MATEMÁTICA DISCRETA

2º Teste - *2008.06.04*

Todas as respostas terão de ser devidamente justificadas.

1. Considere a sequência

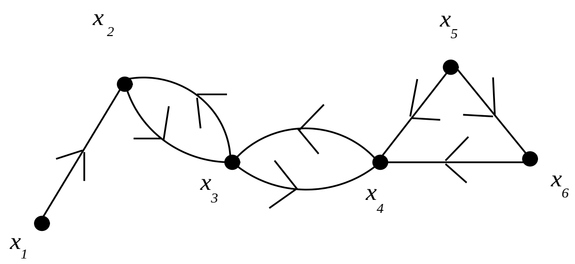
$$S: \quad 4, 4, k, 3, 3, 3.$$

   (a) Justifique que existe no máximo um valor de k para o qual a sequência S é a sequência de graus de um grafo simples.

   (b) Mostre que existe um, e um só, valor de k para o qual a sequência S é a sequência de graus de um grafo simples e indique qual é esse valor.

   (c) Para o valor de k determinado em (b), indique um grafo simples cuja sequência de graus é S.

2. Considere o digrafo G



   Determine:

   (a) A sequência de graus interiores de G.

   (b) Se G é conexo.

   (c) Se existe alguma cadeia $x_6 - x_4$, com comprimento 2.

   (d) Se qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, com k ímpar, existe um caminho $x_1 - x_2$ com comprimento k.

   (e) As componentes fortemente conexas de G.

MATEMÁTICA DISCRETA

2º Teste - *2008.06.04*

<u>*Todas as respostas terão de ser devidamente justificadas.*</u>

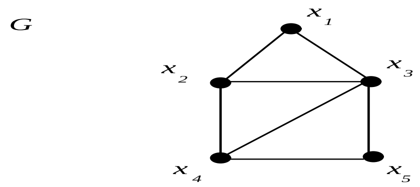
3. Mostre que qualquer árvore que tenha a sequência de graus

$$5, 4, 3, 3, 1, ..., 1$$

   (a) tem o mesmo número de vértices de grau 1 e determine tal número.

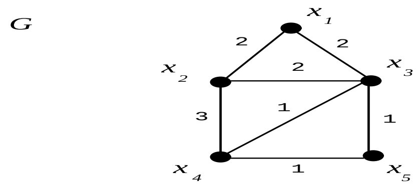
   (b) tem o mesmo número de arcos e determine tal número.

4. (a) Considere o grafo simples



   Indique, caso seja possível, três árvores maximais de G, duas a duas não isomorfas.

   (b) Considere o grafo ponderado



   Indique uma árvore maximal de G com valor mínimo, utilizando o Algoritmo de Prim.

5. Seja $G = (X, U)$ um digrafo conexo tal que

$$d^+(x) = d^-(x), \text{ para todo } x \in X.$$

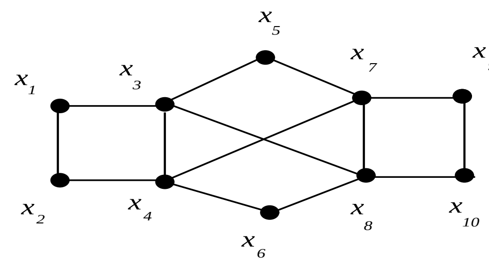
Justifique que G é fortemente conexo.

MATEMÁTICA DISCRETA

2º Teste - *2008.06.04*

<u>*Todas as respostas terão de ser devidamente justificadas.*</u>

6. Considere o grafo simples



Indique:

(a) se G é bipartido e, em caso afirmativo, apresente uma representação geométrica de G que evidencie essa propriedade;

(b) se G é euleriano;

(c) se $G - \{x_1\}$ é semi-euleriano;

(d) se G é hamiltoniano.

7. Um digrafo $G = (X, U)$ tem a matriz de adjacências

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4) dos seus vértices. Considerando apenas a matriz A ou algumas das suas potências, indique:

(a) o grau interior e o grau exterior do vértice x_3;

(b) se G tem vértices isolados;

(c) o número de caminhos $x_1 - x_3$, com comprimento 2, existentes em G.