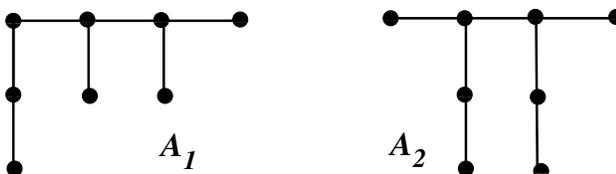


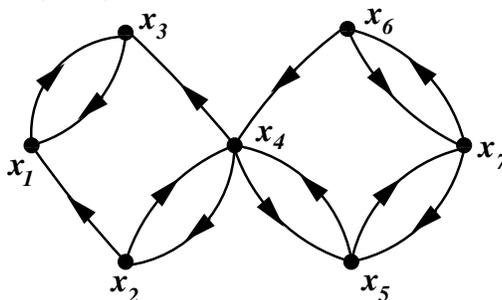
- [1.0] 1. Indique, justificando, se é possível numa reunião com 55 participantes um quinto dos participantes conhecerem exactamente um quinto dos participantes (não incluindo o próprio) e os restantes quatro quintos dos participantes conhecerem exactamente quatro quintos dos participantes.
- [1.5] 2. Seja G um grafo simples com 7 vértices e 12 arcos. Admita que G tem pelo menos um vértice de grau 2, pelo menos um vértice de grau 3 e pelo menos um vértice de grau 4. Admita ainda que todos os vértices de G são de grau 2, de grau 3 ou de grau 4. Mostre que a sequência de graus de G é $(4, 4, 4, 4, 3, 3, 2)$.
- [2.0] 3. Verifique, usando o algoritmo estudado nas aulas, se $(4, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$ é uma sequência gráfica. Em caso afirmativo, utilize o mesmo algoritmo para representar geometricamente um grafo simples que possua esta sequência de graus.
- [2.0] 4. (a) Considere as seguintes árvores A_1 e A_2 :



Determine as suas sequências de graus e indique, justificando, se são grafos isomorfos.

- (b) Represente geometricamente três árvores não isomorfas com oito vértices, com pelo menos um vértice de grau 4 e pelo menos um vértice de grau 3. (Não precisa justificar.)

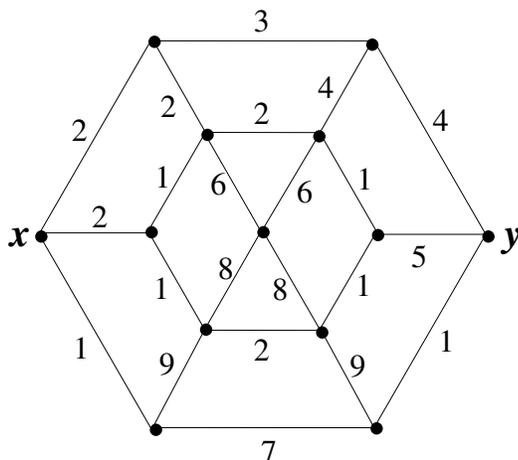
- [7.0] 5. Considere o seguinte digrafo $G = (X, U)$:



Seja $u = (x_3, x_6)$ e considere o digrafo $G' = G + u$.

- (a) Indique a ordem, o tamanho e a sequência de graus de G .
- (b) Indique se o digrafo G é conexo.
- (c) Verifique se os digrafos G e G' são fortemente conexos e indique as componentes fortemente conexas de G e de G' .
- (d) Os digrafos G e G' têm caminhos eulerianos fechados? E caminhos eulerianos abertos? Justifique.
- (e) Justifique que o digrafo G' possui um circuito hamiltoniano.
- (f) Represente geometricamente os grafos subjacentes a G e a G' .
- (g) Caracterize os grafos subjacentes a G e G' quanto a serem eulerianos ou semi-eulerianos.
- (h) Indique a matriz A das adjacências de G relativamente à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$.

[4.5] 6. Considere o seguinte grafo ponderado:



- Utilize o algoritmo de Kruskal para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.
- Utilize o algoritmo de Prim, a partir do vértice x , para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.
- Utilize o algoritmo do Cadeia mais Curta para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L entre os vértices x e y . Indique o valor de L .

[2.0] 7. Sejam G um grafo simples e x um vértice de G de grau 1. Mostre que G é uma árvore se e só se $G - x$ for uma árvore.