MATEMÁTICA DISCRETA

2º Teste - *2007.06.04*

<u>*Todas as respostas terão de ser devidamente justificadas.*</u>

1. Resolva a seguinte relação de recorrência: [1,5]

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

   com as condições iniciais $a_0 = 2$ e $a_1 = 0$.

2. Considere a sequência de inteiros, não crescente,

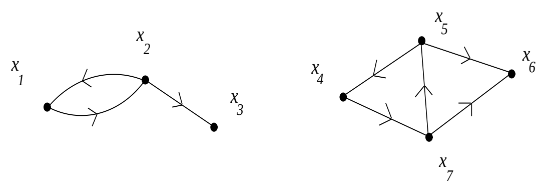
$$S = (4, 4, k, 2, 2, 1, 1, 1).$$

   (a) Justifique que existe um, e só um só, valor de k para o qual a sequência S é a sequência de graus de um grafo simples. [1,0]

   (b) Para o valor de k determinado em (a), indique um grafo simples G cuja sequência de graus é S. [1,0]

   (c) Sem determinar $\overline{G}$ (grafo complementar de G) indique a sua sequência de graus. [1,0]

3. Considere o grafo $G = (X, \mathcal{U})$



   (a) Caso seja possível, indique duas cadeias $x_1 - x_3$, distintas, com comprimento 2. [0,5]

   (b) Indique as classes de equivalência da relação de equivalência R definida sobre o conjunto X por: [0,5]

$$x_i R x_j \text{ se, e só se, existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j.$$

   (c) Determine as componentes fortemente conexas de G. [1,0]

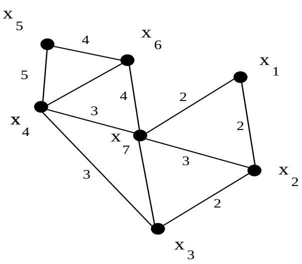
4. Uma árvore T tem a sequência de graus

$$3^t,\ 2^2,\ 1^8.$$

   (a) Determine t, isto é o número de vértices de grau 3. [1,5]

   (b) Indique o número de arcos de T. [0,5]

5. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ o grafo ponderado



Determine uma árvore maximal de G, de valor mínimo, usando o algoritmo de Kruskal. (Desenhe o grafo e numere os arcos pela ordem que forem sendo escolhidos). [1,5]

6. Considere o grafo tripartido completo

$$K_{r,s,t}\ ,\quad \text{com}\ \ r = s + t.$$

(a) Justifique que tal grafo tem um ciclo hamiltoniano. [1,5]

(b) Mostre que tal grafo é euleriano se, e só se, r, s e t são todos números pares. [2,0]

7. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um digrafo cuja matriz de adjacências, em relação a marcação usual, é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando apenas os elementos da matriz A, e se necessário de algumas das suas potências, indique:

(a) a sequência de graus interiores de G; [1,0]

(b) se G tem poços; [0,5]

(c) o número de caminhos $x_1 - x_3$, com comprimento 2, existentes em G. [1,0]

8. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples com n vértices, m arcos e p componentes conexas. Demonstre que [2,0]

$$m \geq n - p.$$

9. Sejam (G, ψ) um digrafo marcado nos vértices e A a matriz de adjacências do digrafo G em relação à marcação ψ. Utilizando matrizes, indique uma condição necessária e suficiente para G ser conexo. [2,0]

   (Sugestão: Considere a matriz de adjacências do grafo subjacente a G).