, 1, 1, 1, 0)$. Existe uma árvore com esta sequência de graus ?

Claro que não..... Um garfo simples com esta sequência de graus não é conexo.

(2) E para a sequência $(3, 2, 2, 2, 1)$? .

Não pois

Proposição 2.3.5:

Numa árvore, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Proposição 2.3.5:

Numa árvore, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Dem: Seja G uma árvore com $n \geq 2$ vértices. Seja (d_1, \dots, d_n) com $d_1 \geq \dots \geq d_n$, a sequência de graus de G . Como G é conexo e $n \geq 2$ então, $d_n \geq 1$.

Suponhamos que, no máximo, G tinha um vértice de grau 1, então

$$\sum_{i=1}^n d_i \geq 1 + 2(n - 1).$$

Como G é uma árvore com n vértices, o número de arcos é

$$m = n - 1.$$

Aplicando o Teorema do aperto de mãos, temos a contradição,

$$2(n - 1) \geq 1 + 2(n - 1).$$

Logo, G tem pelo menos dois vértices de grau 1.



Questão:

(3) Existe uma árvore com a sequência de graus $(3, 1, 1, 1, 1, 1)$? .

Não pois



Teorema 2.3.5:

Sejam d_1, \dots, d_n , com $n \geq 2$, inteiros tais que

$$d_1 \geq \dots \geq d_n > 0.$$

Então, existe uma árvore cuja sequência de graus é

$$(d_1, \dots, d_n)$$

se, e só se

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

Dem: \implies Aplicar teorema do aperto de mão.

\impliedby Indução em n .

$2(n-1)$

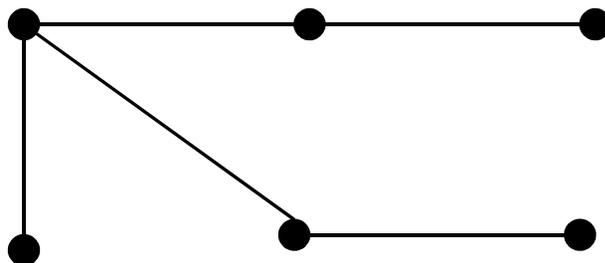
Questão:

(4) Existe uma árvore com a sequência de graus $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$? .

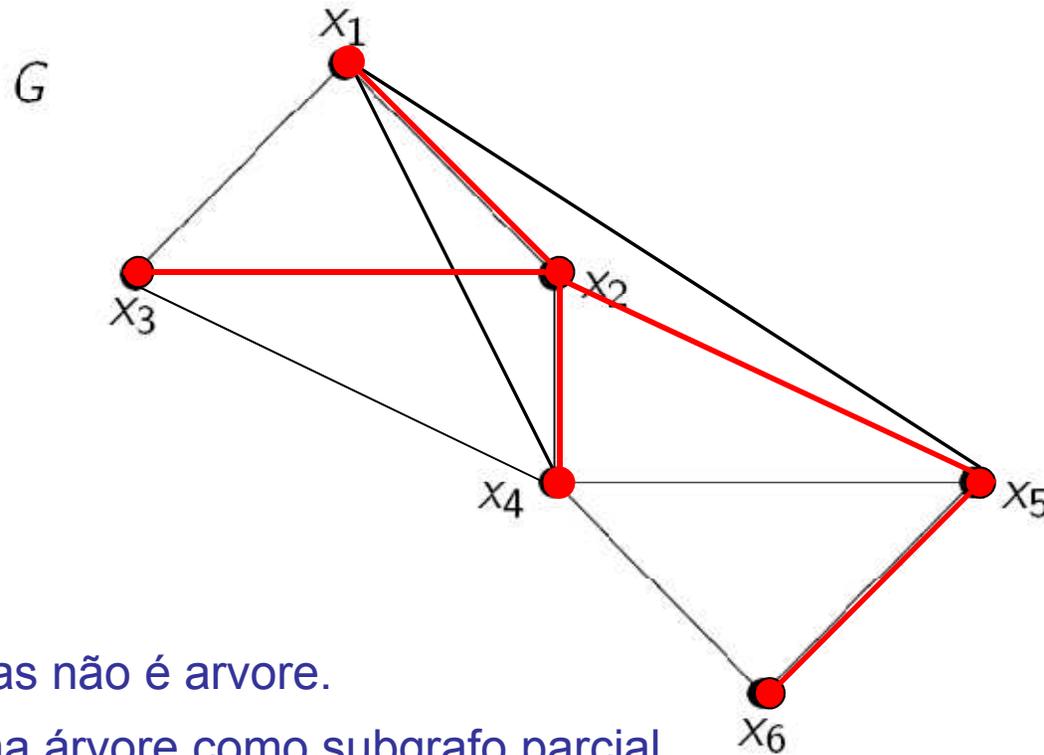
De acordo com o teorema anterior sim pois $n = 6$ (n° vértices) e

$$3+2+2+1+1+1=10 = 2 \times 6 - 2.$$

Por exemplo,



Conexidade e Árvores



G é conexo mas não é árvore.

Mas G tem uma árvore como subgrafo parcial.

Teorema 2.3.6:

Um grafo é conexo se, e só se, admite uma árvore como grafo parcial.

Dem: \longleftarrow Se um grafo G admite uma árvore como grafo parcial então G admite um grafo parcial conexo, logo é conexo.

\implies Se G não tem ciclos, então G é uma árvore (grafo parcial de G).

Se G tem um ciclo, seja u_1 um arco de um dos ciclos de G . Então u_1 não é ponte, pelo que $G_1 = G - u_1$ é conexo e tem um número de ciclos inferior ao número de ciclos de G . Se $G - u_1$ não tem ciclos então $G_1 = G - u_1$ é árvore (grafo parcial de G). Caso contrário, seja u_2 um arco de um ciclo de $G_1 - u_2 = G_2$.

Porque o número de ciclos de G é finito, procedendo deste modo, obtemos um grafo $G_k = G_{k-1} - u_{k-1}$ que é conexo, sem ciclos. Logo G_k é árvore (grafo parcial de G).

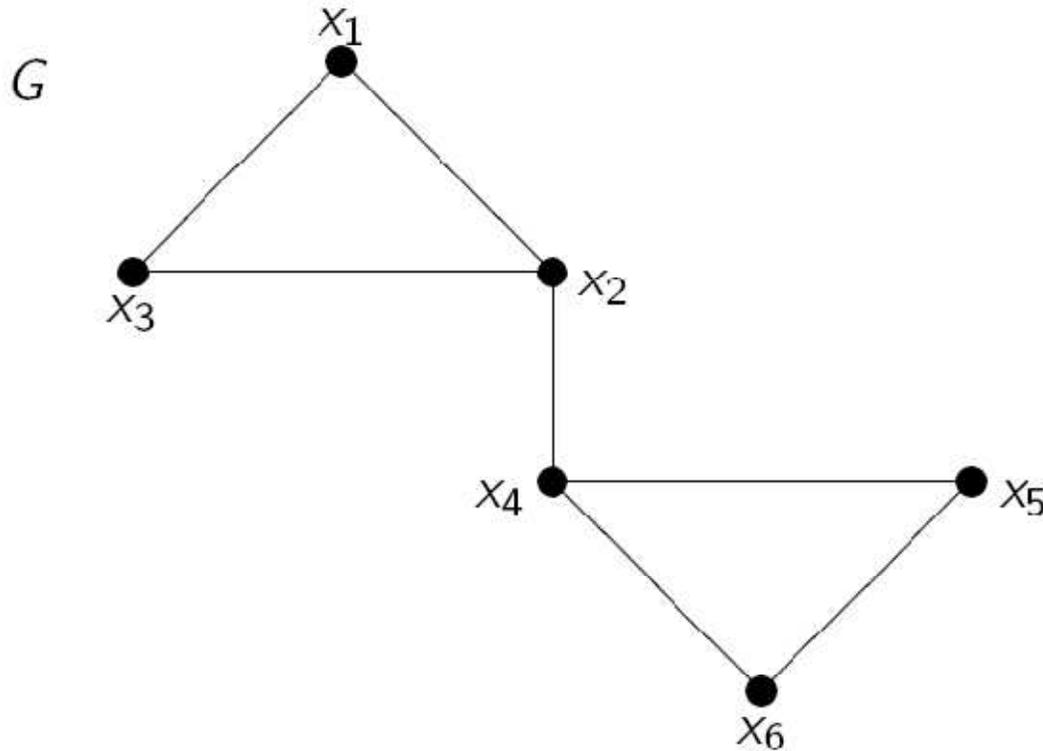
□

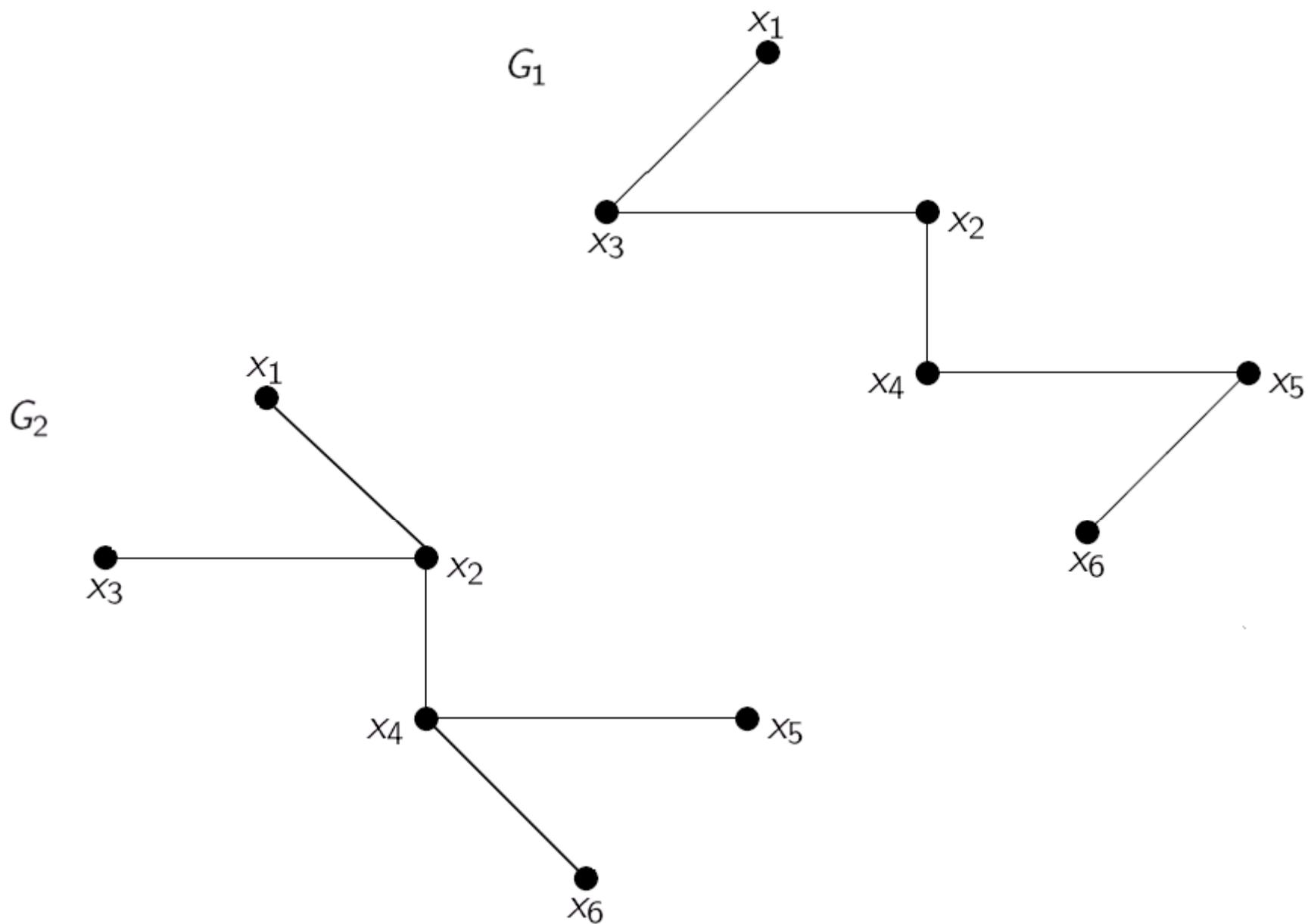
Árvores e grafos conexos estão relacionados

Definição 2.3.7:

Seja G um grafo (respectivamente, grafo conexo). Designa-se por **floresta** (respectivamente, **árvore**) **maximal** de G qualquer grafo parcial de G , que tenha o mesmo número de conexidade que G e que seja **floresta** (respectivamente, **árvore**).

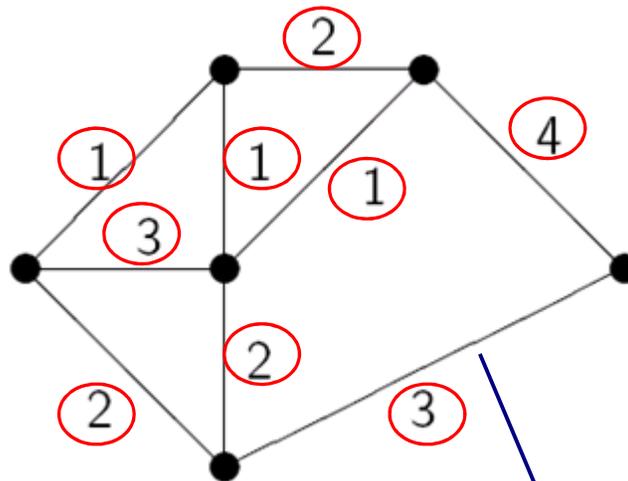
Exemplo: Consideremos o seguinte grafo simples,





G_1 e G_2 são duas árvores maximais, não isomorfas de G

Grafos ponderados:



$$v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$u \mapsto v(u)$$

Função peso

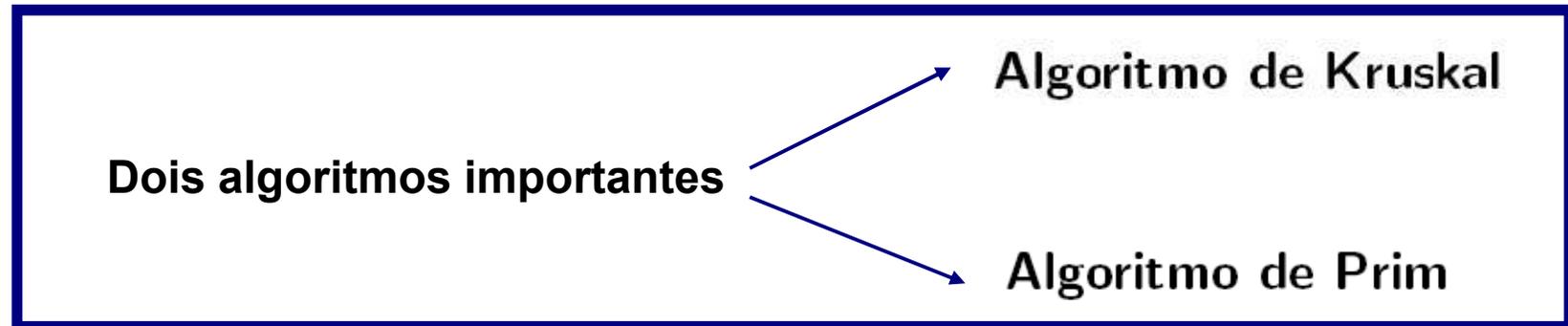
Chamamos *grafo ponderado* a um par (G, v) em que $G = (X, \mathcal{U})$ é um grafo e v é uma aplicação de \mathcal{U} no conjunto dos números reais.

Se $u \in \mathcal{U}$ designa-se por *valor/peso do arco u* o número real $v(u)$ e designa-se por **valor de G** , e representa-se por $v(G)$, o número real

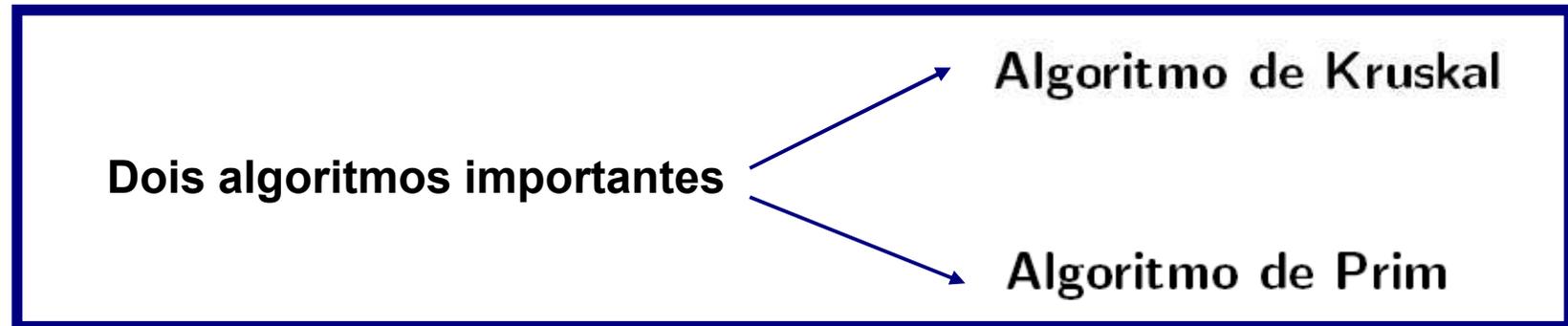
$$v(G) = \sum_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

$$V(G) = 3 + 1 + 2 + \dots = 19$$

Problema da árvore maximal de valor mínimo



Problema da árvore maximal de valor mínimo



Algoritmo de Kruskal

Seja (G, v) um grafo ponderado, sendo $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

1º) Escolha-se um arco u_1 de G tal que

$$v(u_1) = \min_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

2º) Se os arcos u_1, \dots, u_i já foram escolhidos, então, sendo $\mathcal{U}_i = \{u_1, \dots, u_i\}$, escolha-se um arco $u_{i+1} \in \mathcal{U}$ tal que

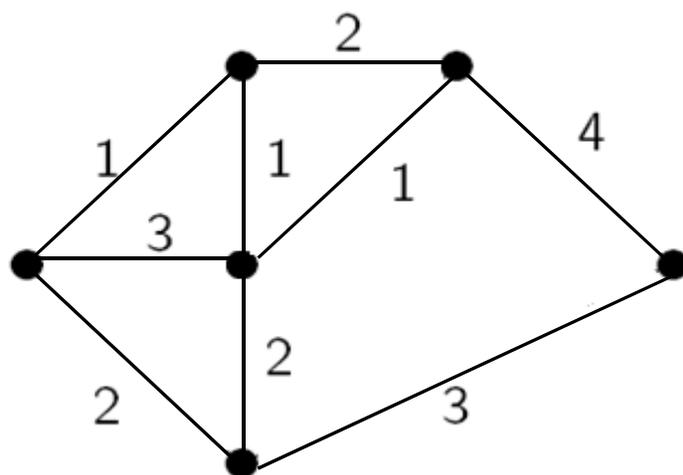
(1) $u_{i+1} \notin \mathcal{U}_i$

(2) $G' = (X, \mathcal{U}_i \cup \{u_{i+1}\})$ não tem ciclos

(3) u_{i+1} é de entre os arcos que verificam as condições (1) e (2), um com valor mínimo.

3º) Se já foram escolhidos $n - 1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se 2º).

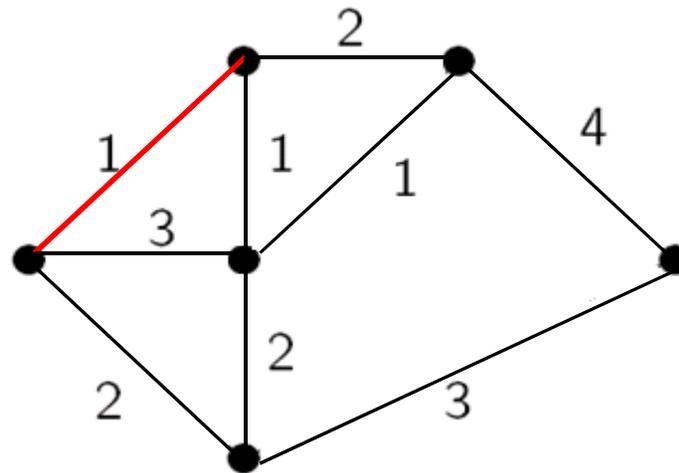
Exemplo 1: Consideremos o seguinte grafo ponderado Algoritmo de Kruskal



↑
Escolha do melhor
arco de entre os que
faltam escolher

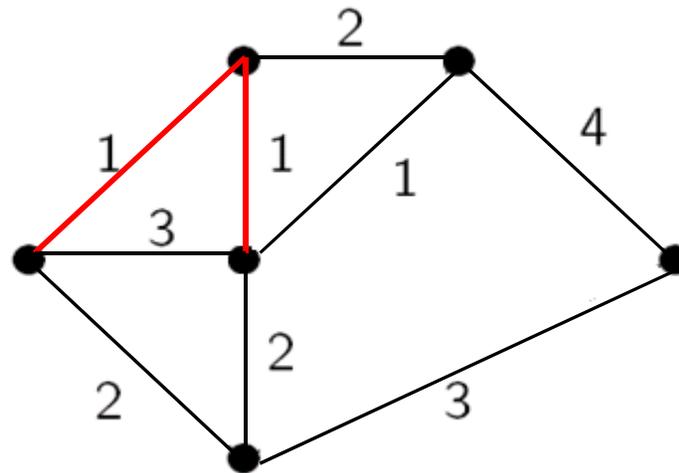
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 1: Consideremos o seguinte grafo ponderado



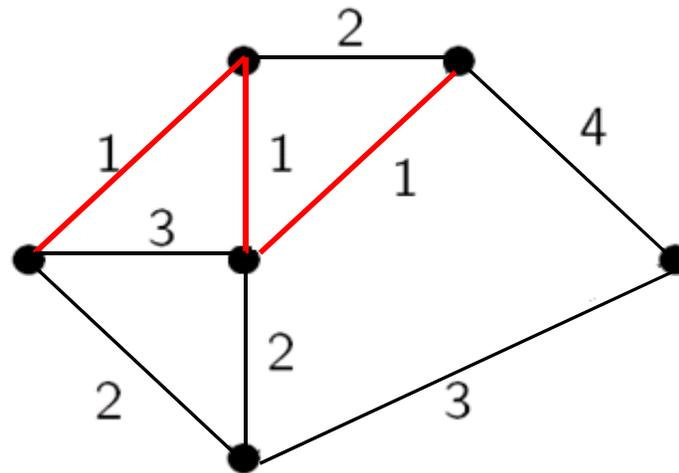
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 1: Consideremos o seguinte grafo ponderado



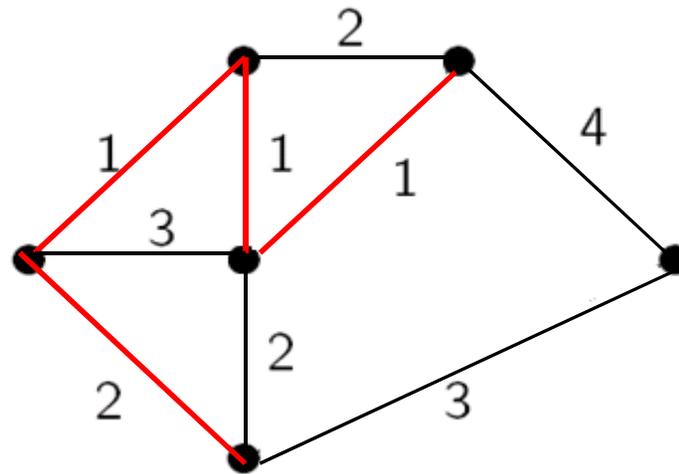
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 1: Consideremos o seguinte grafo ponderado



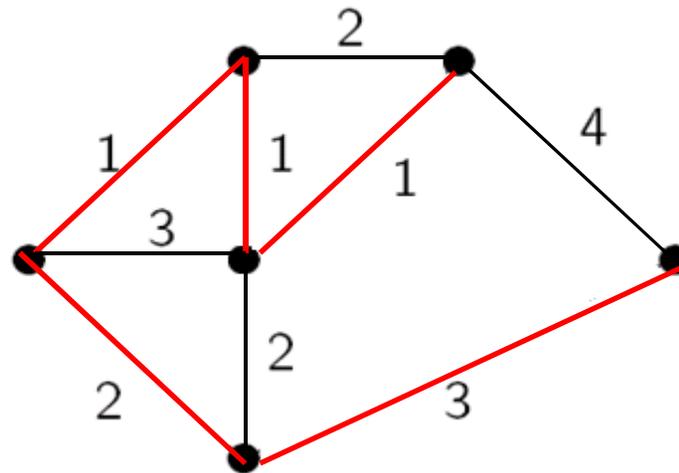
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 1: Consideremos o seguinte grafo ponderado



Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

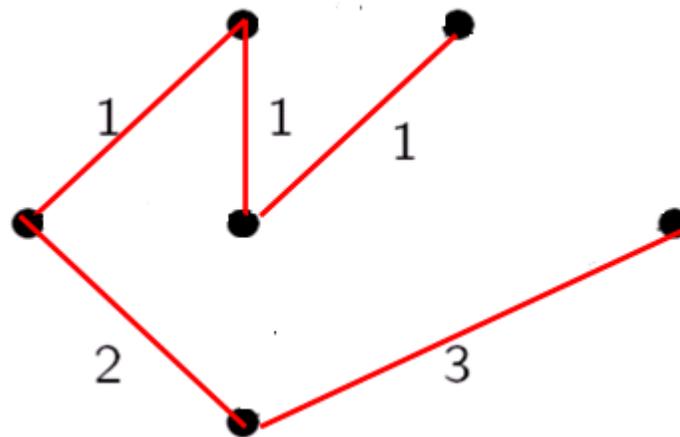
Exemplo 1: Consideremos o seguinte grafo ponderado



5 arcos escolhidos

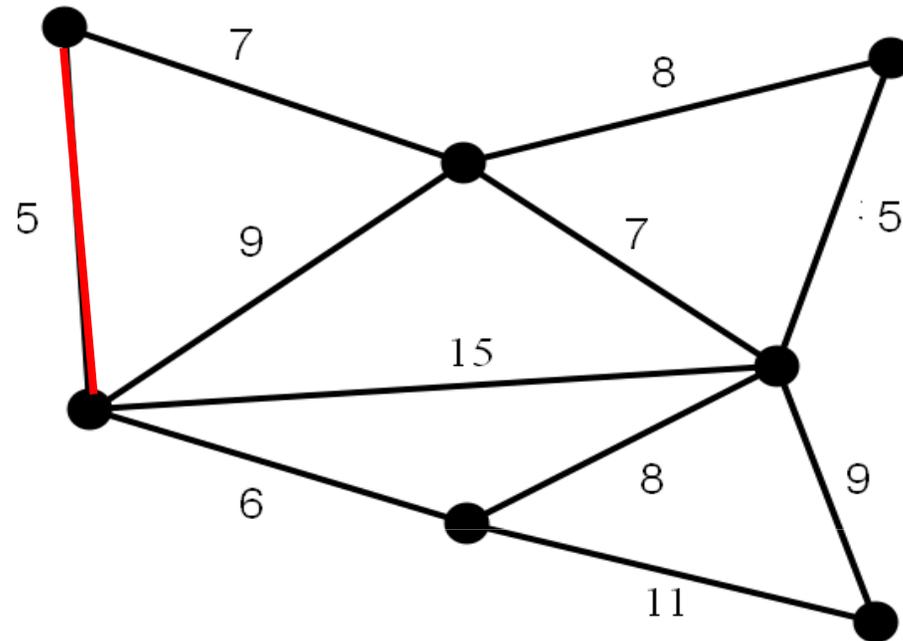


Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.



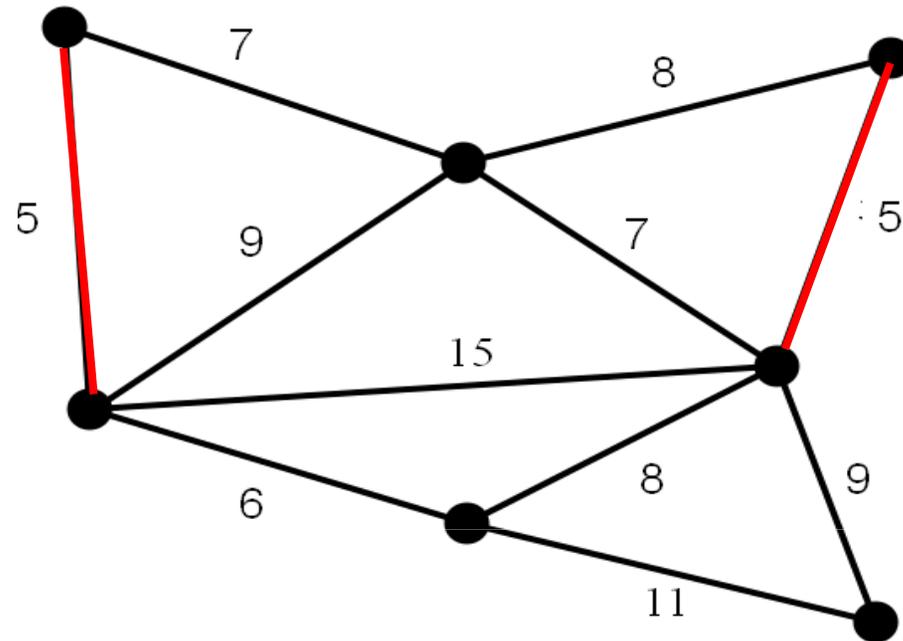
Valor = 8

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



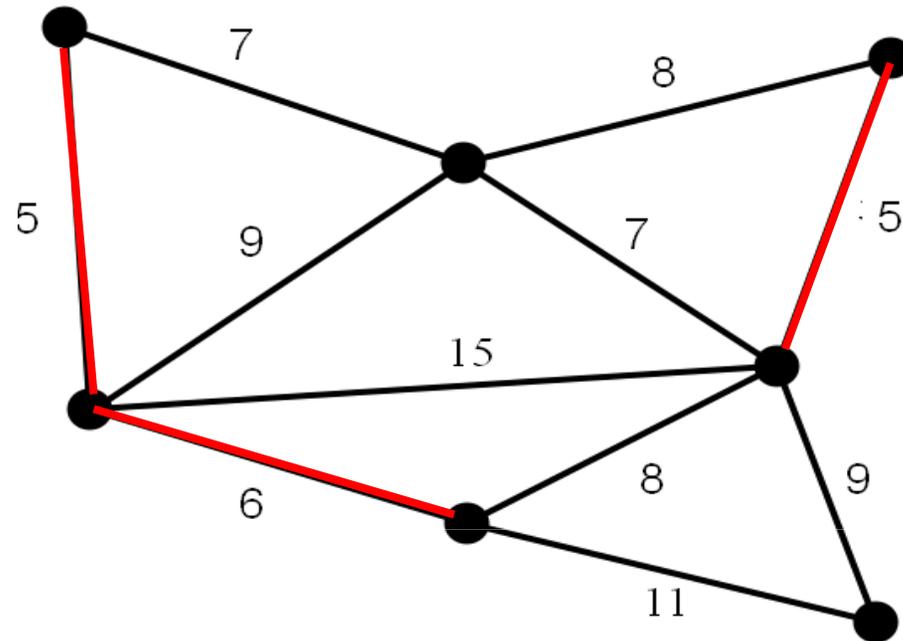
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



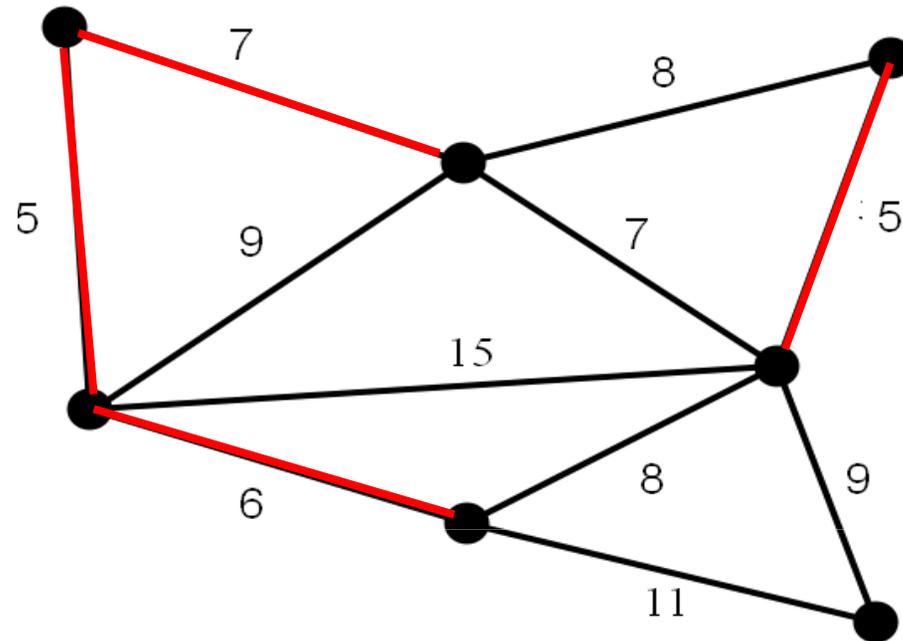
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



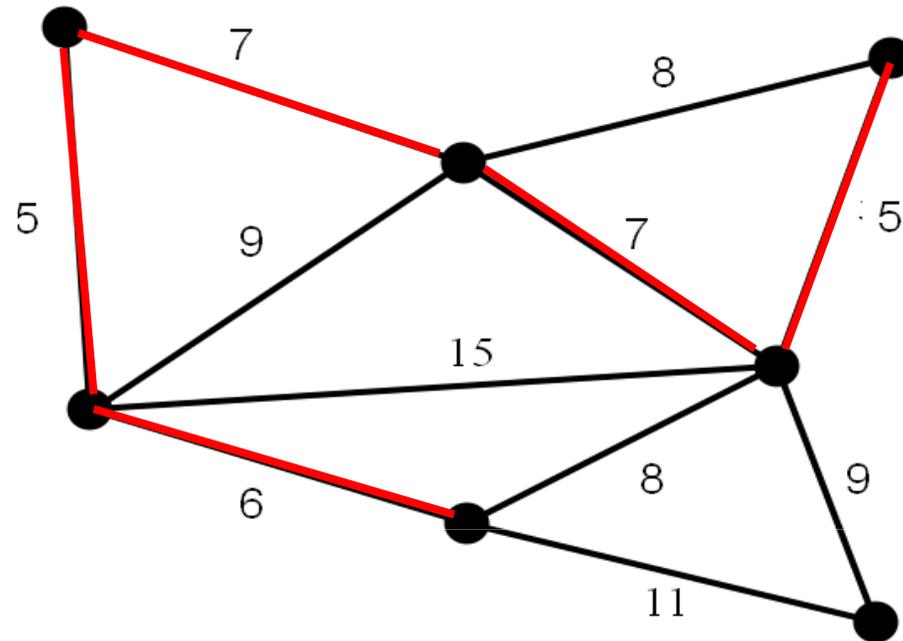
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



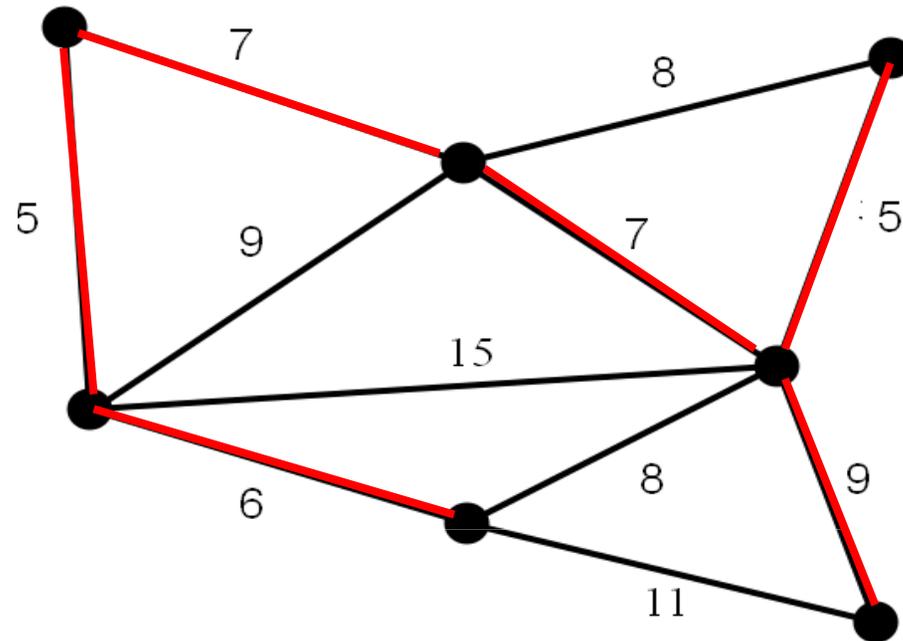
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



6 arcos escolhidos



Valor = 39

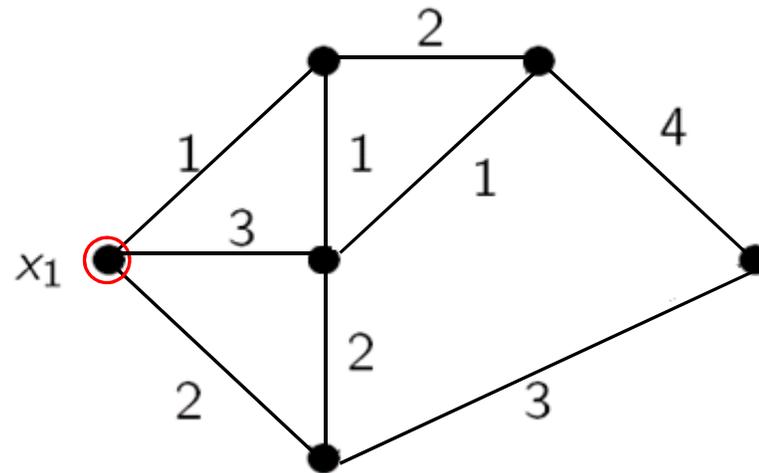
Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Algoritmo de Prim

Seja (G, v) um grafo ponderado, sendo $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

- 1º) Considere-se um vértice arbitrário de G , que designamos por x_1 .
- 2º) Escolha-se um arco u_1 de G , incidente em x_1 , que tenha valor mínimo.
- 3º) Se os arcos u_1, \dots, u_i já foram escolhidos e sendo $X_i = \{x_1, \dots, x_{i+1}\}$ o conjunto de vértices formado pela suas extremidades, escolha-se um arco u_{i+1} de valor mínimo entre os arcos $\{x_j, x_{i+2}\}$ de G tal que $x_j \in X_i$ e $x_{i+2} \notin X_i$ (i.e. u_{i+1} é um arco de valor mínimo entre os arcos ainda não escolhidos com precisamente uma extremidade em X_i).
- 4º) Se já foram escolhidos $n - 1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se 3º).

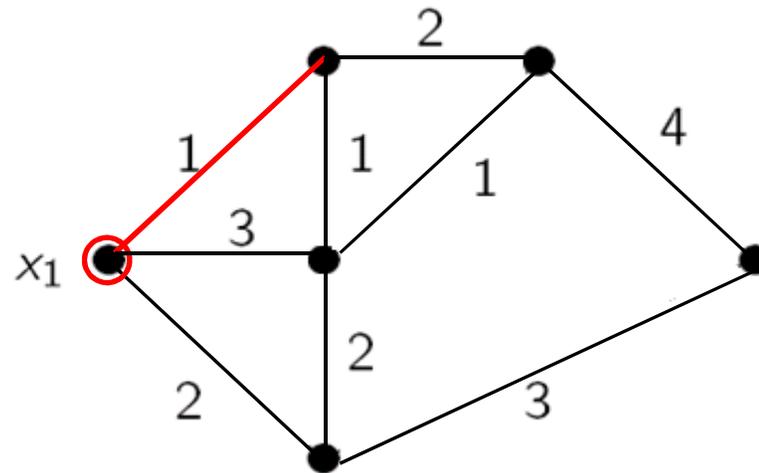
Exemplo 1: Com o grafo ponderado do exemplo anterior, **Algoritmo de Prim**



↑
Evolui pelo princípio do
vizinho mais próximo

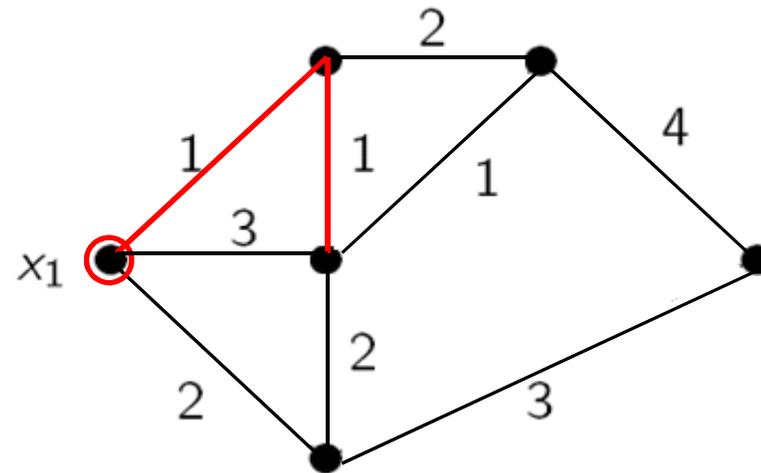
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 1: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



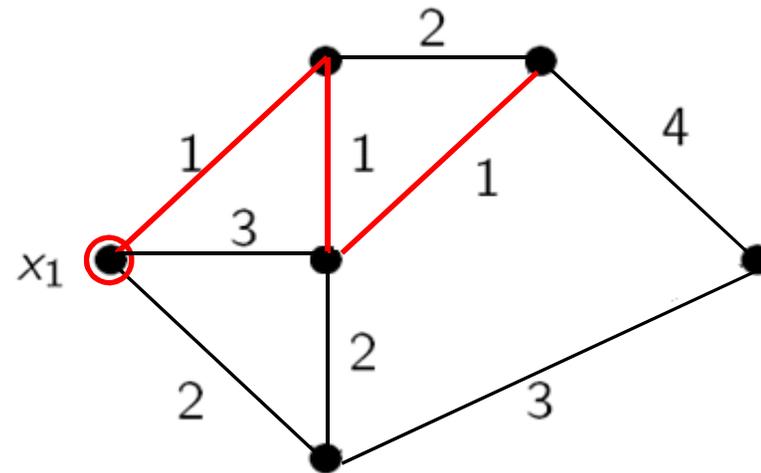
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 1: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



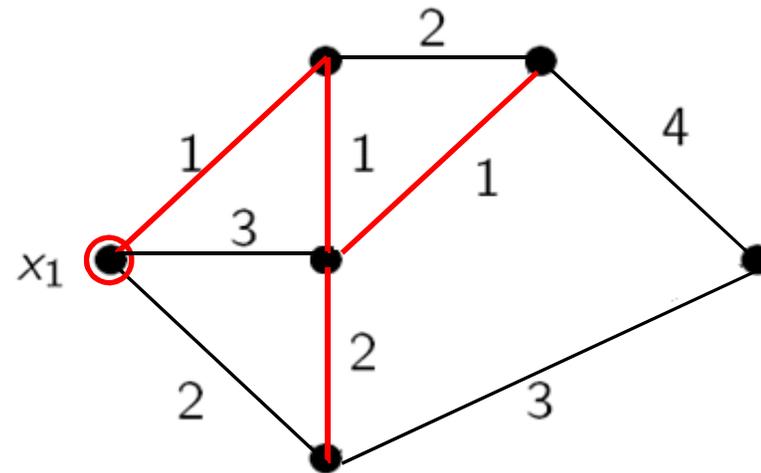
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 1: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



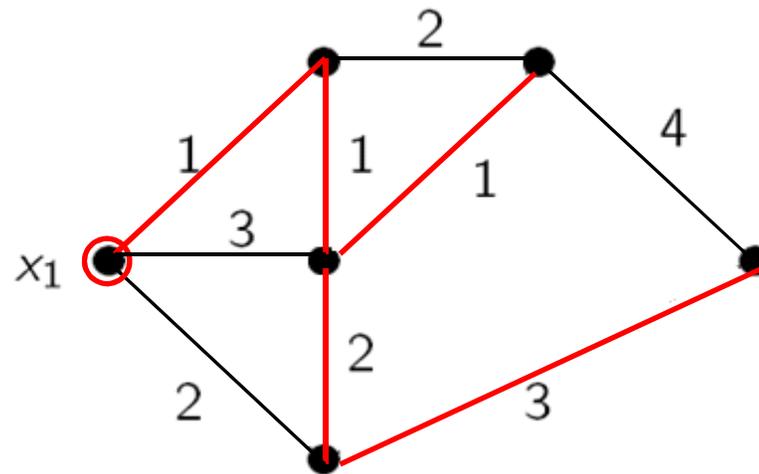
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 1: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 1: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



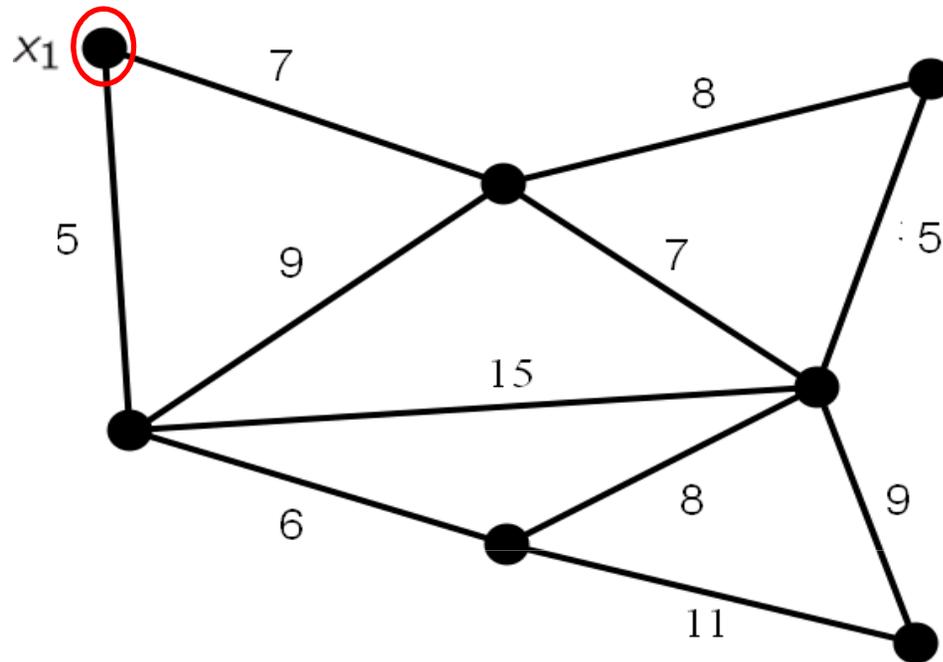
5 arcos escolhidos



Valor = 8

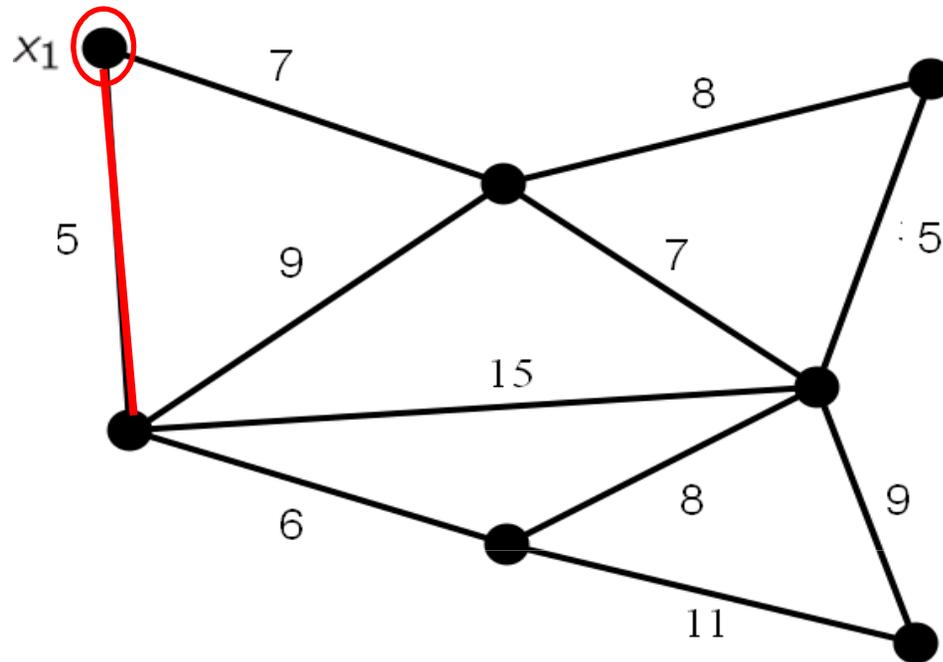
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



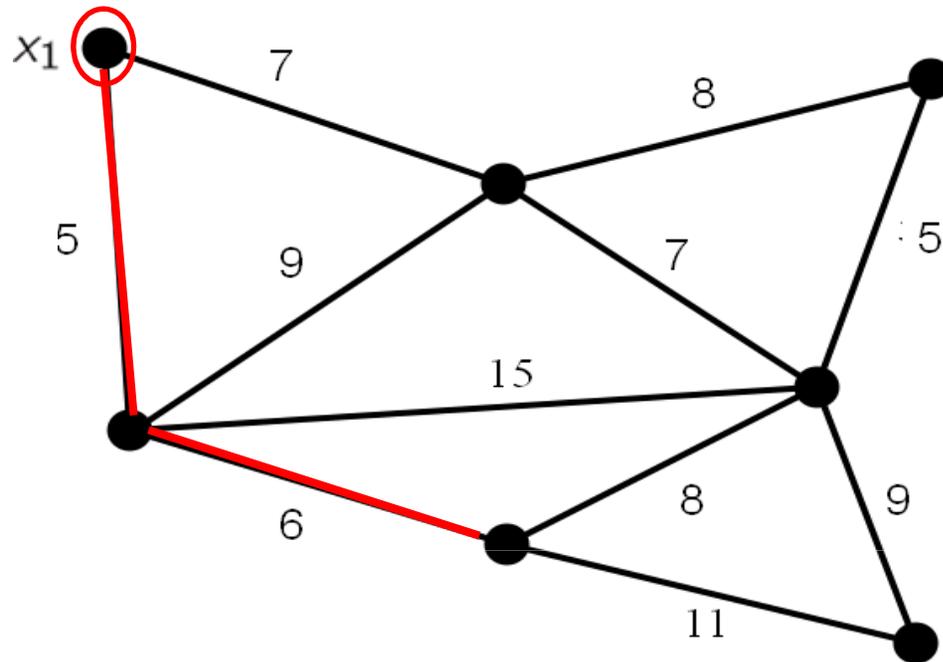
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



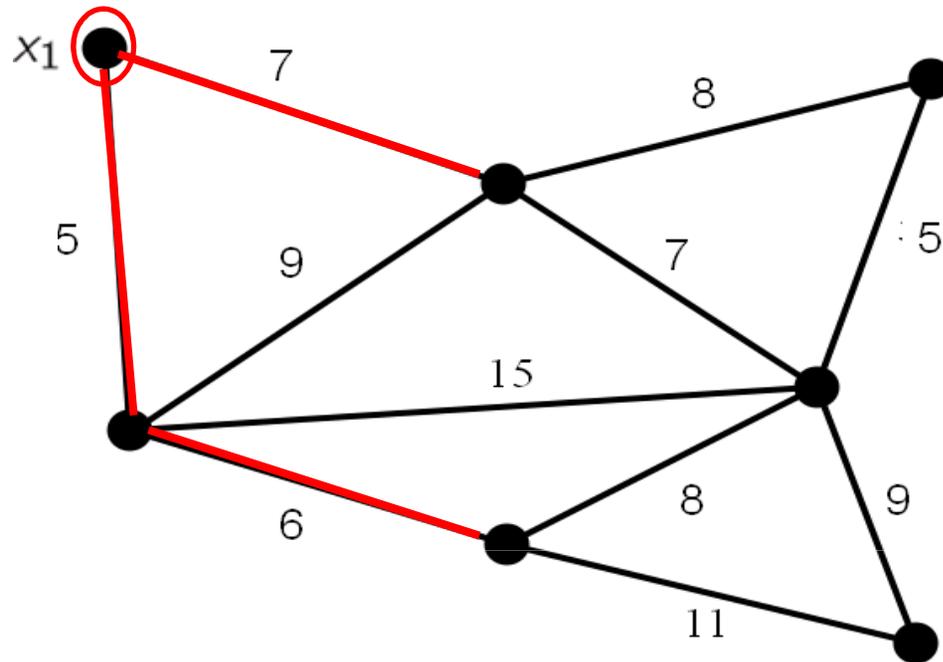
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



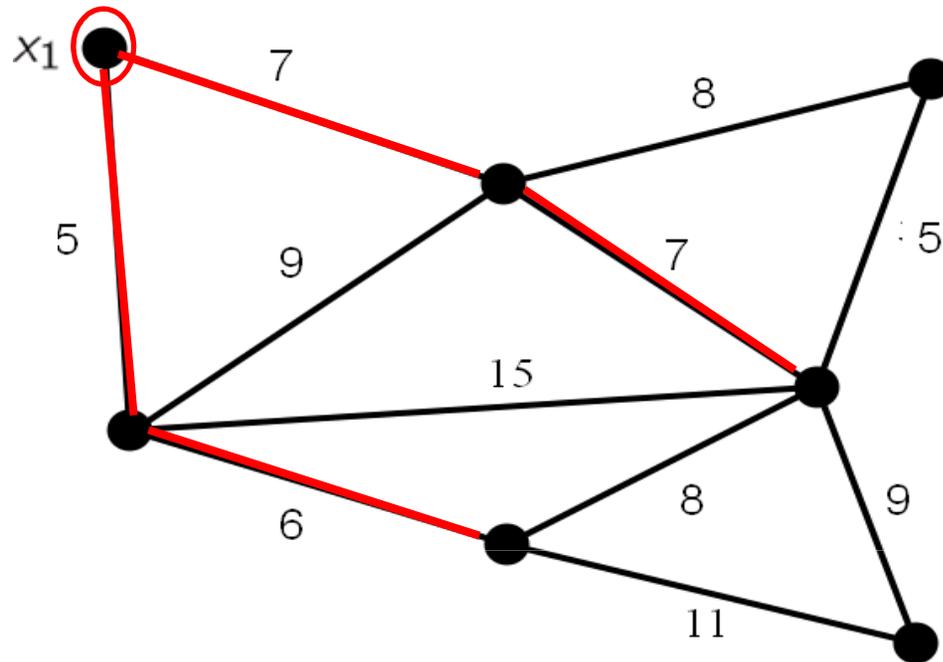
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



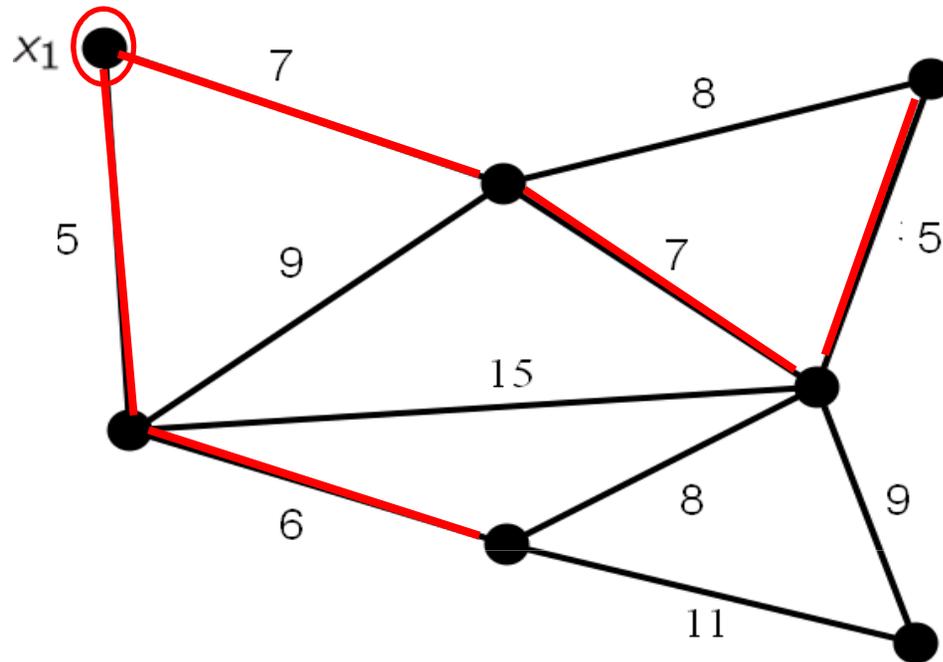
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



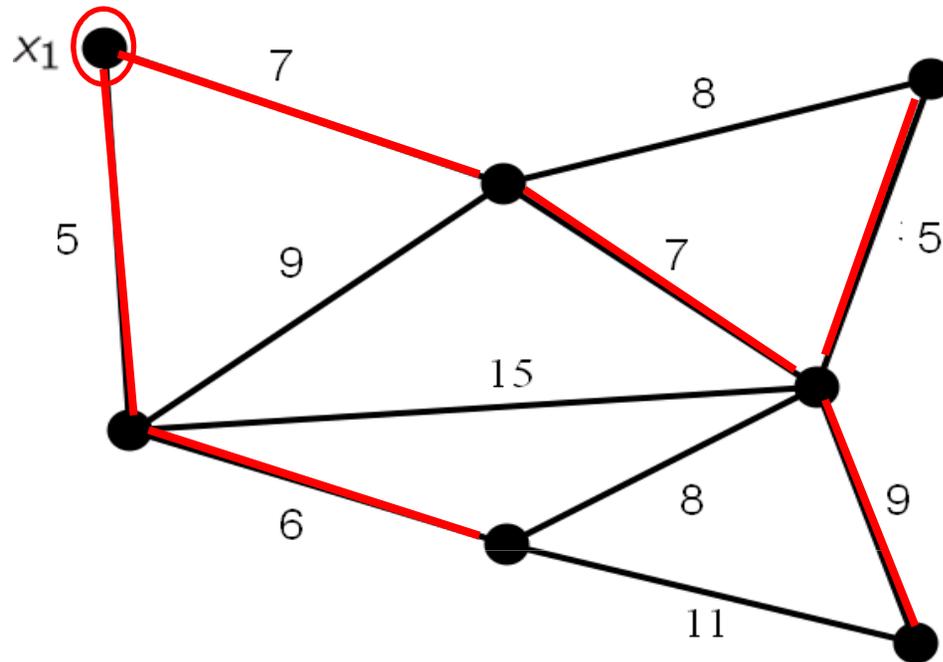
calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Exemplo 2: Consideremos o seguinte grafo ponderado



6 arcos escolhidos

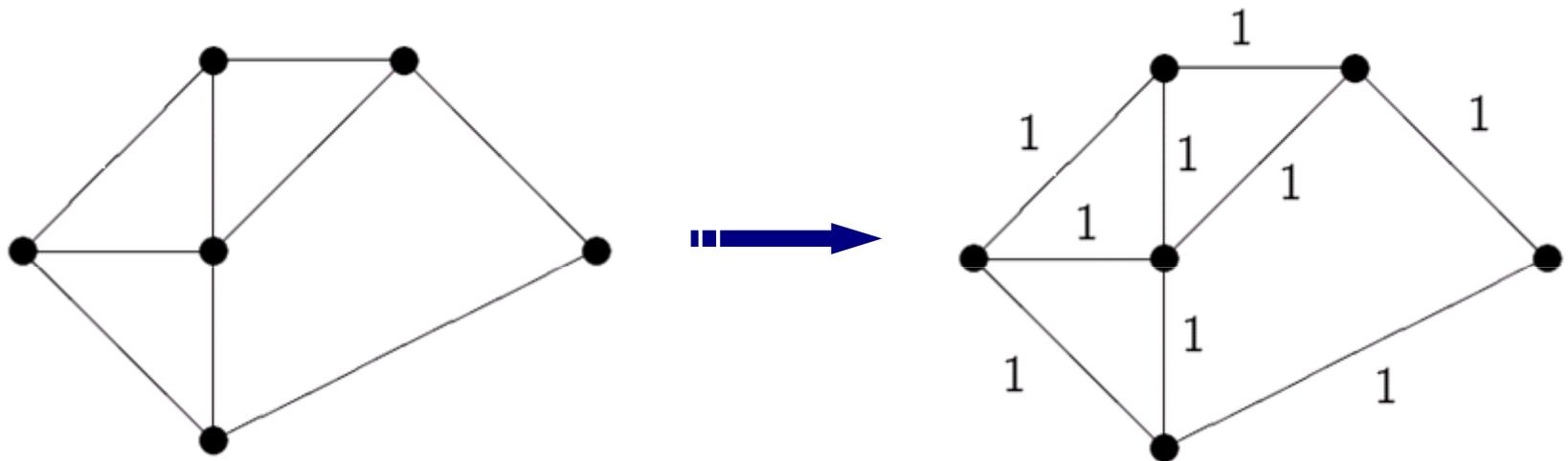


Valor = 39

calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice x_1 .

Observação:

- Se temos um grafo simples conexo e queremos uma sua árvore maximal, podemos usar qualquer um dos algoritmos anteriores bastando para isso, atribuir o mesmo valor a todos os arcos do grafo.



- Em geral, em termos de implementação em computador, o Algoritmo de Prim é mais rápido do que o de Kruskal.

Problema da cadeia mais curta

Sejam (G, v) um grafo conexo ponderado e x e y dois vértices de G . O problema da cadeia mais curta consiste em determinar uma cadeia $x - y$

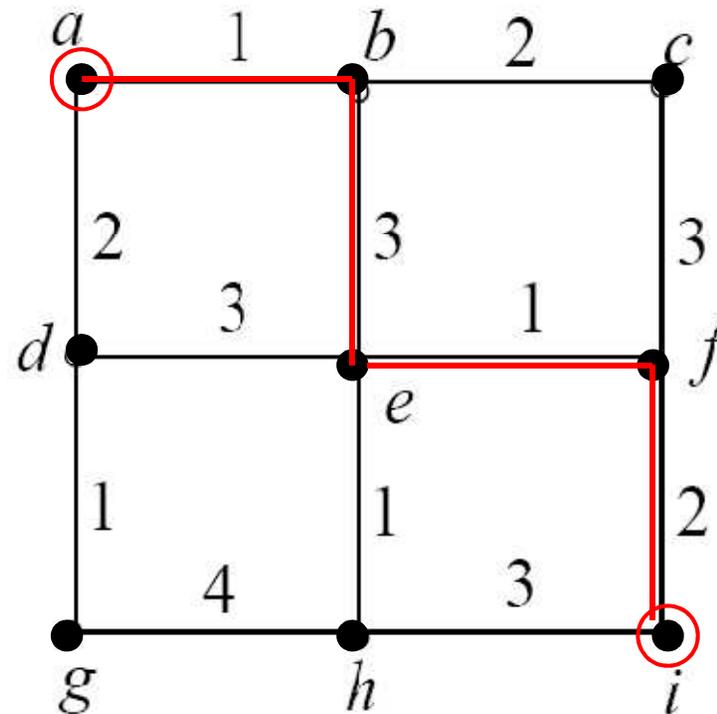
$$L : x = x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, u_k, x_k = y$$

por forma que o valor de L , i.e.

$$v(L) = \sum_{i=1}^k v(u_i)$$

(soma dos valores dos arcos de L), seja o mínimo possível. Neste caso, dizemos que L é uma **cadeia $x - y$** (de valor) **mínima**.

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo ponderado:



Uma breve análise permite-nos determinar facilmente que

$$L: a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow i$$

é uma cadeia mínima do vértice a para o vértice i (cujo valor é igual a 7).

No entanto, para grafos ponderados de ordens e tamanhos maiores, torna-se necessário aplicar um método sistemático para encontrar uma tal cadeia. Enunciamos a seguir um algoritmo para resolver este problema.

Algoritmo da Cadeia mais Curta (Dijkstra)

Seja (G, v) um grafo conexo ponderado, em que v toma valores não negativos, e sejam x e y dois vértices distintos de G . Designemos x por vértice inicial e y por vértice final.

PASSO 1.

- 1 Atribuir a x uma *etiqueta definitiva* igual a 0;
- 2 Atribuir a cada vértice x' adjacente a x uma *etiqueta temporária* igual ao valor do arco correspondente, i.e. igual a $v(\{x, x'\})$;
- 3 Sendo ε a menor das etiquetas temporárias acabadas de atribuir, para cada vértice z com etiqueta temporária igual a ε , atribuir a z uma etiqueta definitiva igual a ε .

PASSO 2.

Se y tem atribuída uma etiqueta definitiva, **TERMINAR**, caso contrário ir para o PASSO 3.

PASSO 3.

- 1 Para cada vértice z ao qual se acabou de atribuir uma etiqueta definitiva, $\bar{\varepsilon}$, e para cada vértice z' adjacente a z , atribuir a z' uma etiqueta temporária igual a

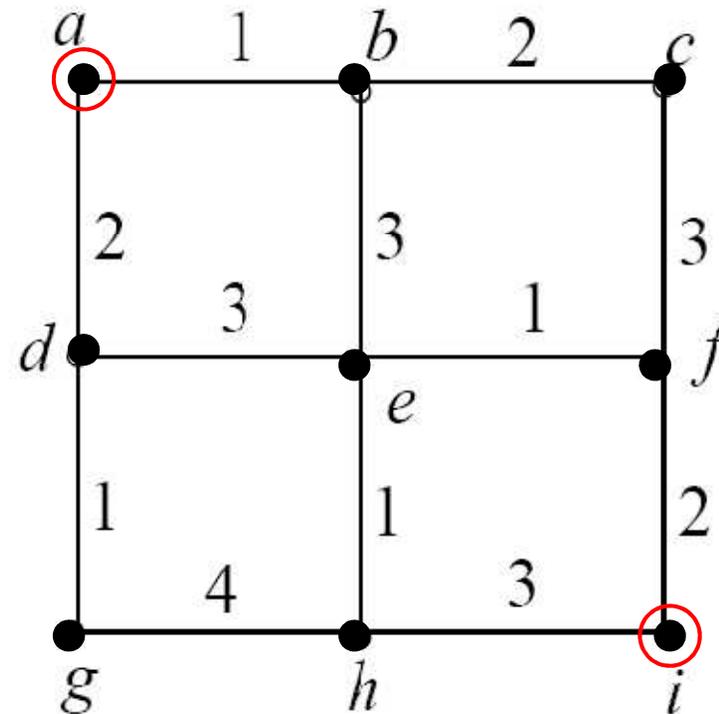
$$\bar{\varepsilon} + v(\{z, z'\}),$$

excepto se z' já possui uma etiqueta de valor inferior;

- 2 Sendo ε a menor das etiquetas temporárias de **todos** os vértices no grafo com etiquetas temporárias atribuídas (não só aos que acabámos de atribuir), para cada vértice z (no grafo) com etiqueta temporária igual a ε , atribuir a z uma etiqueta definitiva igual a ε ;
- 3 Ir para o PASSO 2.

Algoritmo da Cadeia mais Curta (Dijkstra)

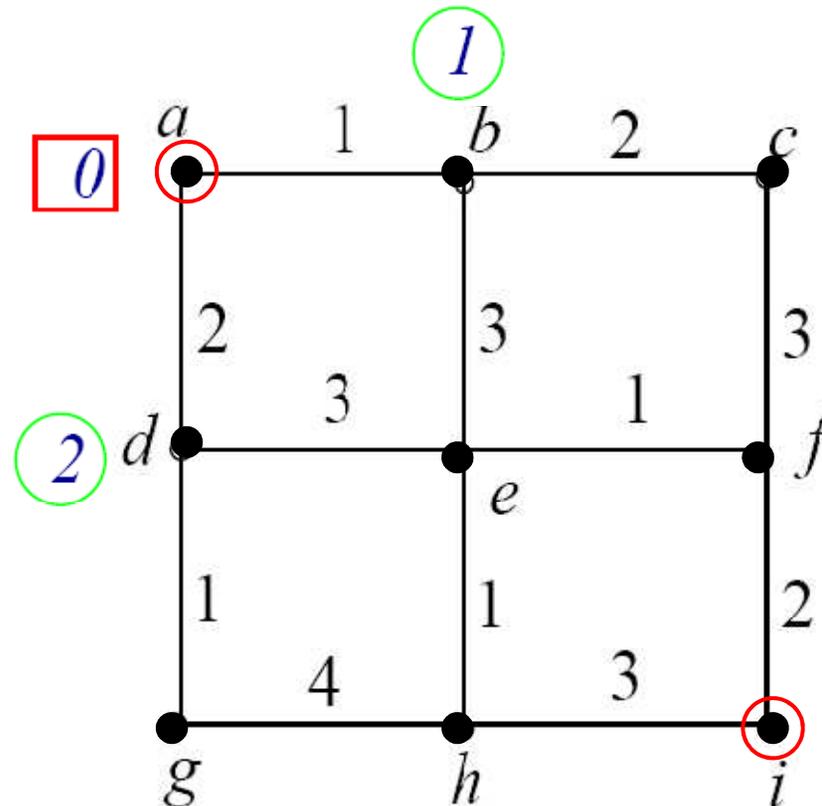
Exemplo 1: Consideremos o seguinte grafo ponderado:



Aplicamos o algoritmo anterior, tomando a como vértice inicial e i como vértice final.

Dado um vértice x , designemos por \bigcirc uma etiqueta temporária de x e por \square a etiqueta definitiva (se as possuir).

Algoritmo da Cadeia mais Curta (Dijkstra)

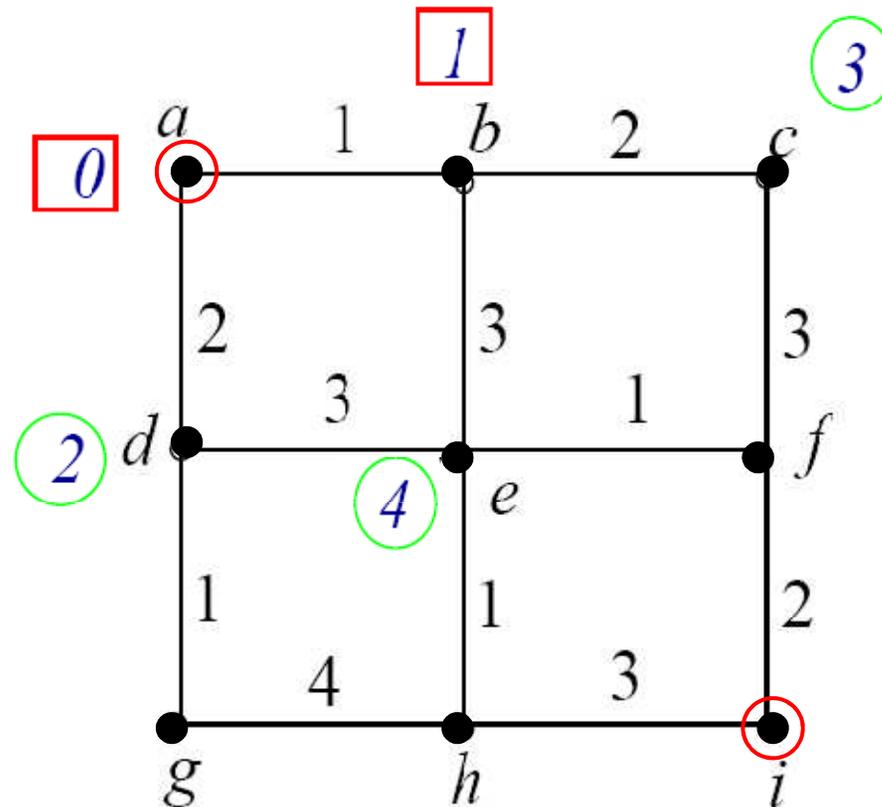


Dado um vértice x , designemos por $\varepsilon_T(x)$ uma etiqueta temporária de x e por $\varepsilon_D(x)$ a etiqueta definitiva (se as possuir).

Então:

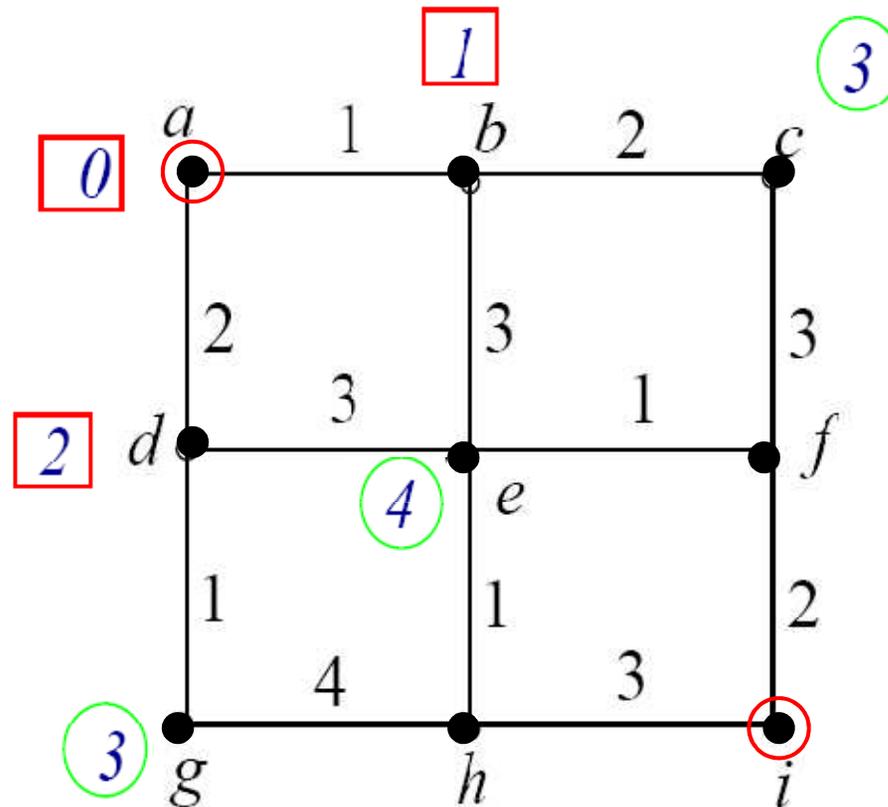
1. Atribuir $\varepsilon_D(a) = 0$, $\varepsilon_T(b) = 1$ e $\varepsilon_T(d) = 2$;

Algoritmo da Cadeia mais Curta (Dijkstra)

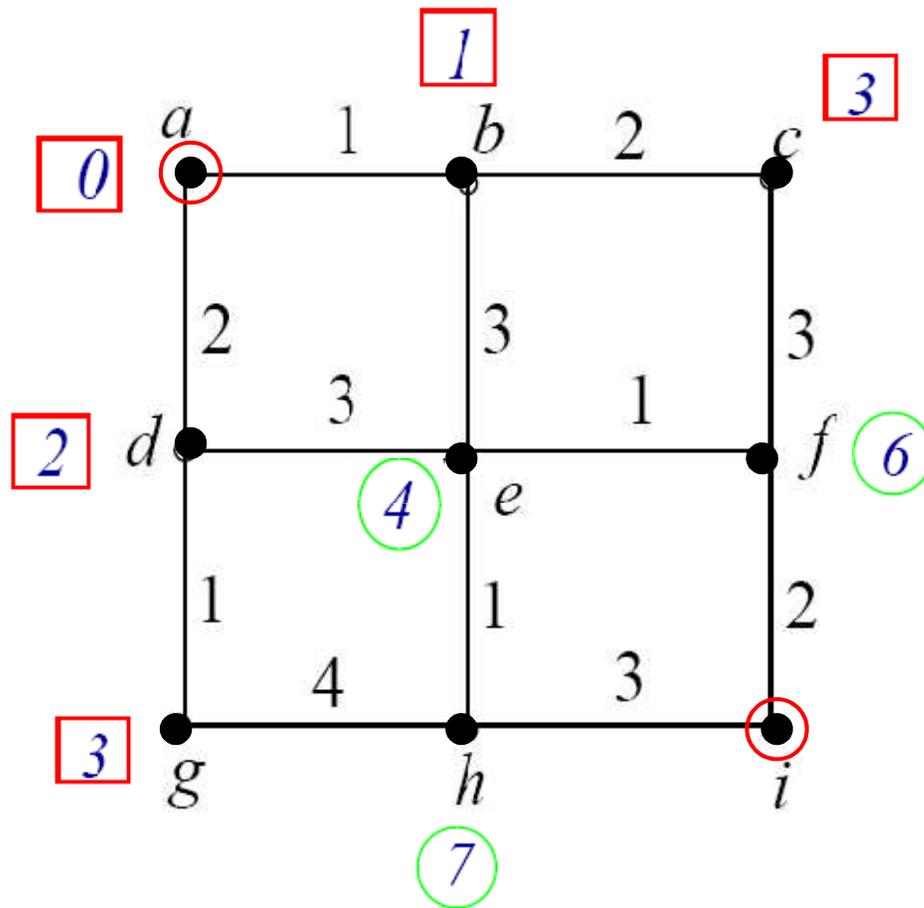


2. Atribuir $\varepsilon_D(b) = 1$, $\varepsilon_T(c) = 1 + 2 = 3$ e $\varepsilon_T(e) = 1 + 3 = 4$;

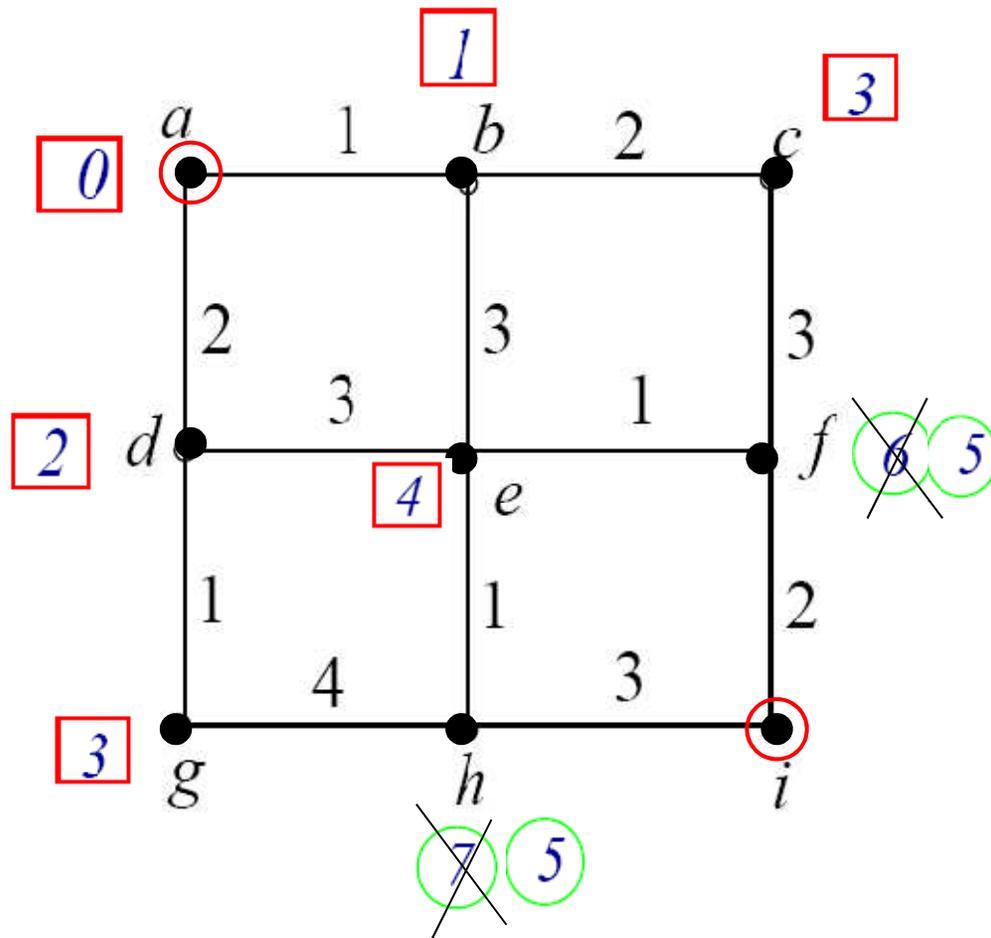
Algoritmo da Cadeia mais Curta (Dijkstra)



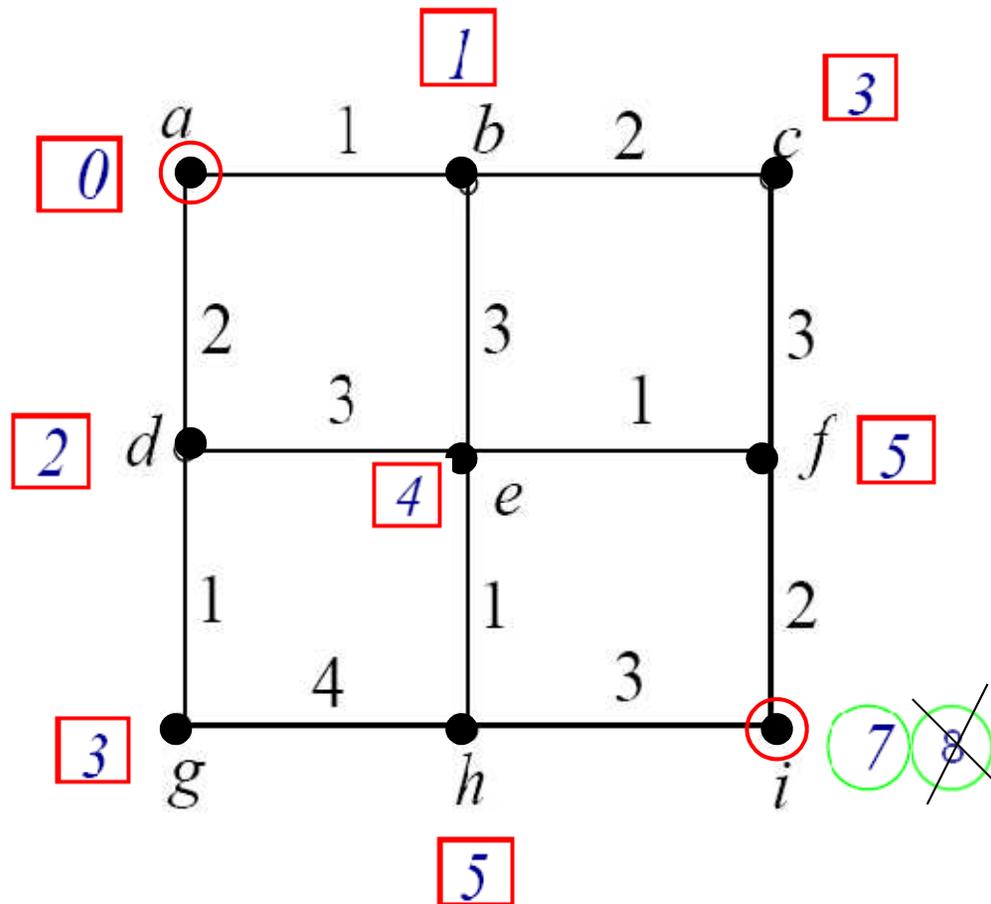
3. Atribuir $\varepsilon_D(d) = 2$, $\varepsilon_T(g) = 2 + 1 = 3$ e manter $\varepsilon_T(e) = 4 < 2 + 3$;



4. Atribuir $\varepsilon_D(c) = 3$, $\varepsilon_D(g) = 3$, $\varepsilon_T(f) = 3 + 3 = 6$ e $\varepsilon_T(h) = 3 + 4 = 7$;

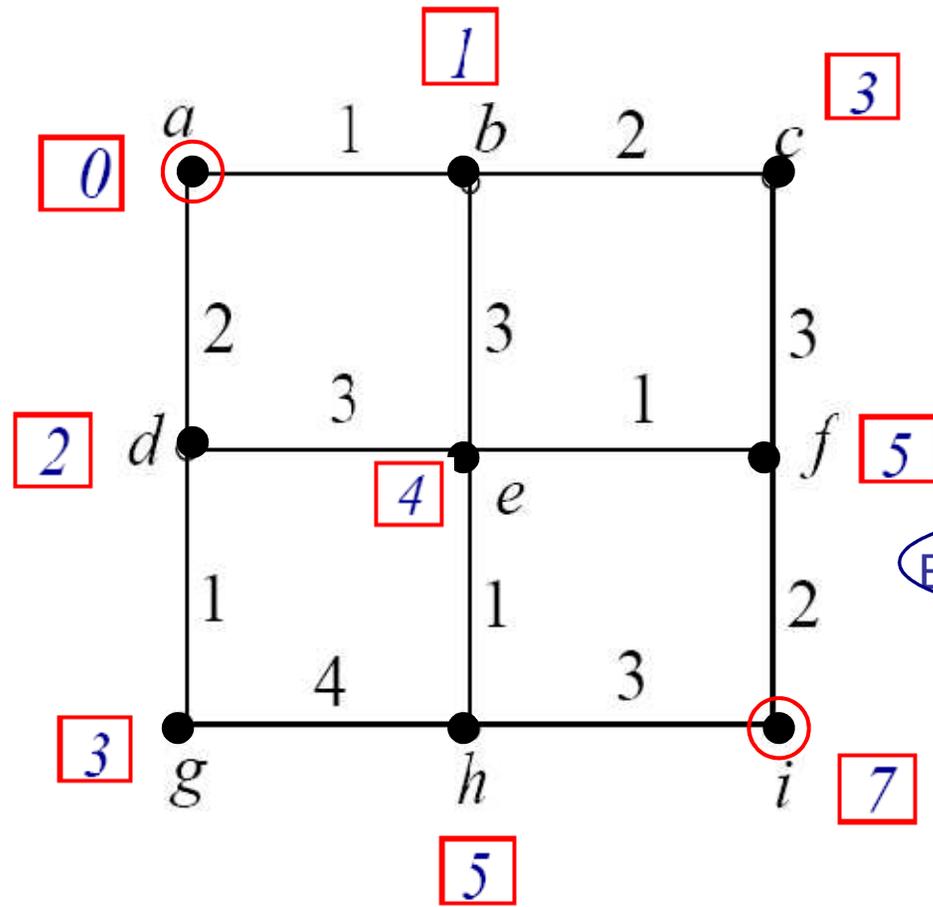


5. Atribuir $\varepsilon_D(e) = 4$, $\varepsilon_T(f) = 4 + 1 = 5 < 6$ e $\varepsilon_T(h) = 4 + 1 = 5 < 7$;



6. Atribuir $\varepsilon_D(f) = 5$, $\varepsilon_D(h) = 5$ e $\varepsilon_T(i) = 5 + 2 = 7 < 5 + 3$;

7. Atribuir $\varepsilon_D(i) = 7$ e terminar.



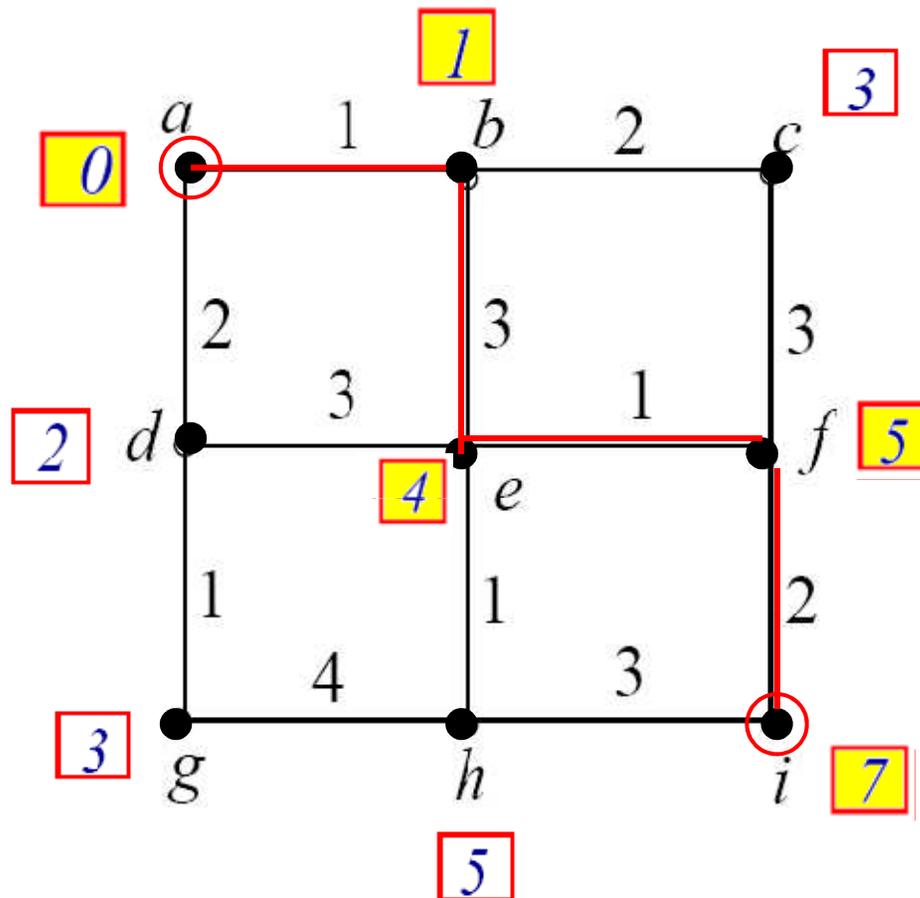
Etiqueta definitiva em i



Valor da etiqueta definitiva de x_i

No final procurar uma sequência de vértices $x_0 = a, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = i$, todos com etiquetas definitivas tais que

$$\{x_{i-1}, x_i\} \in \mathcal{U} \text{ e } \varepsilon(x_i) - \varepsilon(x_{i-1}) = v(\{x_{i-1}, x_i\}).$$



Uma cadeia $a-i$ mínima é $a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow i$

Proposição 2.3.7:

Sejam (G, v) , com $G = (X, \mathcal{U})$, um grafo conexo ponderado e x e y dois vértices distintos de G .

1. Se $|X| = n$ então o Algoritmo da Cadeia mais Curta, tomando x e y como vértices inicial e final respectivamente, termina ao fim de repetir o PASSO 3 no máximo $n - 2$ vezes;

2. Consideremos as etiquetas dos vértices de G no fim de se aplicar o Algoritmo da Cadeia mais Curta, tomando x e y como vértices inicial e final respectivamente.

Seja z um vértice com etiqueta definitiva ε (em particular, $z = y$) e sejam $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = z$ vértices com etiquetas definitivas

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x_0) = 0, \quad \varepsilon(x_1), \quad \dots, \quad \varepsilon(x_{k-1}), \quad \varepsilon(x_k) = \varepsilon(z) = \varepsilon$$

tais que, para $i \in \{1, \dots, k\}$,

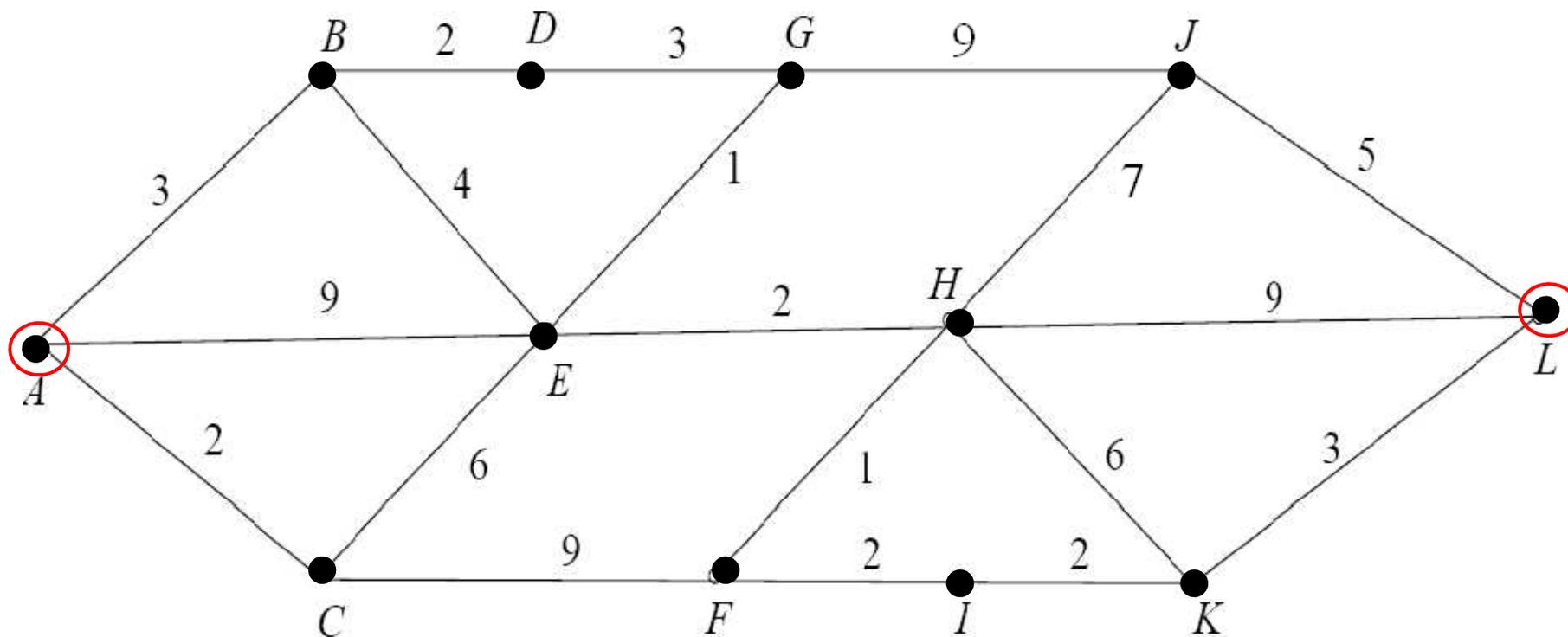
$$\{x_{i-1}, x_i\} \in \mathcal{U} \text{ e } \varepsilon(x_i) - \varepsilon(x_{i-1}) = v(\{x_{i-1}, x_i\}).$$

Então

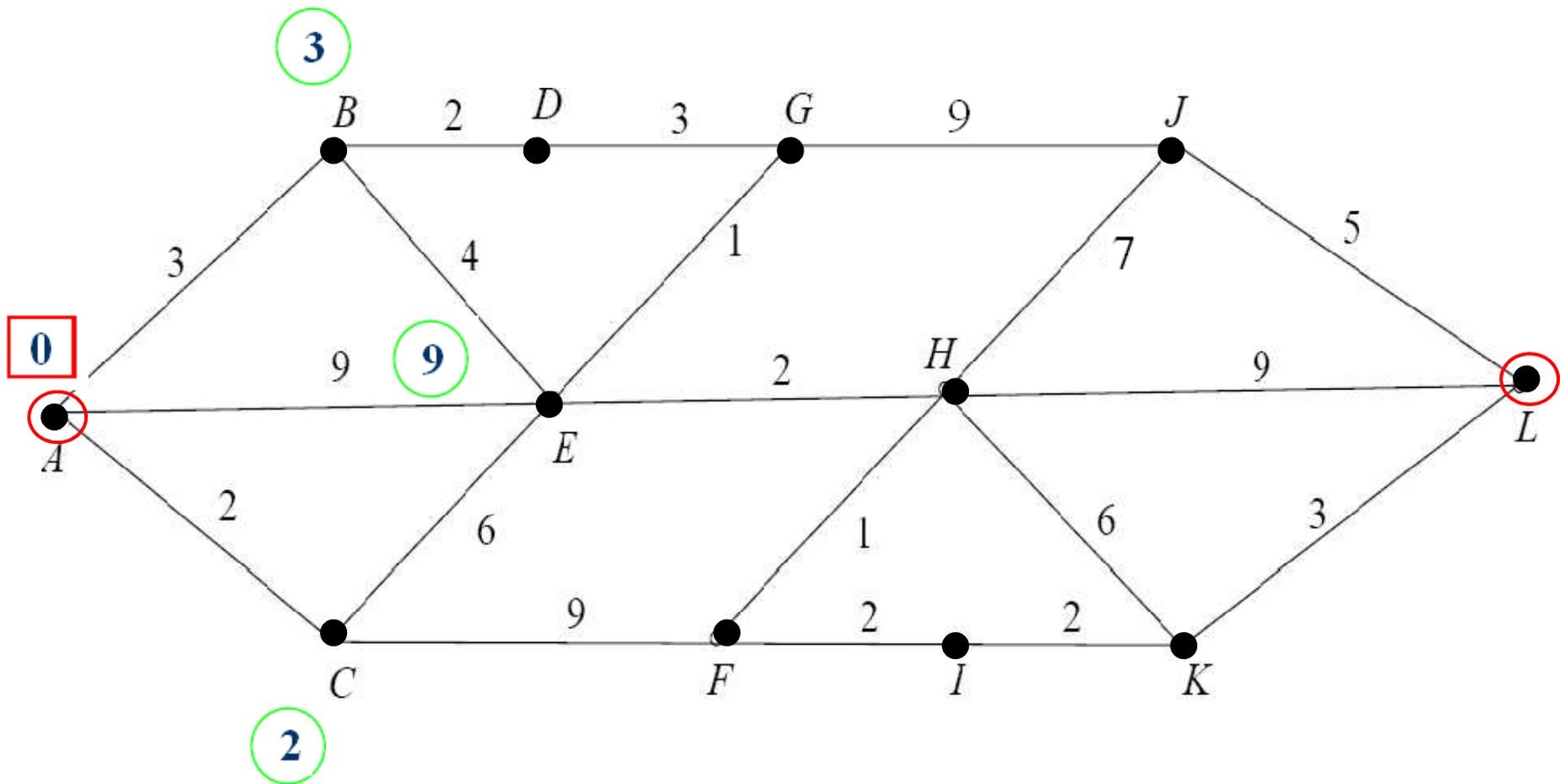
$$x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{k-1} \rightarrow x_k = z$$

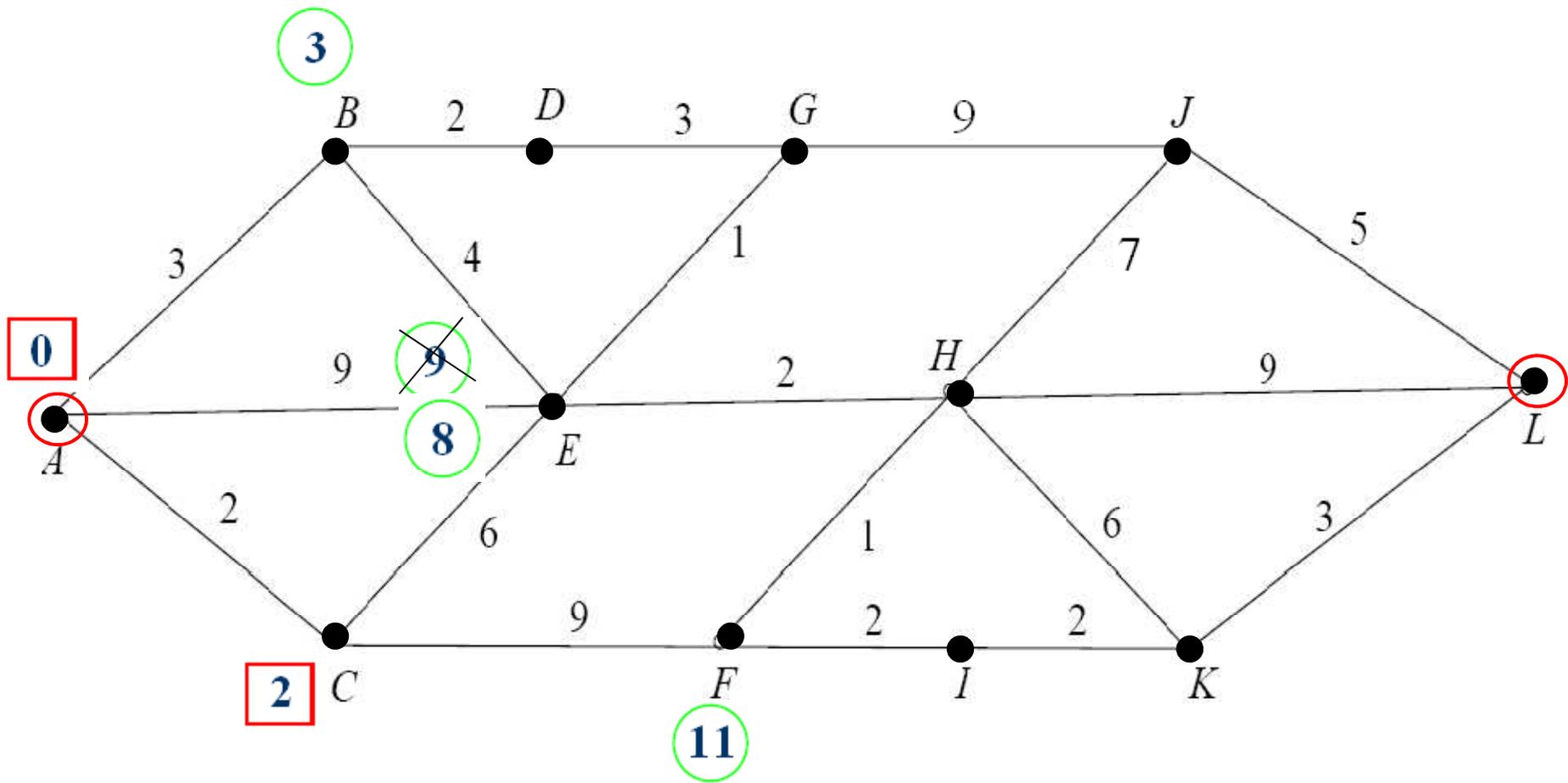
é uma cadeia $x - z$ mínima de valor igual a ε .

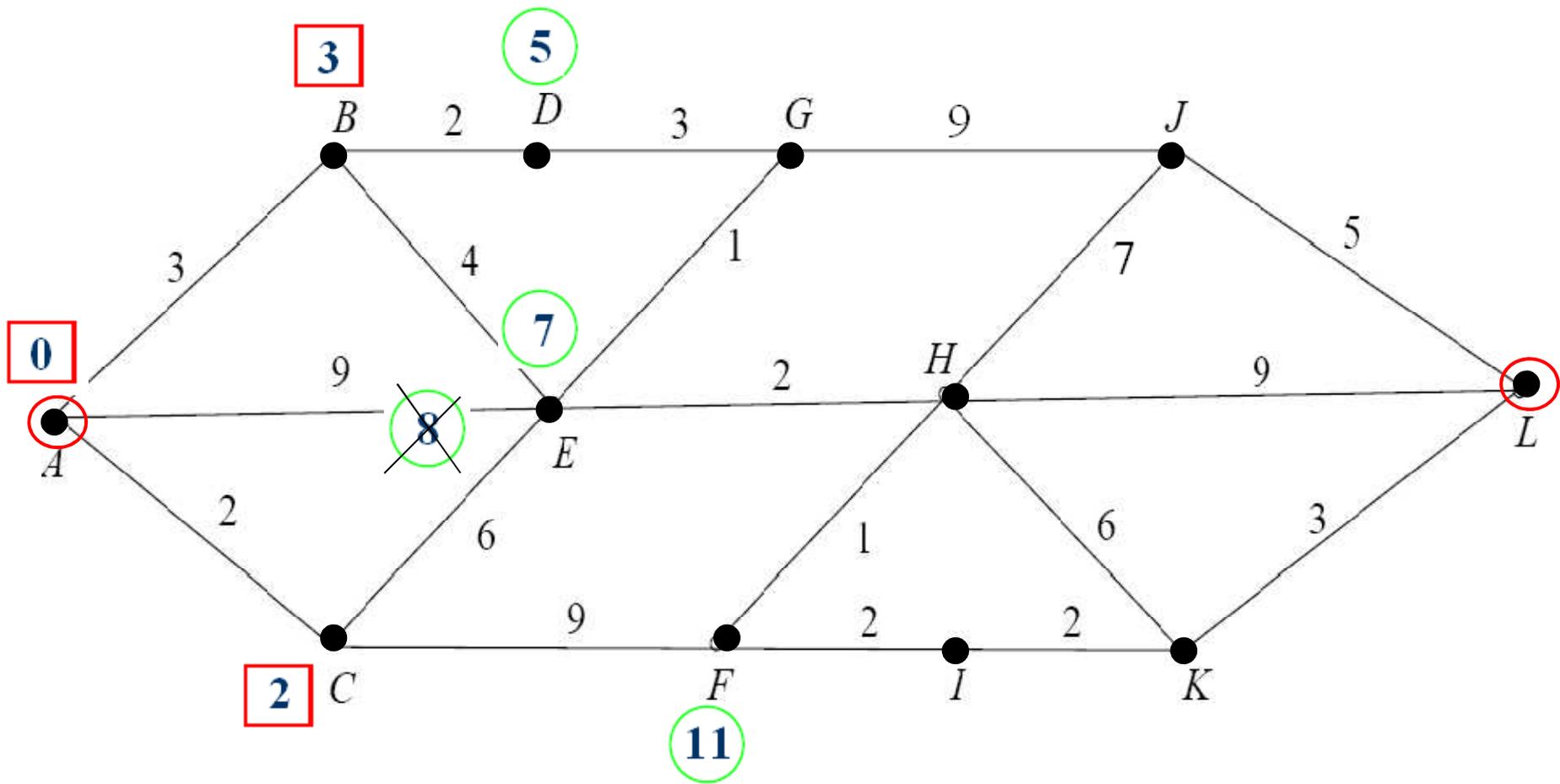
Exemplo 2: Considere o seguinte grafo ponderado:

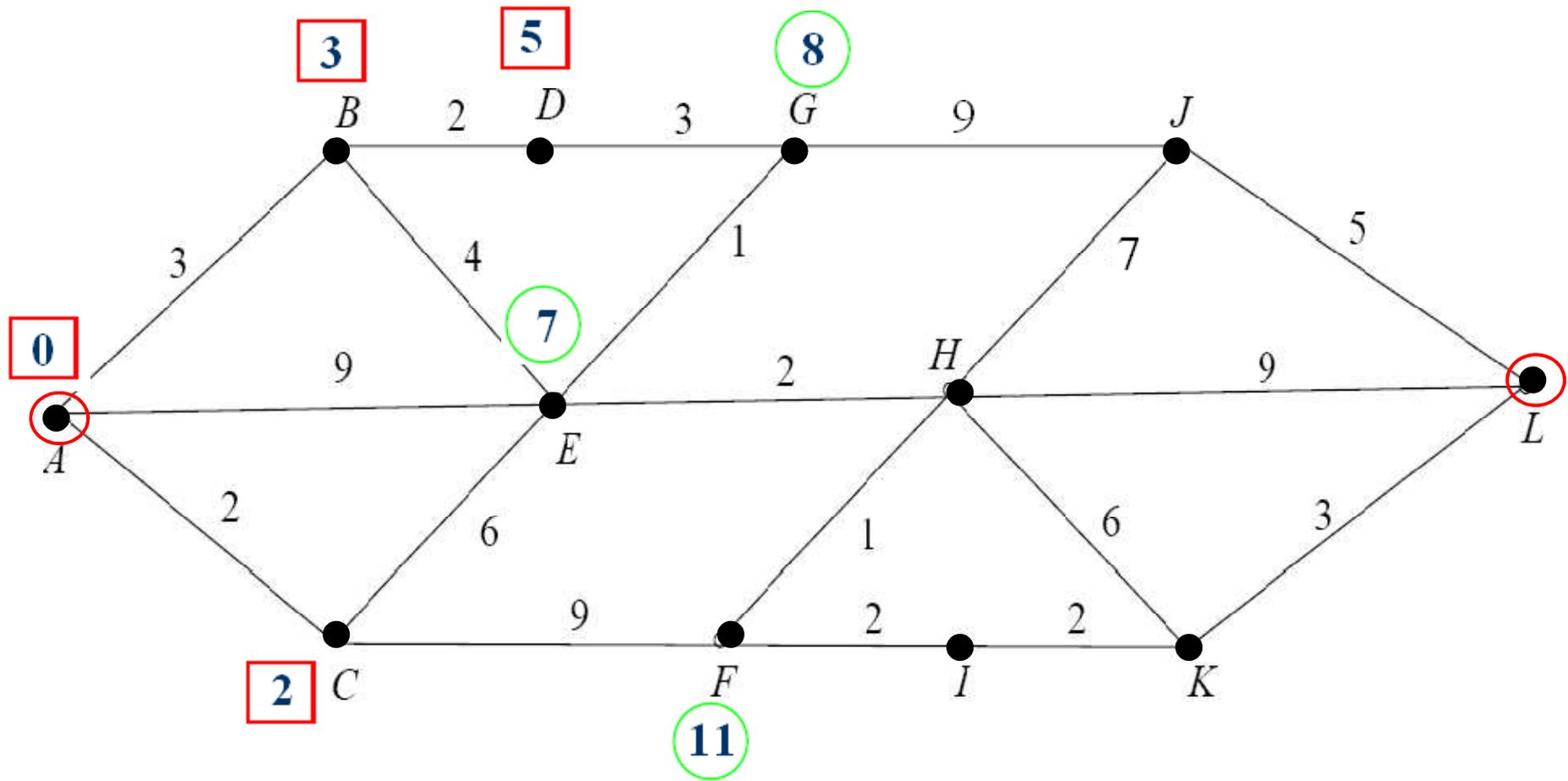


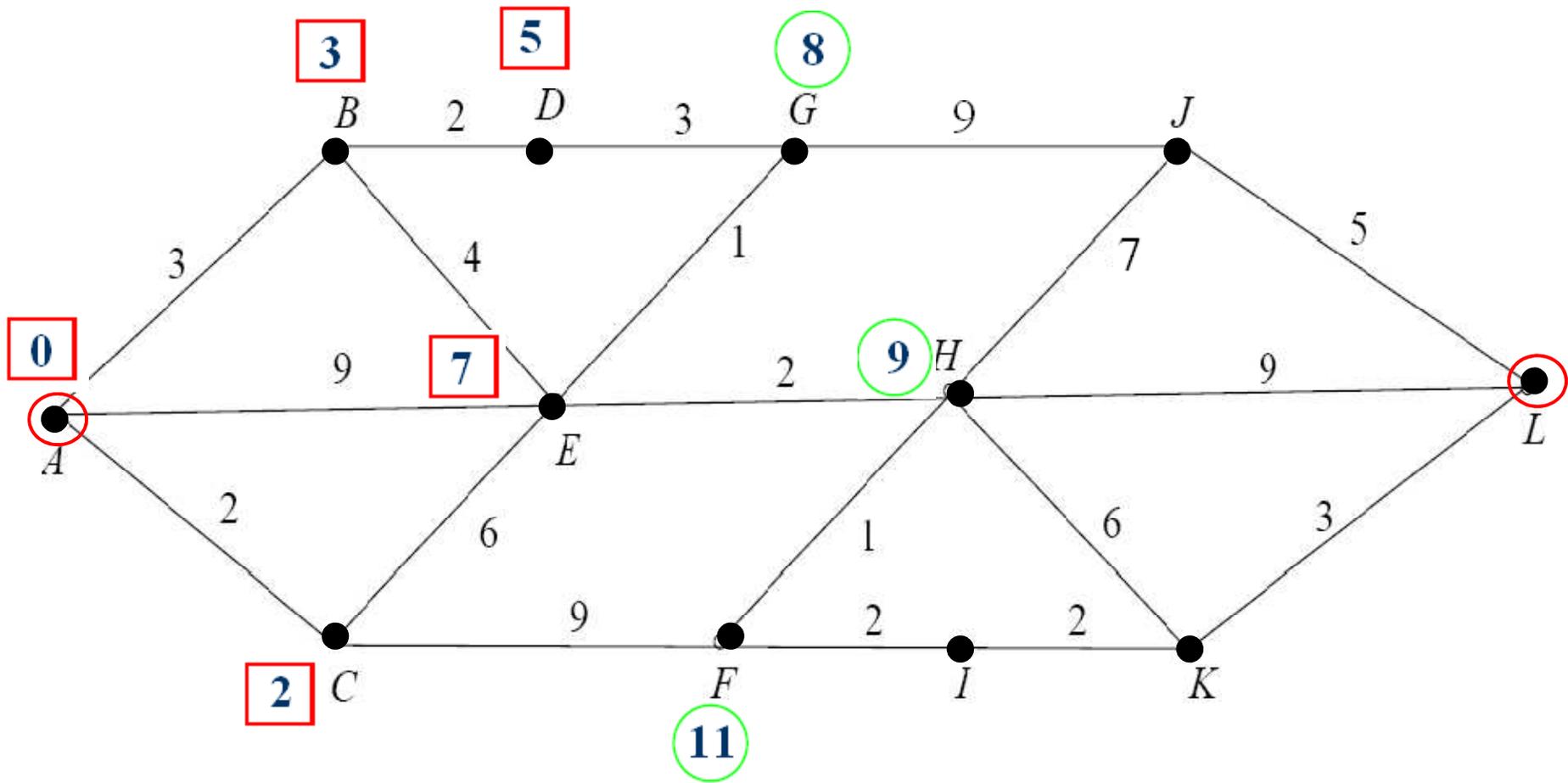
Aplique o Algoritmo da Cadeia mais Curta para obter
uma cadeia $A - L$ mínima

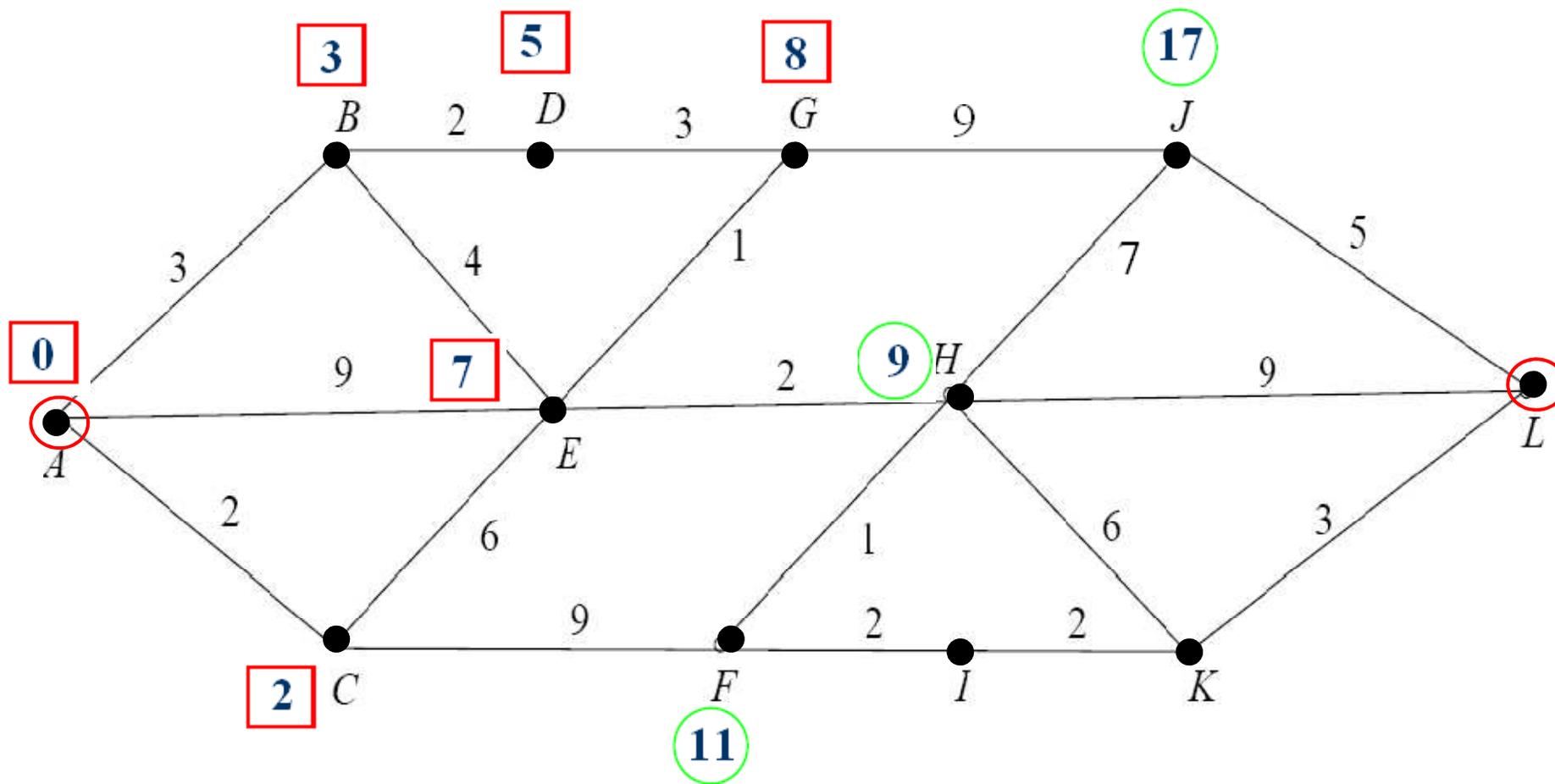


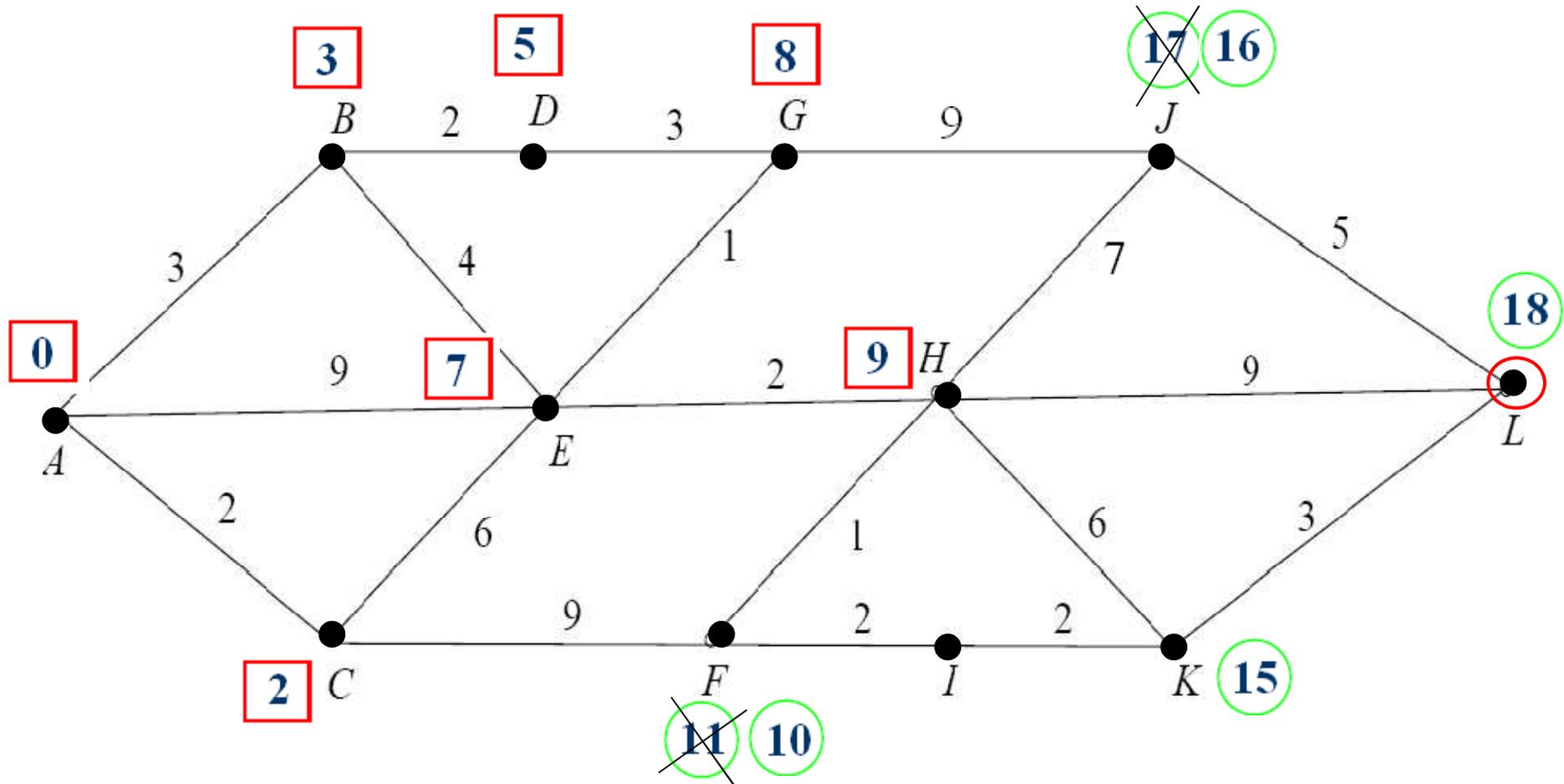


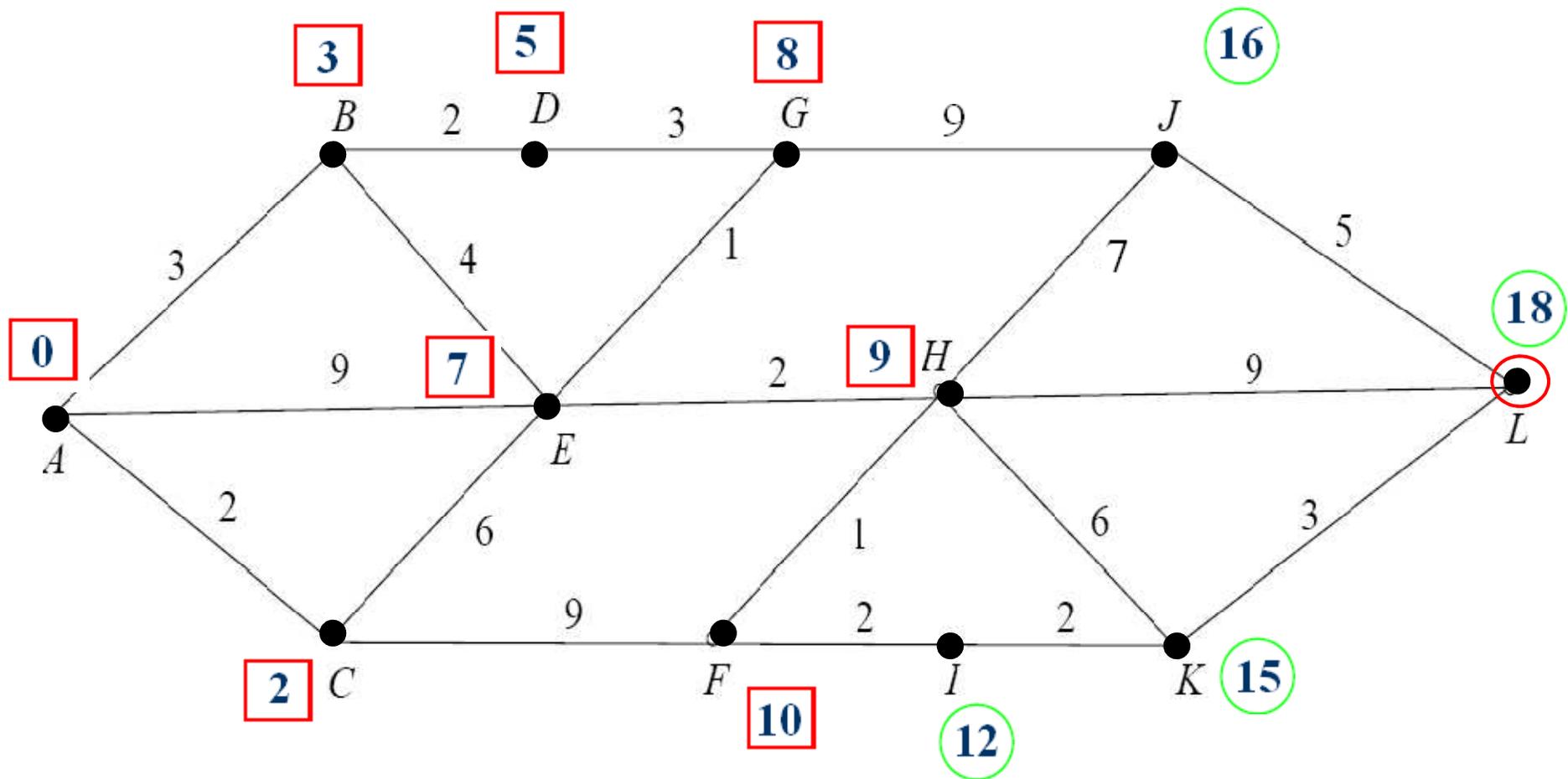


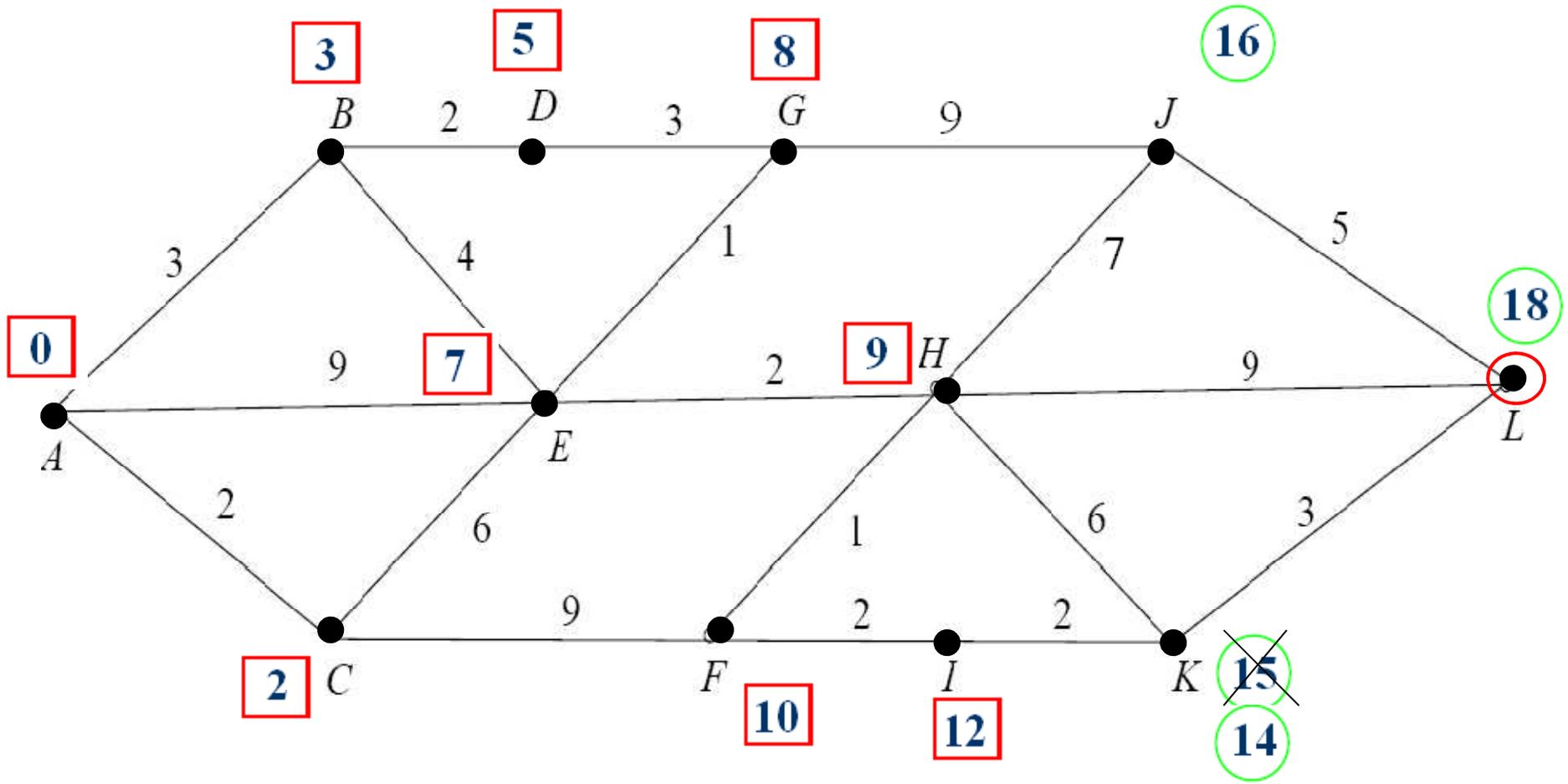


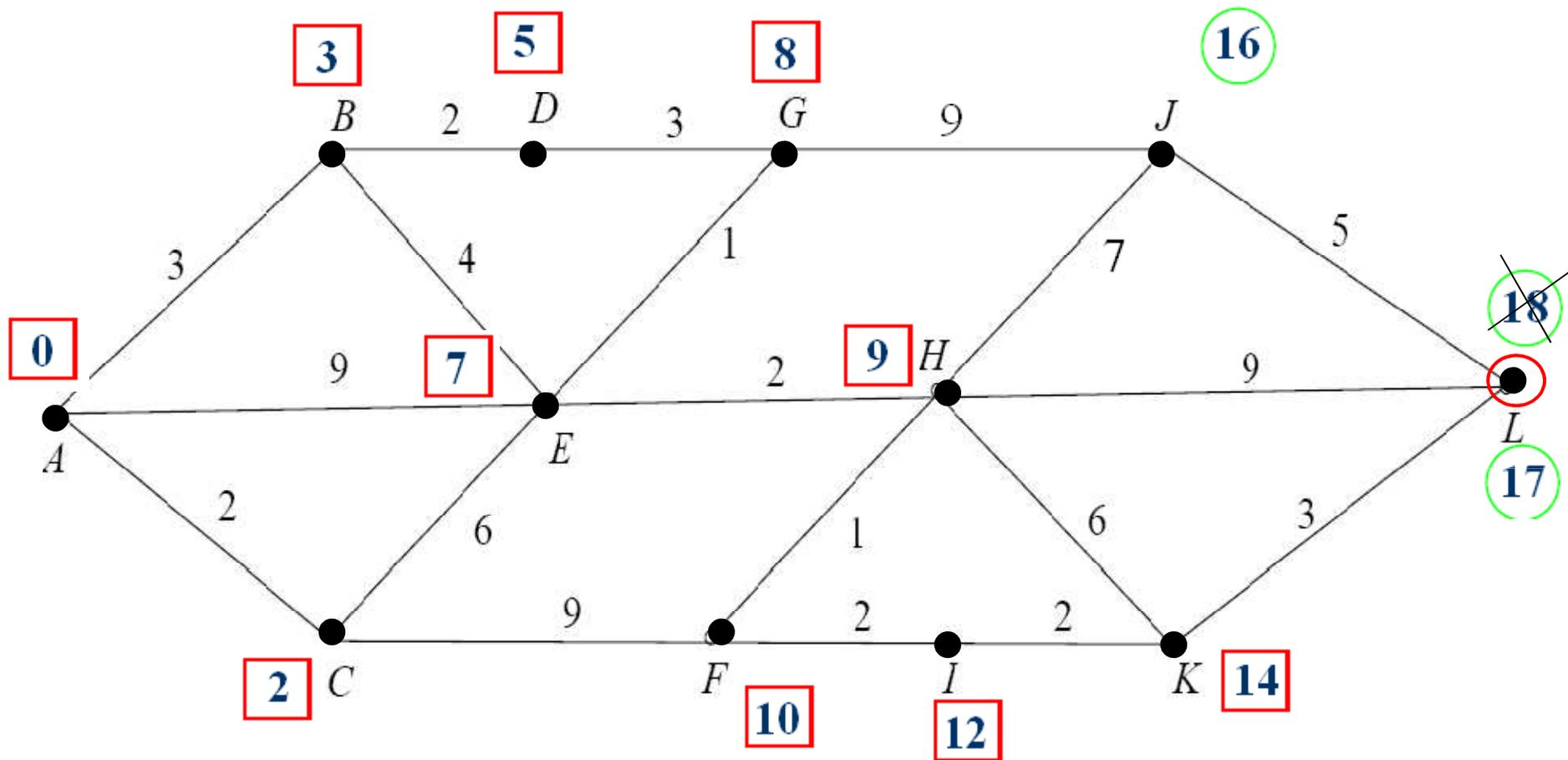


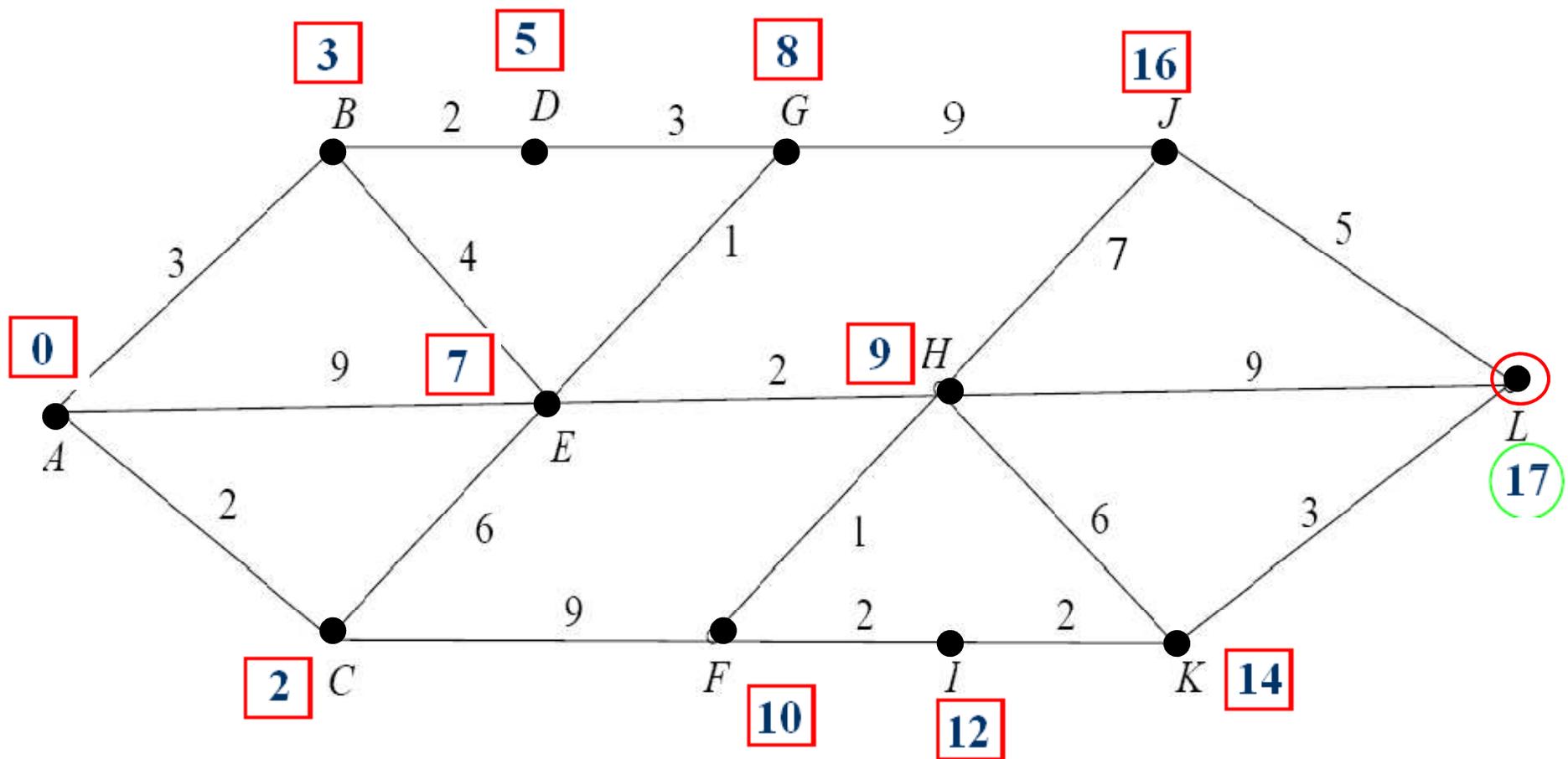


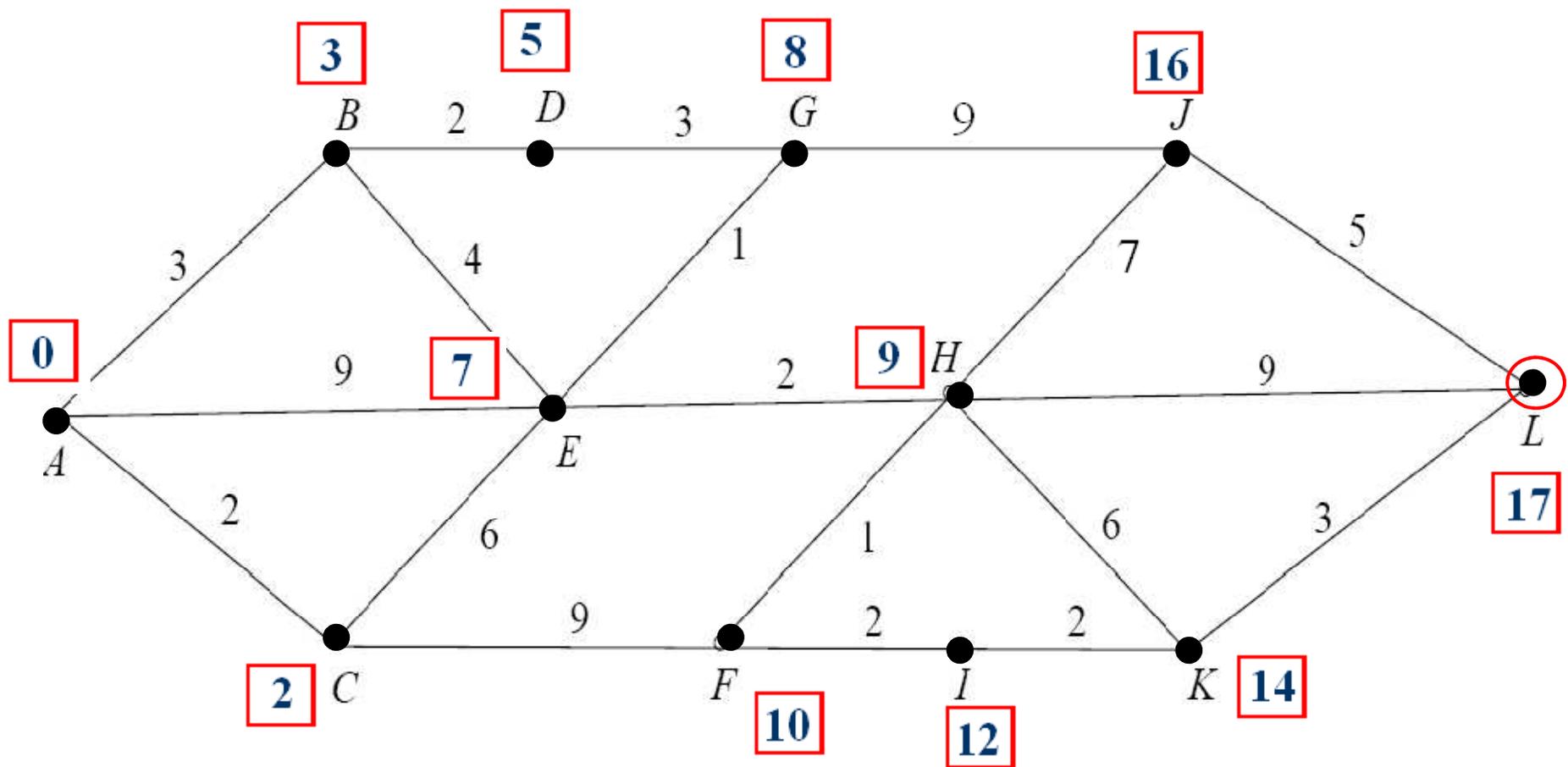




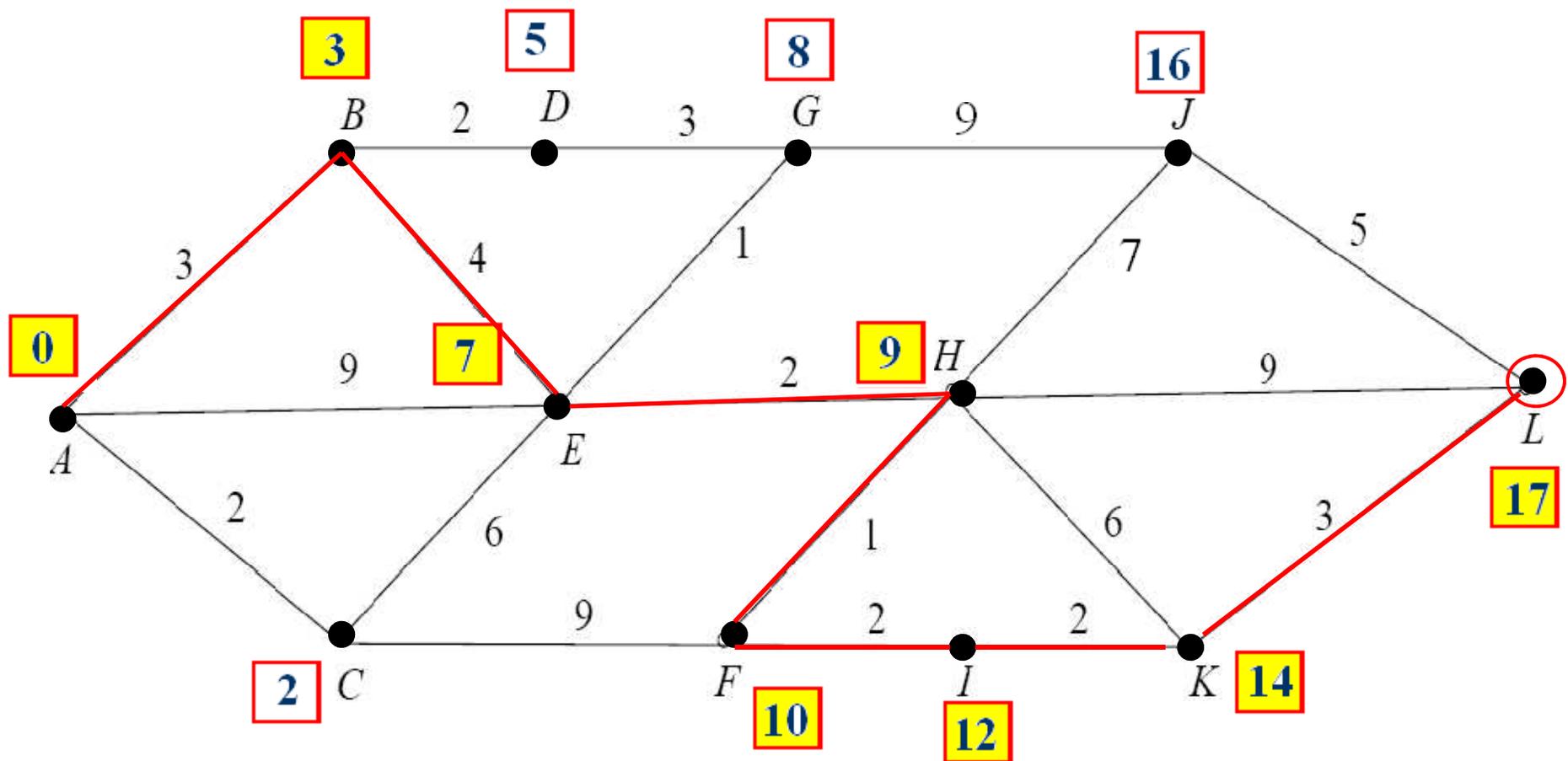








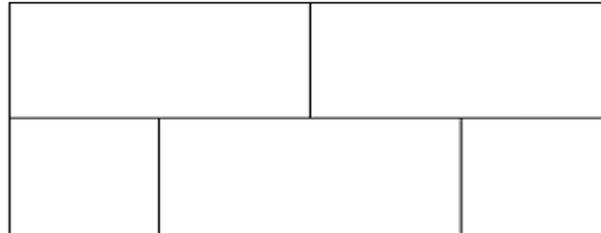
Uma cadeia A-L mínima tem então valor 17.



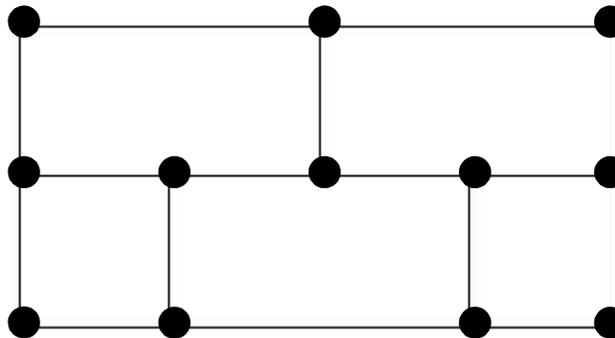
Uma cadeia A-L mínima de valor 17 é $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow K \rightarrow L$.

2.4 Grafos Eulerianos

A figura



pode ser desenhada através de traços contínuos sem nunca passar por cima de um traço já feito?

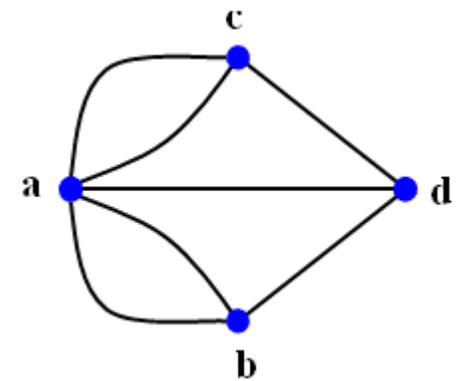
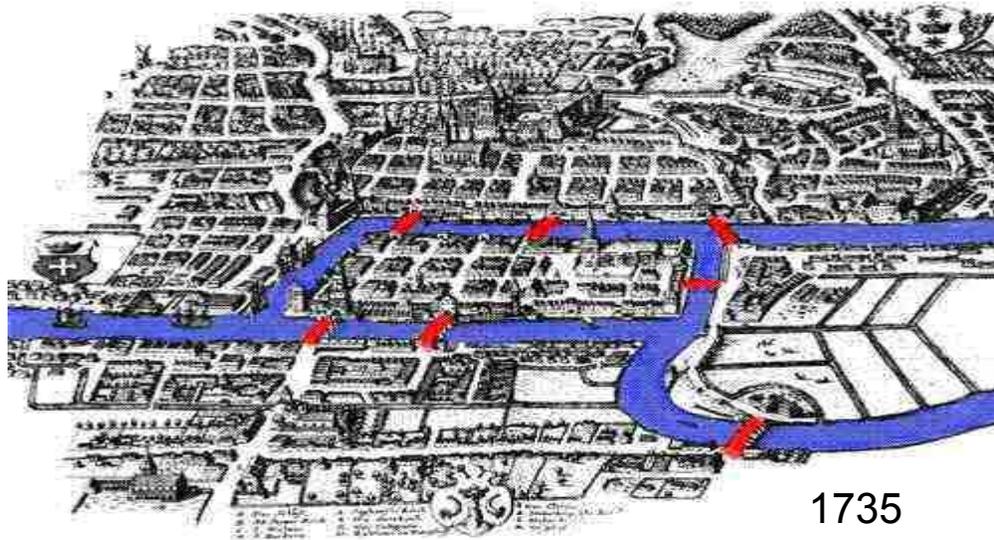


Será possível percorrer todos os arcos do grafo sem os repetir?

Problema da cadeia ou do ciclo de Euler



Leonhard Paul Euler (1707- 1783)



Definição 2.4.1:

Seja $G = (X, U)$ um multigrafo. Chamamos *cadeia euleriana* a uma cadeia simples contendo todos os arcos de G e *ciclo euleriano* a um ciclo contendo todos os arcos de G .

Se G é um multigrafo orientado, substituindo na definição “cadeia” por “caminho” obtêm-se as correspondentes definições de *caminho euleriano* e de *circuito euleriano*.

Definição 2.4.2:

Um multigrafo diz-se *euleriano* se admite um ciclo euleriano e *semi-euleriano* se admite uma cadeia euleriana aberta.

Observação:

1. Não existem multigrafos simultaneamente eulerianos e semi-eulerianos.

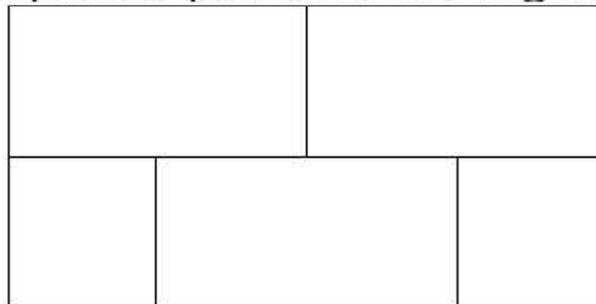
Teorema 2.4.3:

- (i) *Um multigrafo conexo G , com $n \geq 2$ vértices, tem um ciclo euleriano se, e só se, todo o vértice de G tem grau par.*
- (ii) *Um multigrafo conexo G , com $n \geq 2$ vértices, tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$ se, e só se, x e y são os únicos vértices de G com grau ímpar.*

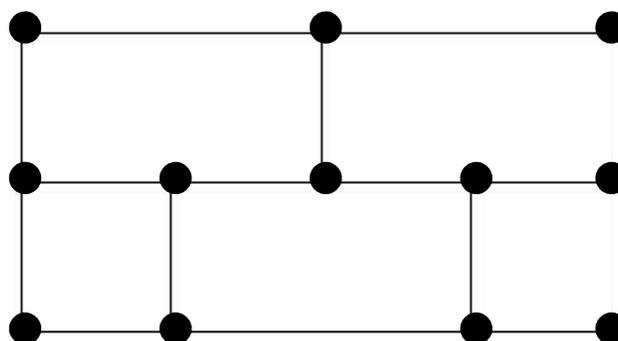
Dem...

Teorema de Euler

- Regressando à pergunta que foi feita no início deste capítulo: Será possível desenhar a seguinte figura sem passar por cima de segmentos?



Considere o grafo associado em baixo:

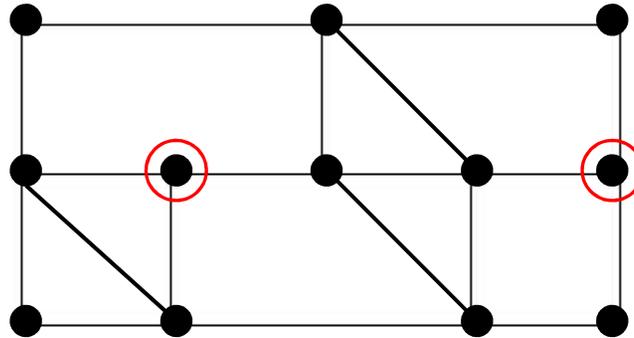


Grafo não euleriano
não semi-euleriano



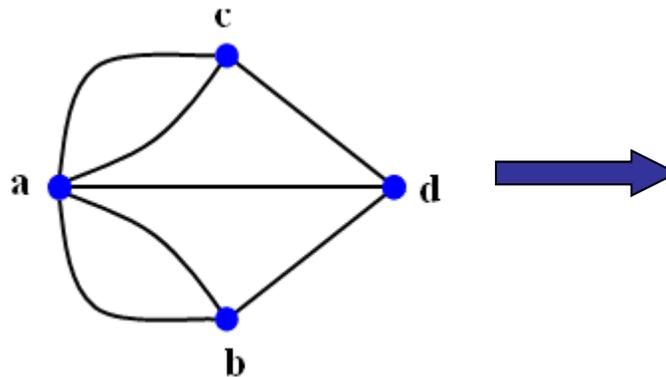
Grafo de **ordem** 12. Possui **8** vértices de **grau ímpar** e **4** de **grau par**.

Adicionando ao grafo anterior os três arcos em baixo,



obtemos um grafo onde todos os vértices têm grau par excepto dois de grau ímpar. Assim, admite uma cadeia euleriana cujos extremos são os vértices de grau ímpar.

- Quanto ao grafo associado às pontes de Königsberg...



Grafo não euleriano
não semi-euleriano

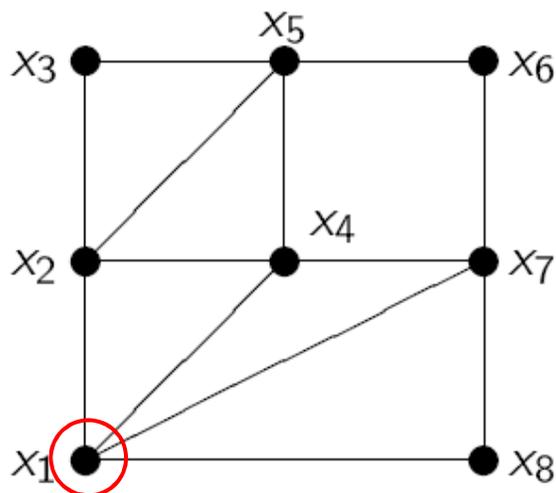
Questão: Dado um multigrafo euleriano como determinar um ciclo euleriano?

Algoritmo de Fleury

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo euleriano.

- 1º Escolha um vértice x_1 de G .
- 2º Sendo $L : x_1, u_1, x_2, \dots, u_p, x_k$ a cadeia simples, obtida pelo processo, seja $u_{k+1} = \{x_k, x_{k+1}\} \in \mathcal{U} \setminus \{u_1, \dots, u_k\}$ um arco incidente em x_k que não pertence a L e que, caso seja possível, não seja ponte de $G' = (X, \mathcal{U} \setminus \{u_1, \dots, u_k\})$.
- 3º Se $d_{G'}(x_{k+1}) = 1$, o algoritmo termina, caso contrário repita-se 2º.

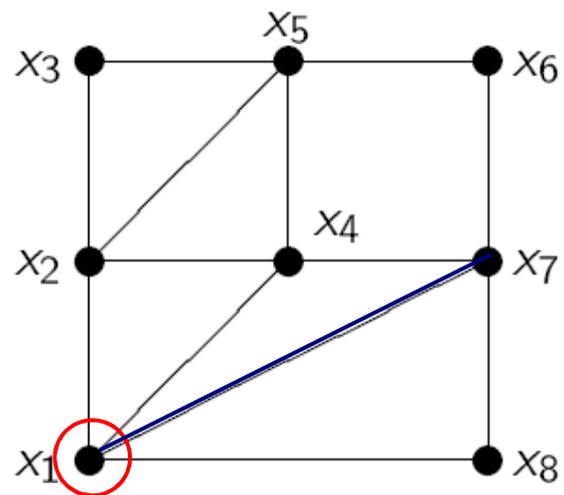
Exemplo 1: Consideremos o grafo



Grafo Euleriano
↓
Algoritmo de Fleury

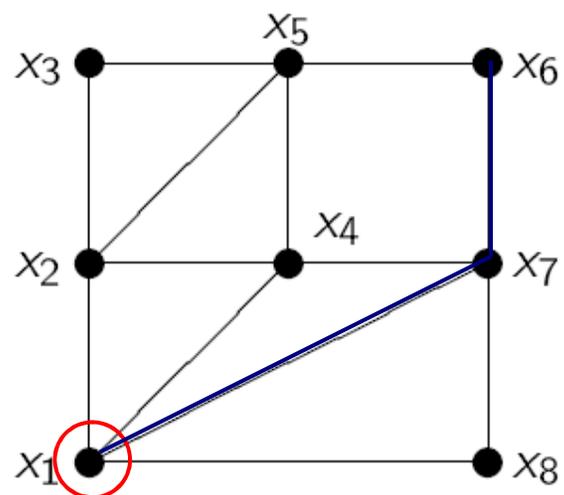
que é euleriano pois é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Utilizemos o algoritmo de Fleury para determinar um ciclo euleriano.

Exemplo 1: Consideremos o grafo



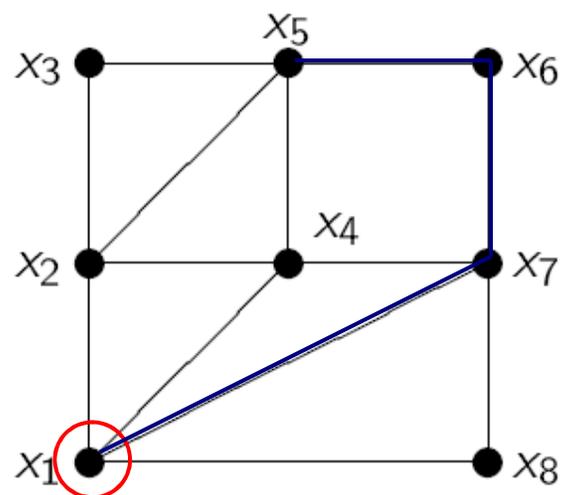
x_1, x_7

Exemplo 1: Consideremos o grafo



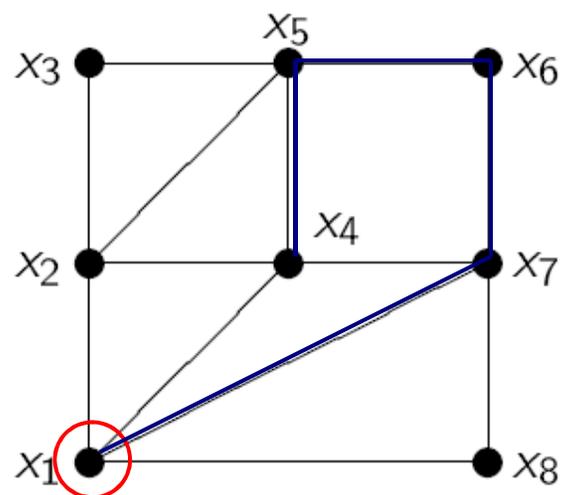
x_1, x_7, x_6

Exemplo 1: Consideremos o grafo



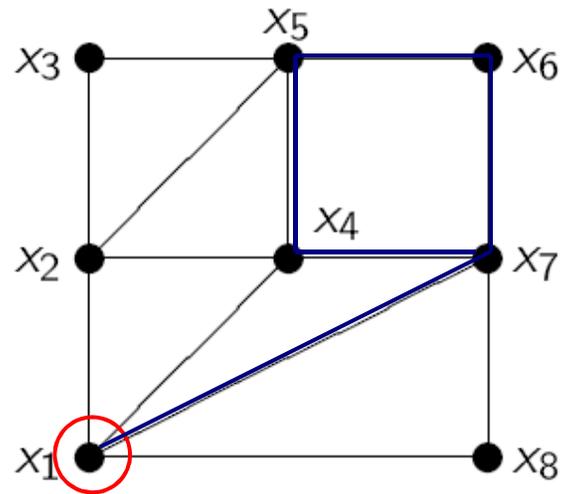
x_1, x_7, x_6, x_5

Exemplo 1: Consideremos o grafo



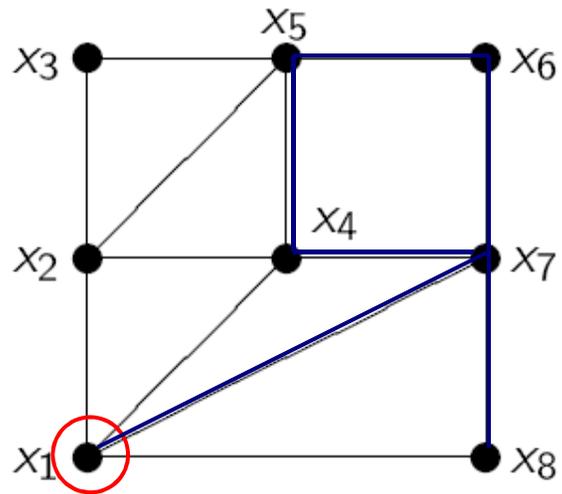
x_1, x_7, x_6, x_5, x_4

Exemplo 1: Consideremos o grafo



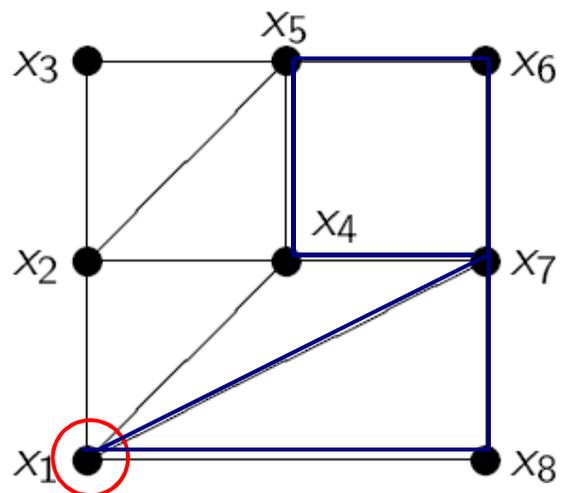
$X_1, X_7, X_6, X_5, X_4, X_7$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



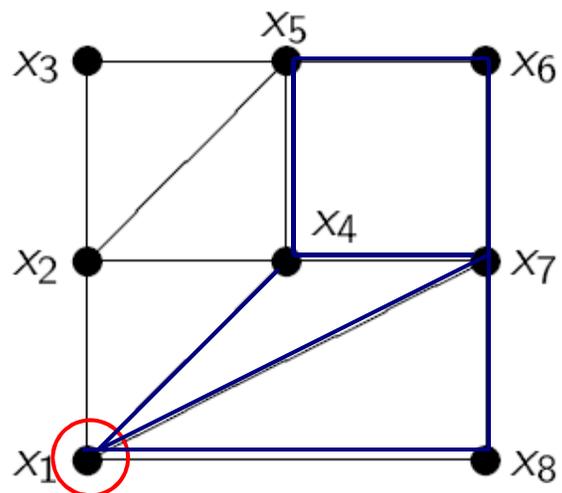
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



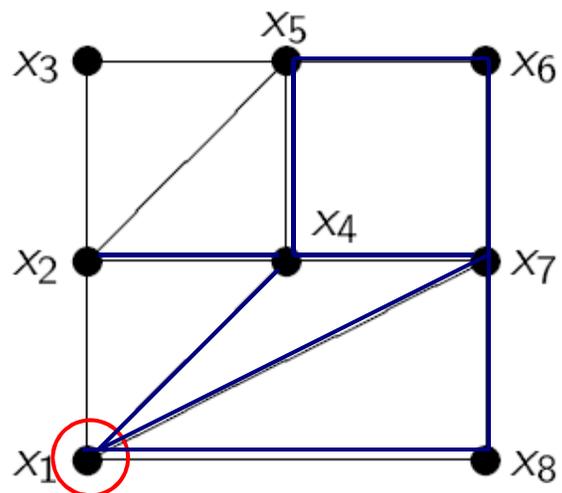
$X_1, X_7, X_6, X_5, X_4, X_7, X_8, X_1$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



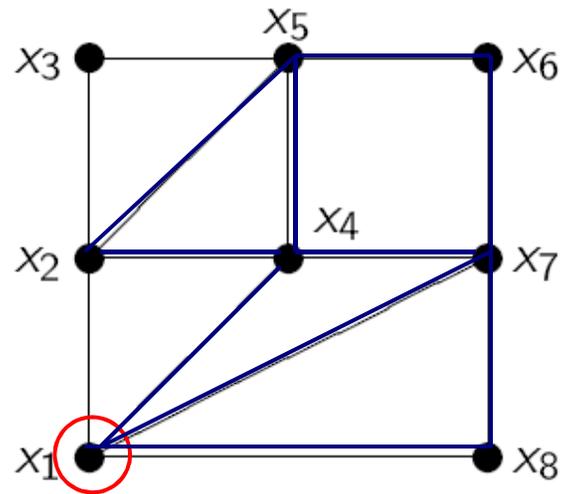
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1, x_4$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



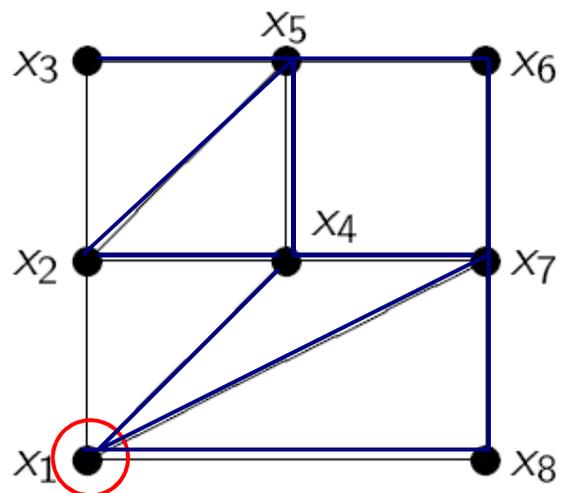
$X_1, X_7, X_6, X_5, X_4, X_7, X_8, X_1, X_4, X_2$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



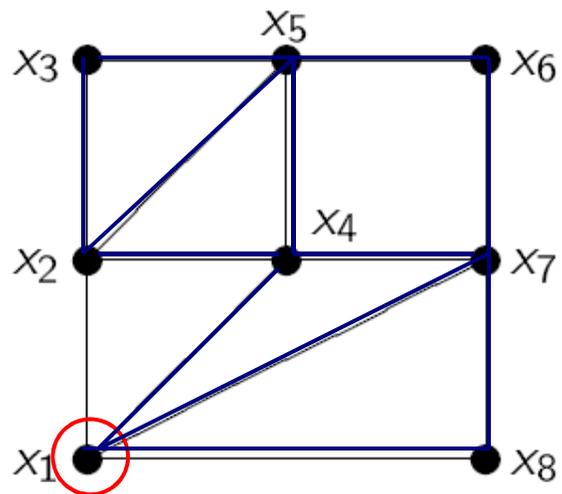
$x_1, x_7, x_6, x_5, x_4, x_7, x_8, x_1, x_4, x_2, x_5$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



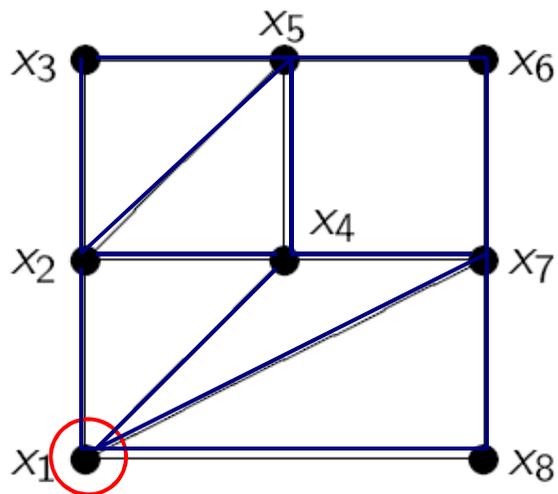
$X_1, X_7, X_6, X_5, X_4, X_7, X_8, X_1, X_4, X_2, X_5, X_3$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



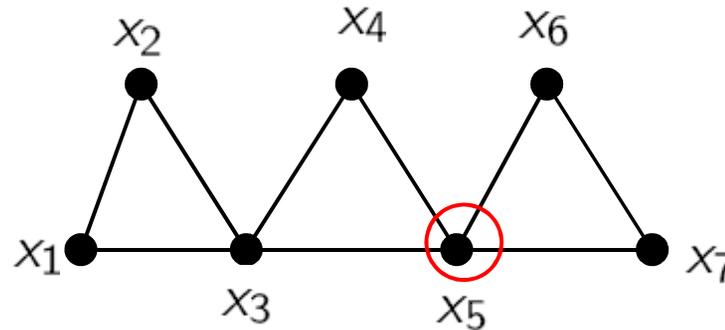
$X_1, X_7, X_6, X_5, X_4, X_7, X_8, X_1, X_4, X_2, X_5, X_3, X_2$

Exemplo 1: Consideremos o grafo



$X_1, X_7, X_6, X_5, X_4, X_7, X_8, X_1, X_4, X_2, X_5, X_3, X_2, X_1$

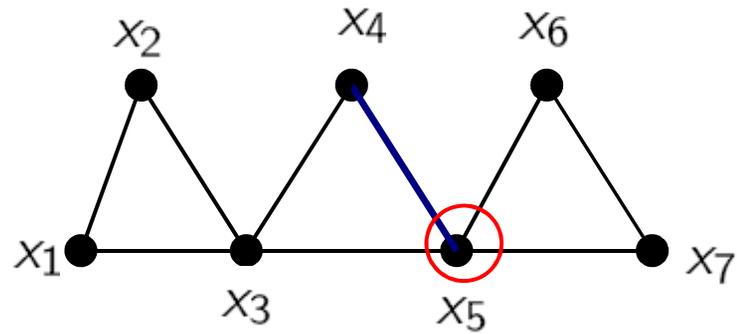
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Grafo Euleriano
↓
Algoritmo de Fleury

Estamos perante um grafo conexo euleriano, pois todos os vértices têm grau par. Vamos recorrer ao algoritmo de Fleury para determinar um ciclo euleriano.

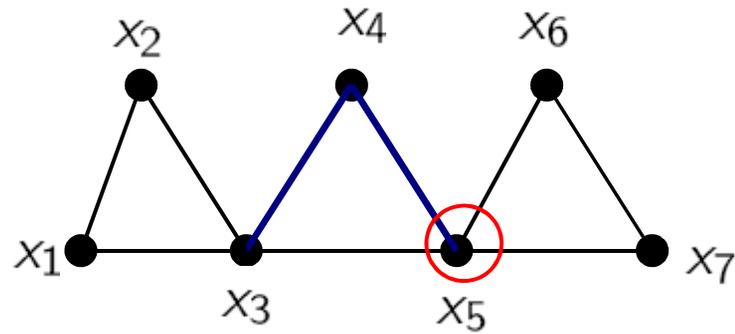
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

x_5, x_4

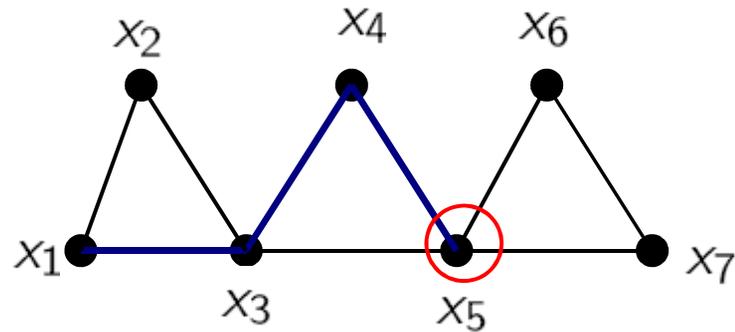
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

x_5, x_4, x_3

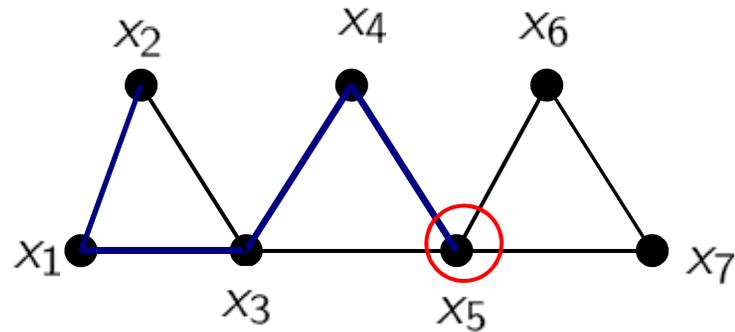
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

x_5, x_4, x_3, x_1

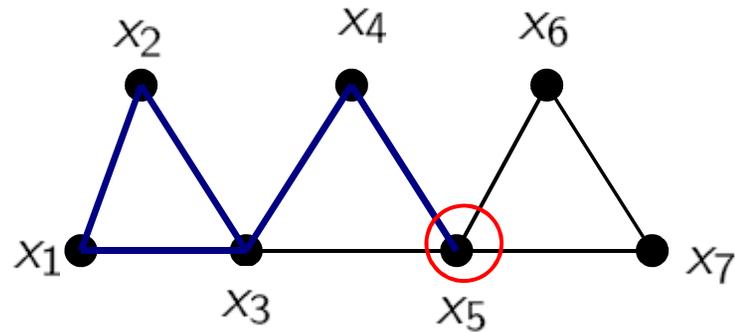
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

x_5, x_4, x_3, x_1, x_2

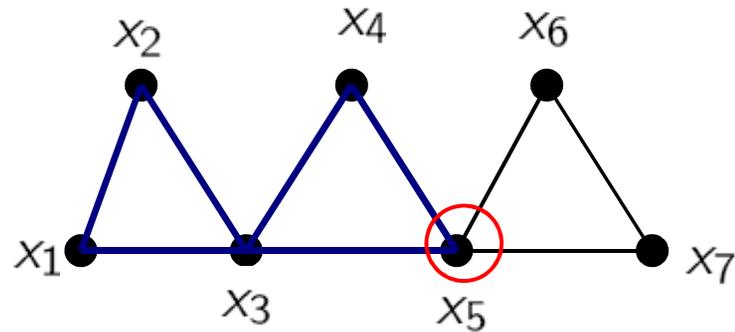
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3$

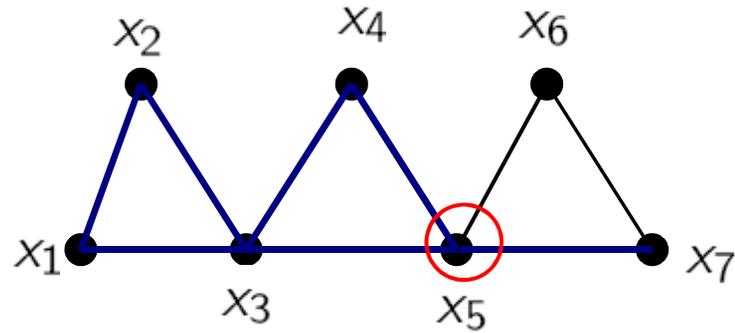
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5$

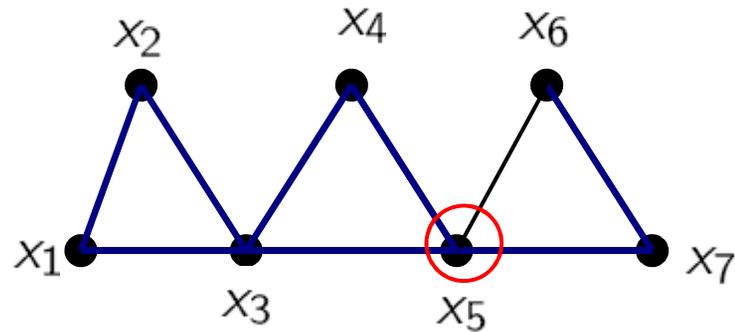
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_7$

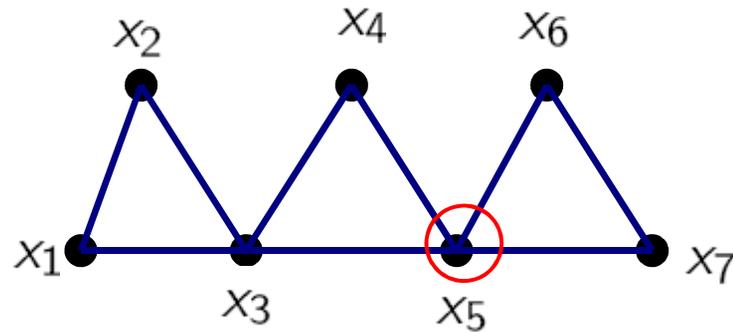
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_6$

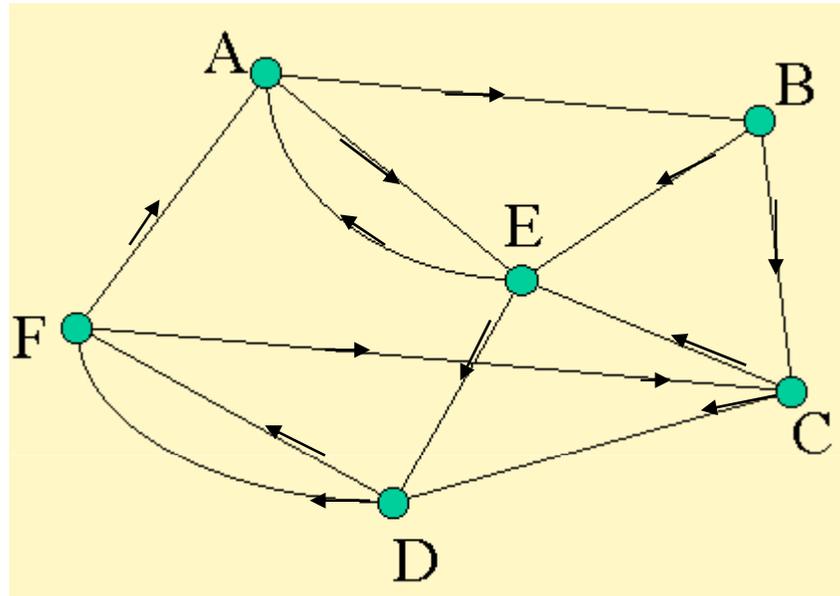
Exemplo 2: Consideremos o grafo



Vamos iniciar o algoritmo no vértice x_5 .

$x_5, x_4, x_3, x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_6, x_5$

Questão: O que se passa com os multigrafos orientados?



$$d^+(A) = 2 = d^-(A)$$

$$d^+(C) = 2 = d^-(C)$$

$$d^+(D) = 2 = d^-(D)$$

$$d^+(F) = 2 = d^-(F)$$

$$d^+(E) = 2 \quad e \quad d^-(B) = 3$$

$$d^+(B) = 2 \quad e \quad d^-(B) = 1$$

Teorema 2.4.4:

- (i) *Um multigrafo orientado conexo $G = (X, \mathcal{U})$, com $n \geq 2$ vértices, tem um circuito euleriano se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x),$$

para todo o $x \in X$.

- (ii) *Um multigrafo orientado conexo $G = (X, \mathcal{U})$, com $n \geq 2$ vértices, tem um caminho $x - y$ euleriano, com $x \neq y$ se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x) + 1,$$

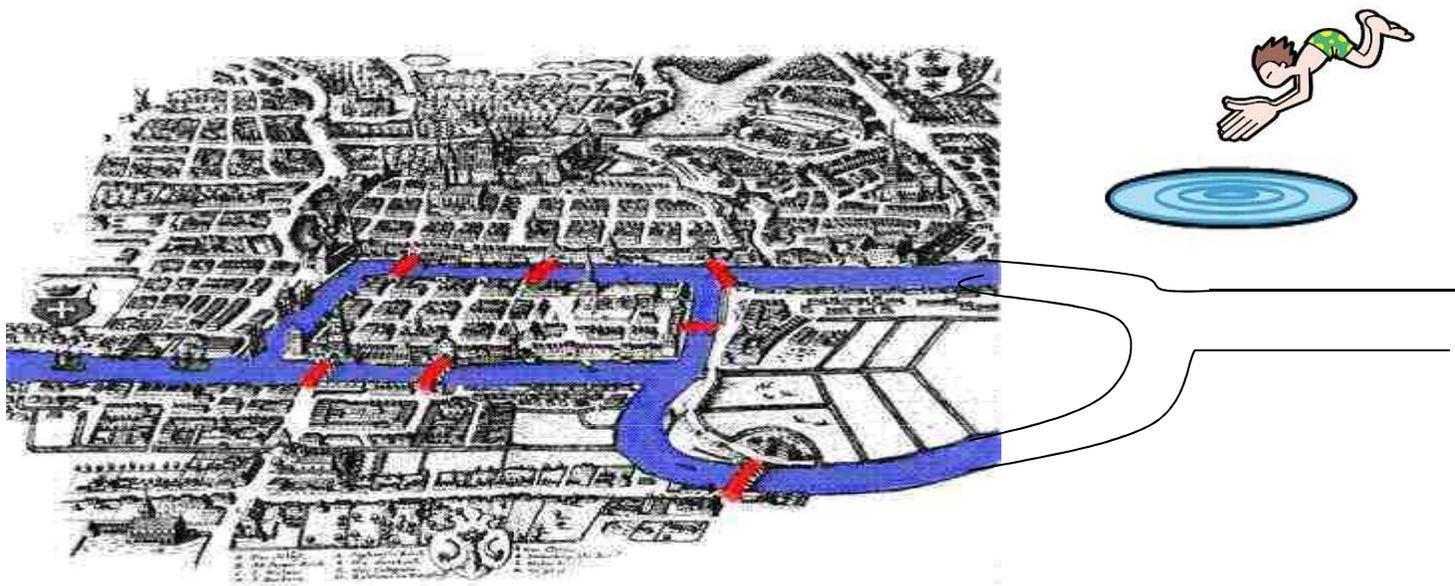
$$d^+(y) = d^-(y) - 1,$$

$$d^+(x_i) = d^-(x_i),$$

para todo o $x_i \in X \setminus \{x, y\}$.

Teorema de Euler (Mult. orientado)

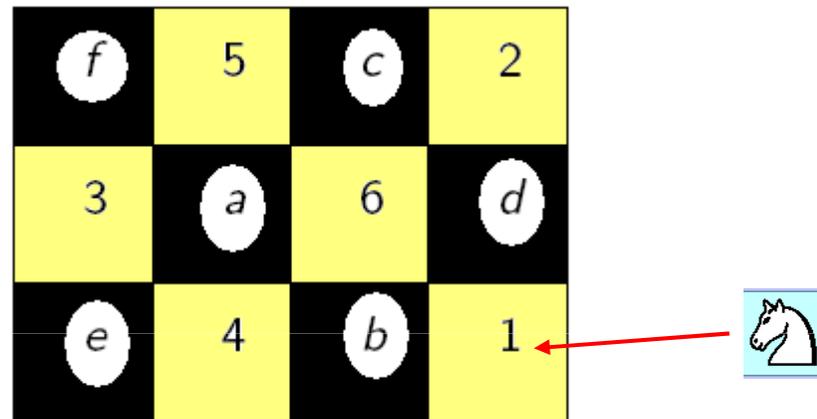
A terminar.... O nadador de Königsberg



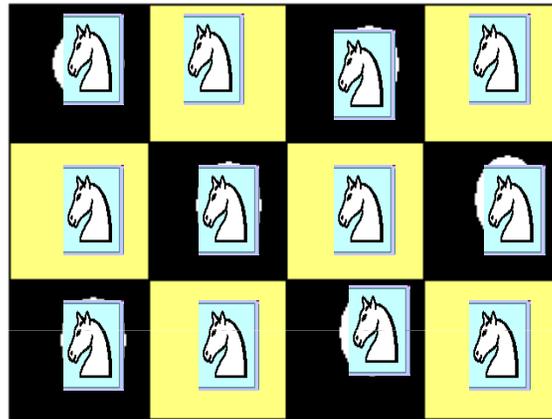
Um nadador consegue nadar no Pregel de forma a passar por baixo de todas as pontes uma e uma só vez?

2.5 Grafos Hamiltonianos

Consideremos o seguinte tabuleiro 3×4 em que as “casas” brancas estão identificadas com números e as “casas” pretas com letras:



É possível, através de movimentos lícitos no jogo de xadrez, o cavalo percorrer, uma e uma só vez, todas as “casas” do tabuleiro começando na “casa” número 1 ?



Sim,

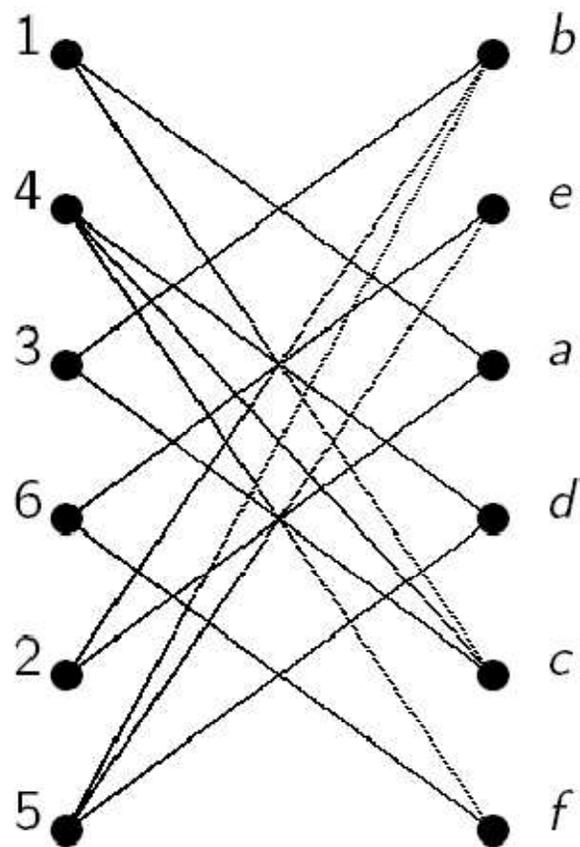
por exemplo, 1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, f

Mas não existe maneira do cavalo começar e regressar à “casa” número 1, depois de percorrer todas as “casas” do tabuleiro.

Questão: Qual a relação do problema anterior com a teoria de grafos?

<i>f</i>	5	<i>c</i>	2
3	<i>a</i>	6	<i>d</i>
<i>e</i>	4	<i>b</i>	1

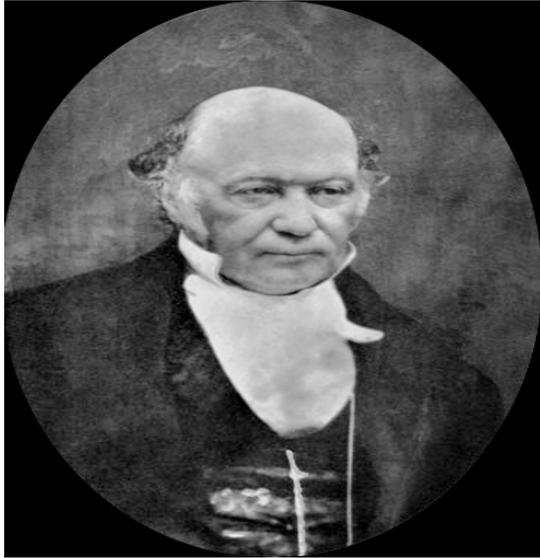
Considere-se um grafo em que os vértices correspondem às “casas” do tabuleiro, sendo dois vértices adjacentes se for possível, através de um movimento lícito, o cavalo passar de uma das casas para a outra. Temos assim um grafo bipartido.



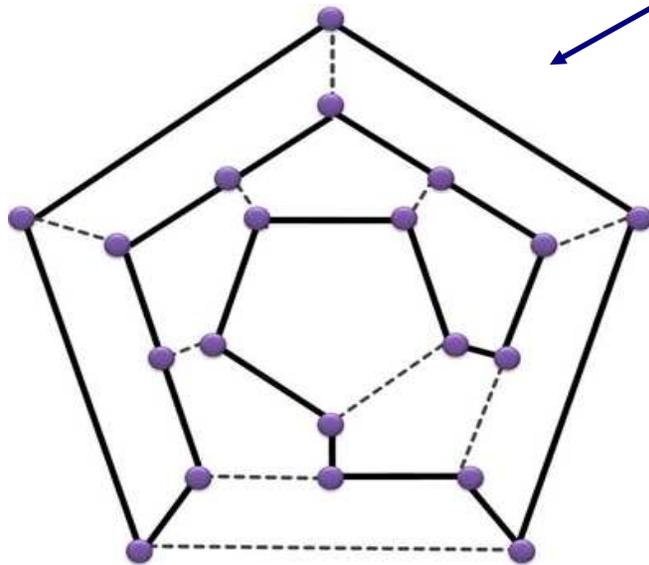
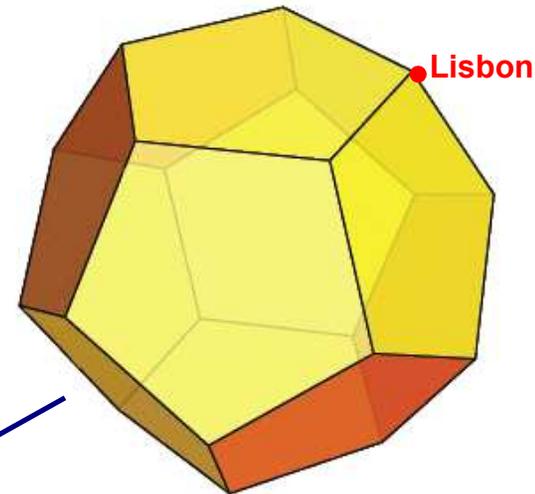
<i>f</i>	5	<i>c</i>	2
3	<i>a</i>	6	<i>d</i>
<i>e</i>	4	<i>b</i>	1

O que se pretende é então encontrar uma cadeia que passe uma e uma só vez por todos os vértices, regressando ou não ao vértice inicial.

Problema da cadeia ou do ciclo de Hamilton



William Rowan Hamilton (1805–1865)



Viagem a volta do mundo

Diz-se que inventou um jogo que chegou a ser comercializado que envolve um dodecaedro (sólido regular com 20 vértices, 30 arestas e 12 faces). Hamilton rotulou cada vértice do dodecaedro com o nome de uma cidade conhecida. O objectivo do jogo era que o jogador viajasse "ao redor do mundo" ao determinar uma viagem circular que incluísse todas as cidades exactamente uma vez, com a restrição de que só fosse possível viajar de uma cidade a outro se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes. A figura ao lado mostra um grafo do problema.

Definição 2.5.1:

Seja $G = (X, U)$ um grafo. Chamamos *cadeia hamiltoniana* a uma cadeia elementar que contenha todos os vértices de G e *ciclo hamiltoniano* a um ciclo elementar que contenha todos os vértices de G .

Se G é um grafo orientado substituindo, nas definições anteriores “cadeia” por “caminho” obtêm-se as correspondentes definições de *caminho hamiltoniano* e de *circuito hamiltoniano*.

Definição 2.5.2:

Um grafo diz-se *hamiltoniano* se admite um ciclo hamiltoniano e *semi-hamiltoniano* se admite uma cadeia hamiltoniana aberta.

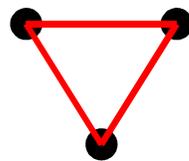
Observações:

- 1 Todo o grafo hamiltoniano é semi-hamiltoniano.
- 2 Se um grafo admite uma cadeia hamiltoniana então é conexo.
- 3 Se um grafo orientado admite um circuito hamiltoniano então é fortemente conexo.

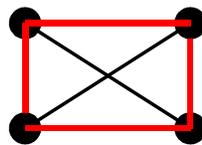
Proposição 2.5.3:

K_n , com $n \geq 3$, tem um ciclo hamiltoniano.

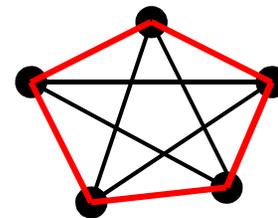
Observação:



K_3



K_4



K_5

Teorema 2.5.5: (Teorema de Ore)

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices, tal que

$$d(x) + d(x') \geq n, \quad \forall x, x' \in X \text{ não adjacentes.}$$

Então, G é hamiltoniano.



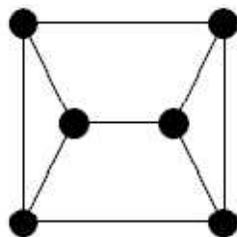
Corolário 2.5.6: (Teorema de Dirac)

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices, tal que

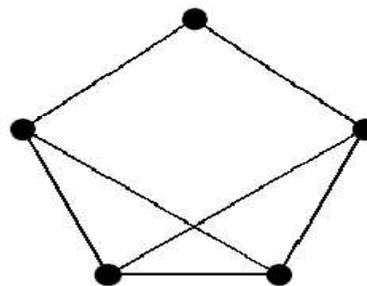
$$d(x) \geq \frac{n}{2}, \quad \forall x \in X.$$

Então, G é hamiltoniano.

Exemplos: Consideremos os grafos



A

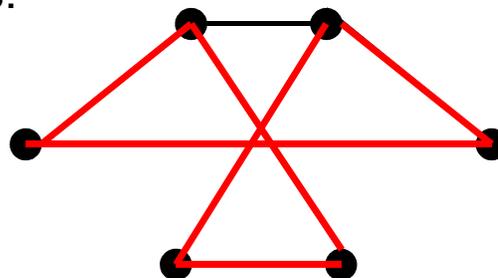


B

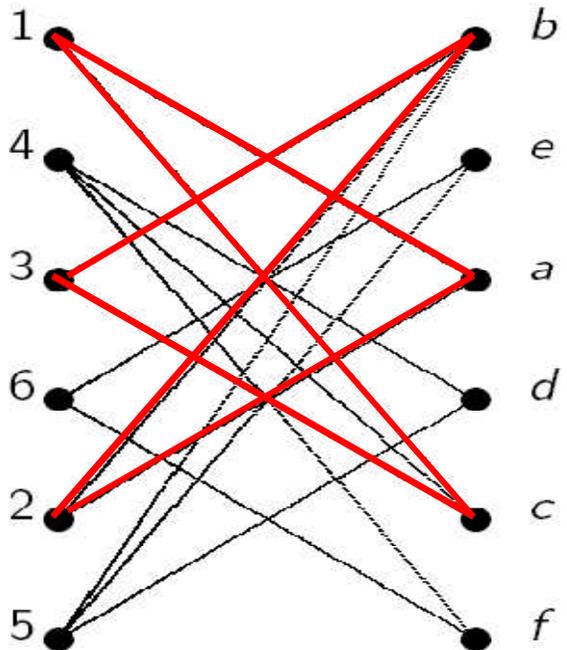
Usando o Corolário anterior, porque $d(x) \geq 3$, qualquer que seja o vértice do grafo A , e 6 é o número de vértices deste grafo, concluimos que o grafo tem um ciclo hamiltoniano.

No caso do grafo B , o Corolário não pode ser usado, no entanto pelo Teorema, podemos concluir que este grafo também tem um ciclo hamiltoniano.

Atenção: Um grafo pode ser hamiltoniano sem que as condições dos teoremas anteriores sejam satisfeitas.



Relativamente ao problema inicial:



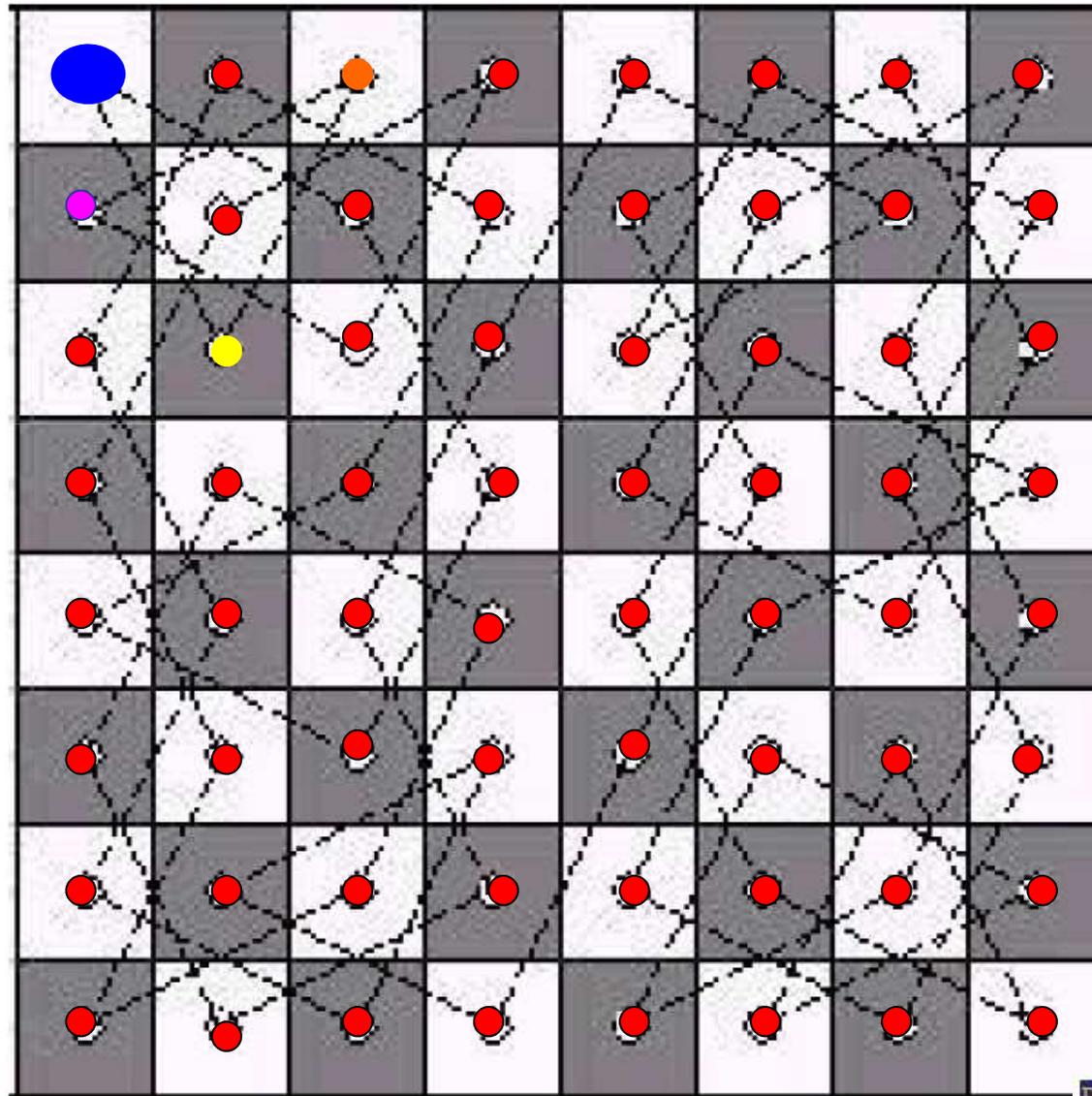
f	5	c	2
3	a	6	d
e	4	b	1

Os teoremas não ajudam a determinar se existe ou não um ciclo hamiltoniano no grafo associado ao tabuleiro de xadrez. No entanto uma simples análise permite afirmar que tal ciclo não existe.

Se o grafo possuísse um ciclo hamiltoniano então, como os vértices 1,2,3 têm grau 2, então os troços (c,1,a), (a,2,b) e (b,3,c) teriam de fazer parte desse ciclo. Mas então teríamos dentro desse ciclo o ciclo menor (c,1,a,2,b,3,c), o que não pode acontecer pois repetiria vértices.

A terminar...

Para o caso de todo o tabuleiro de xadrez já existe um ciclo hamiltoniano.
Uma solução está indicada a seguir:



2.6 Matrizes e Grafos

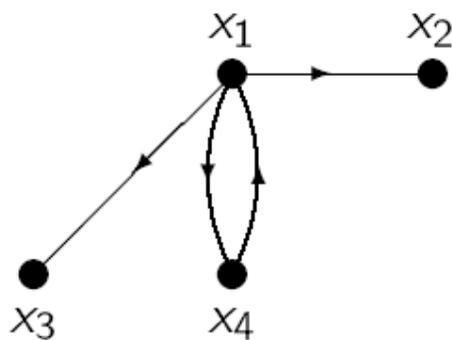
Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

Definição 2.6.1:

Chamamos *marcação dos vértices* de um grafo $G = (X, \mathcal{U})$, com $|X| = n$ a uma aplicação bijectiva ψ de X em $\{1, \dots, n\}$.

Um *grafo marcado nos vértices* é um par (G, ψ) em que G é um grafo e ψ é uma marcação dos vértices de G .

Exemplo: Consideremos o digrafo G



$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\psi : X \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x_2 \mapsto 1$$

$$x_3 \mapsto 2$$

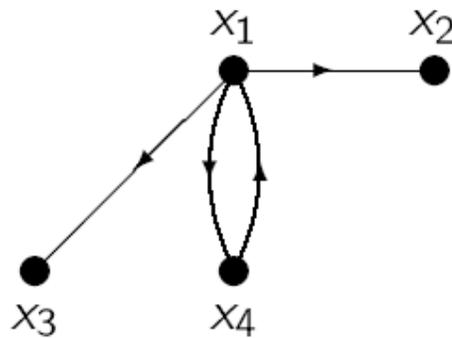
$$x_1 \mapsto 3$$

$$x_4 \mapsto 4$$

Marcação dos
vértices de G

$$= (x_2, x_3, x_1, x_4)$$

Outra marcação dos vértices de G



$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$\psi : X \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x_1 \mapsto 1$$

$$x_2 \mapsto 2$$

$$x_3 \mapsto 3$$

$$x_4 \mapsto 4$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

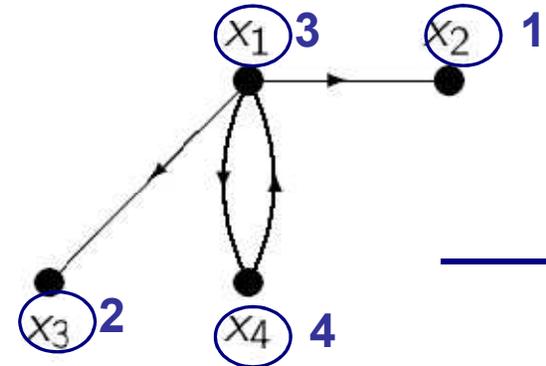
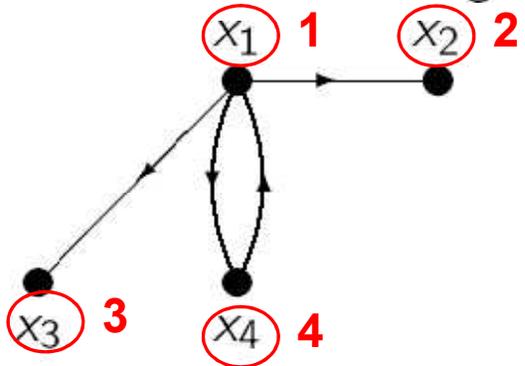
Marcação usual

Definição 2.6.2:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices, com (G, ψ) e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chamamos **matriz de adjacências** de G , em relação à marcação ψ , à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n , tal que

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Exemplo: Consideremos o digrafo G



e as marcações dos vértices (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_2, x_3, x_1, x_4) .

As matrizes de adjacências de G , em relação às marcações (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_2, x_3, x_1, x_4) são, respectivamente, as matrizes

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

Proposição 2.6.3:

Sejam A e A' matrizes de adjacências de um digrafo $G = (X, \mathcal{U})$ em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação P tal que

$$A' = PAP^{-1}$$

(uma matriz de permutação de ordem n é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem n efectuando uma troca nas suas linhas).

Exemplo: Relativamente ao exemplo anterior:

Matriz de adjacência para a marcação

(x_1, x_2, x_3, x_4)

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de adjacência para a marcação

(x_2, x_3, x_1, x_4)

$$A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como expressar $A'(G)$ em função de $A(G)$?

$$A'(G) = P A(G) P^{-1}$$

?

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observações:

1. Sendo $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, chamamos **marcação usual** dos vértices de G à marcação (x_1, \dots, x_n) . Assim, a matriz de adjacências de G , em relação à marcação usual, é a matriz $A = [a_{ij}]$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

2. Através da matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ de um digrafo G , em relação à marcação (x_1, \dots, x_n) , podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de G :

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha i de A , ou equivalentemente, o número de elementos da linha i que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna i de A .

Exemplo: Considerando o grafo do exemplo anterior, cuja matriz de adjacências em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4) , dos seus vértices é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad \underline{a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}}$$

Usando a matriz:

1) Quantos arcos tem o digrafo? **Soma de todos os números 1's**

2) Qual o grau exterior do vértice x_1 ?

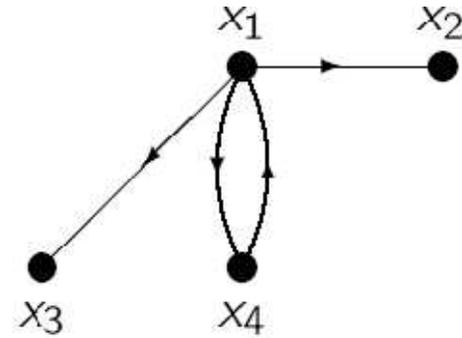
$$\sum_{j=1}^4 a_{1j} = 3 = d^+(x_1)$$

3) Qual o grau interior do vértice x_3 ?

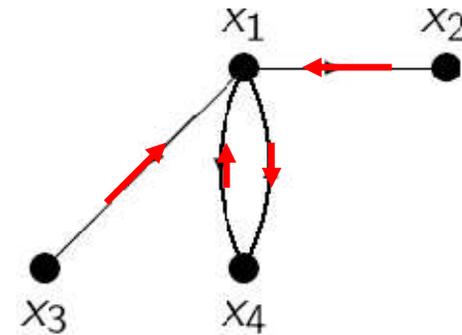
$$\sum_{j=1}^4 a_{j3} = 1 = d^-(x_3)$$

4) Que informação esta expressa em $A(G)^T$?

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$A(G)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



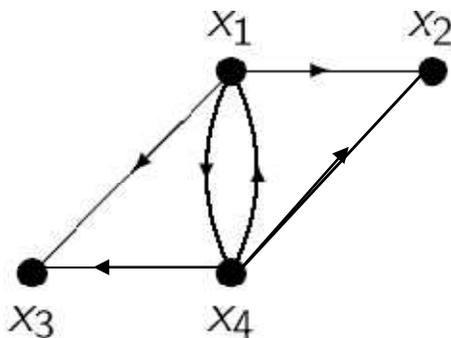
Teorema 2.6.4:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo marcado nos vértices e $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de G , em relação à marcação usual (x_1, \dots, x_n) . Então, sendo s_{ij} o número de sucessores simultâneos de x_i e x_j , i.e.

$s_{ij} = |\Gamma^+(x_i) \cap \Gamma^+(x_j)|$, temos

$$AA^T = [s_{ij}].$$

Exemplo: Considere o digrafo em baixo e a matriz de adjacências relativa à marcação usual (x_1, x_2, x_3, x_4)

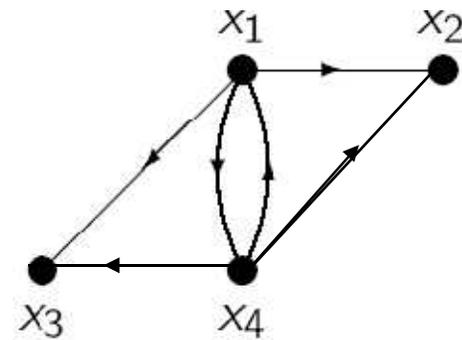


$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(G)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(G)A(G)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [s_{ij}]$$



Nº de sucessores de x_1

Nº de sucessores de x_4

Nº de sucessores comuns de x_1 e x_4

Nº de sucessores de comuns de x_i e x_j

Prova. O elemento da linha i coluna j de AA^T é

$$s_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn}.$$

Se $i = j$ tem-se

$$s_{ij} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = d^+(x_i)$$

e, portanto, s_{ij} é igual ao número de sucessores de x_i . Se $i \neq j$, os vértices x_i e x_j têm o vértice x_k como sucessor simultâneo se, e só se,

$$(x_i, x_k) \in \mathcal{U} \quad \text{e} \quad (x_j, x_k) \in \mathcal{U}.$$

Mas tal sucede se, e só se, $a_{ik} = 1$ e $a_{jk} = 1$, ou ainda, se, e só se, $a_{ik}a_{jk} = 1$.

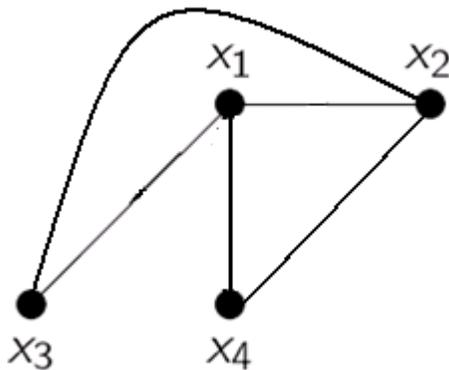
Pelo que o resultado se verifica. □

Definição 2.6.5:

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um **grafo simples**, com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chama-se **matriz de adjacências** de G , em relação à marcação (x_1, \dots, x_n) dos seus vértices, à matriz $A(G) = [a_{ij}]$, de ordem n , tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Exemplo: Considere o grafo simples, cuja matriz adjacências relativamente à marcação usual (x_1, x_2, x_3, x_4) é



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal nula
Matriz simétrica

Teorema 2.6.6:

Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz de adjacências de um grafo simples $G = (X, \mathcal{U})$, em relação à marcação usual (x_1, \dots, x_n) . Então, para $k \in \mathbb{N}$,

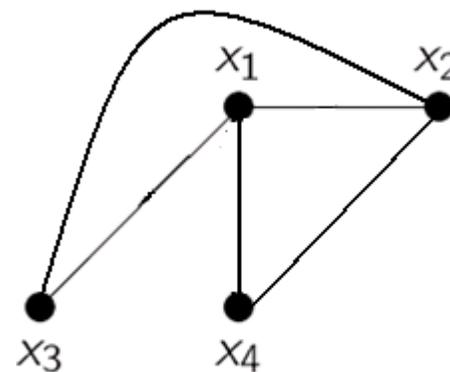
$$A^k = [a_{ij}^{(k)}],$$

em que $a_{ij}^{(k)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$ com comprimento k existentes em G .

Exemplo: Considere o grafo simples do exemplo anterior e a sua matriz de adjacências

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nº de vértices adjacentes a x_1
 = Nº de cadeias $x_1 - x_j$ de comprimento 2

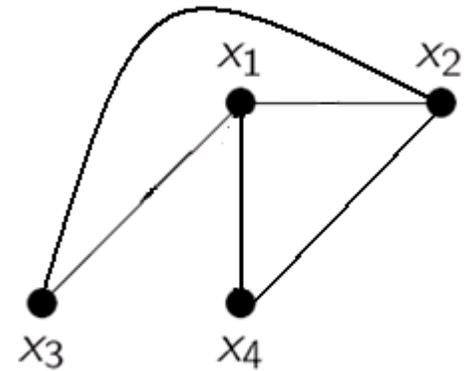


$$\begin{aligned}
 A(G)^2 &= A(G)A(G) = A(G)A(G)^T \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [a_{ij}^{(2)}]
 \end{aligned}$$

Nº de vértices adjacentes simultaneamente a x_4 e x_3
 = Nº de cadeias $x_4 - x_3$ de comprimento 2

Nº de vértices adjacentes simultaneamente a x_3 e x_1
 = Nº de cadeias $x_3 - x_1$ de comprimento 2

$$a_{ij}^{(2)} = \text{nº de cadeias } x_i - x_j \text{ de comprimento 2}$$



Nº de cadeias $x_1 - x_1$ de comprimento 3

$$A(G)^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [a_{ij}^{(3)}]$$

Nº de cadeias $x_4 - x_3$ de comprimento 3

$$2 = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cadeias de comprimento 2 de x_4 para x_1

arcos de x_1 para x_3

$a_{ij}^{(3)}$ = nº de cadeias $x_i - x_j$ de comprimento 3

Prova. Por indução em k .

Para $k = 1$, verifica-se pois para $i = j$, $a_{ij} = 0$ e, para $i \neq j$, $a_{ij} = 1$ se, e só se, $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{U}$. Como num grafo simples não existem arcos paralelos, a_{ij} representa o número de cadeias $x_i - x_j$, com comprimento 1, existentes em G .

Suponhamos então que, para $l - 1 \geq 1$, na matriz $A^{l-1} = [a_{ij}^{(l-1)}]$, $a_{ij}^{(l-1)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G , com comprimento $l - 1$, e demonstremos que em $A^l = [a_{ij}^{(l)}]$, $a_{ij}^{(l)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G , com comprimento l .

Tem-se $A^l = A^{l-1}A$ pelo que $a_{ij}^{(l)} = \sum_{s=1}^n a_{is}^{(l-1)} a_{sj}$. Pela hipótese de indução, $a_{is}^{(l-1)}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_s$, de G , com comprimento $l - 1$.

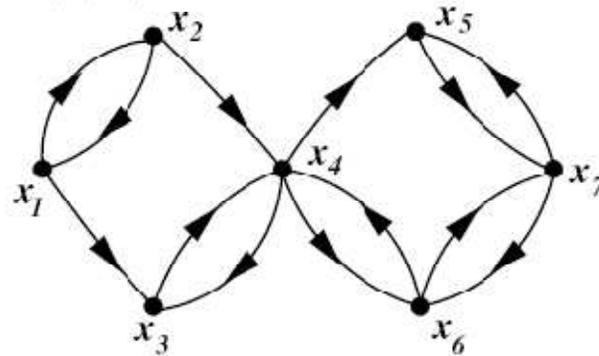
Então, $a_{is}^{(l-1)} a_{sj}$ é igual ao número de cadeias $x_i - x_j$, de G , com comprimento $(l - 1) + 1 = l$ e tendo como penúltimo vértice x_s . Como no somatório x_s percorre todos os vértices do grafo o resultado é verdadeiro para l .

Pelo princípio de indução, o resultado é verdadeiro.

Observação: Substituindo no Teorema anterior, “grafo simples” por “digrafo” e “cadeia” por “caminho”, obtemos um resultado válido.



[7.0] 5. Considere o seguinte digrafo $G = (X, U)$:

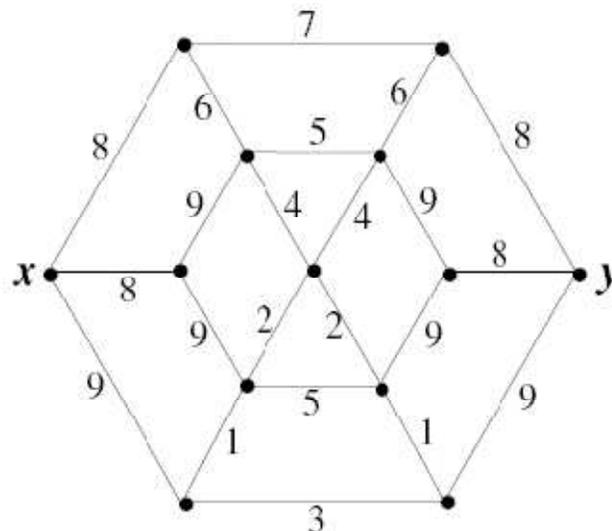


Seja $u = (x_5, x_2)$ e considere o digrafo $G' = G + u$.

- Indique a ordem, o tamanho e a sequência de graus de G .
- Indique se o digrafo G é conexo.
- Verifique se os digrafos G e G' são fortemente conexos e indique as componentes fortemente conexas de G e de G' .
- Os digrafos G e G' têm caminhos eulerianos fechados? E caminhos eulerianos abertos? Justifique.
- Justifique que o digrafo G' possui um circuito hamiltoniano.
- Represente geometricamente os grafos subjacentes a G e a G' .
- Caracterize os grafos subjacentes a G e G' quanto a serem eulerianos ou semi-eulerianos.
- Indique a matriz A das adjacências de G relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$.

Questões 6 e 7 no verso

[4.5] 6. Considere o seguinte grafo ponderado:



- Utilize o algoritmo de Kruskal para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.
- Utilize o algoritmo de Prim, a partir do vértice x , para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.
- Utilize o algoritmo do Cadeia mais Curta para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L entre os vértices x e y . Indique o valor de L .

[2.0] 7. Sejam G um grafo simples e x um vértice de G de grau 1. Mostre que G é uma árvore se e só se $G - x$ for uma árvore.