Segundo Teste Versão A

1. 63 vértices

21 → 21
42 → 42

Num grafo orientado o número de vértices que tem grau ímpar é sempre par, neste caso haveria 21 vértices a ter grau ímpar, logo não é possível fazer das 63 pessoas 1/3 conhecer exactamente 1/3 das outras pessoas, e os restantes conhecerem 2/3 das restantes pessoas.

2. 7 vértices
12 arcos

pelo menos um vértice com grau 2
" " " " " " 3
" " " " " " 4

sendo que a sequência de graus é igual a (4, 4, 4, 4, 3, 3, 2)?

$\Sigma\, d(v) = 2m$

$\Sigma\, d(v) = 4 \times 4 + 3 \times 2 + 2 = 24$

$2m = 24 \Leftrightarrow m = \frac{24}{2} \quad m = 12$

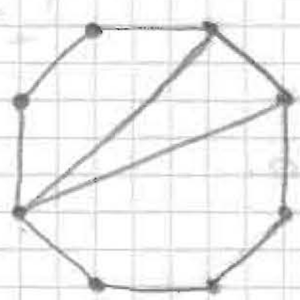
a = nº de vértices de grau 4
b = " " " " " 3
c = " " " " " 2

$a + b + c = n$

$4 + 2 + 1 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$

3. (4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2) será sequência gráfica?

4	3	3	2	2	2	2	2
	2	2	1	1	2	2	2
	2	2	2	2	2	1	1
		1	1	2	2	1	1
		2	2	1	1	1	1
			1	0	1	1	1
			1	1	1	1	0

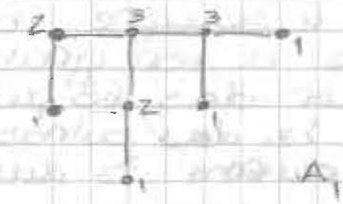


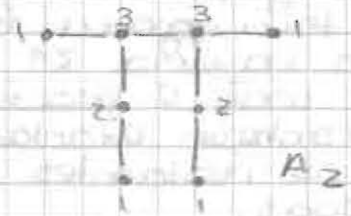
$(k, 3^k) \quad k \geq 3$

$k, \underbrace{3 \ldots\ldots 3}_{k\times}$

$k, \dfrac{3 \ldots\ldots 3}{2 \ldots\ldots 2}$

4. a)

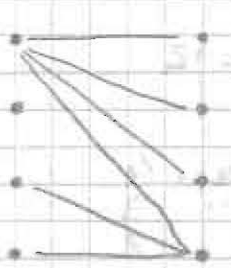


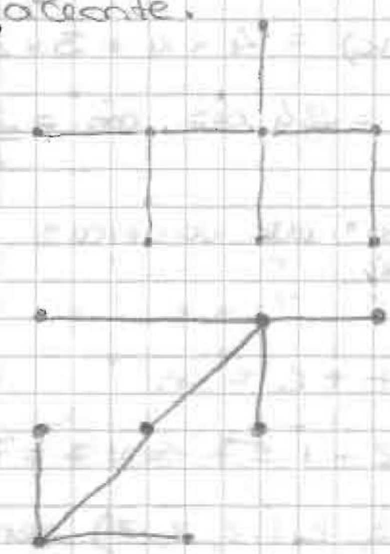


$A_1 (3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ $A_2 (3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

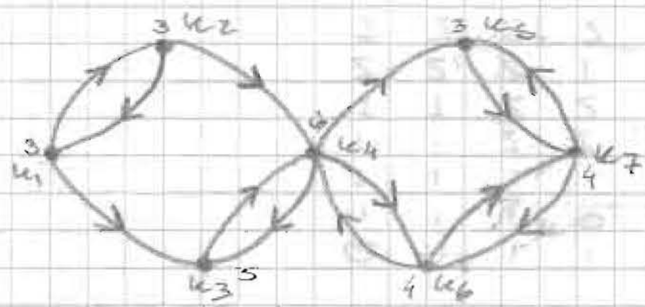
Apesar de os dois grafos terem sequências de grau iguais, no grafo A_1 um vértice de grau três tem dois vértices de grau dois adjacentes e no grafo A_2 um vértices de grau três tem um vértice de grau um e um vértice de grau dois adjacente.

b)





5.

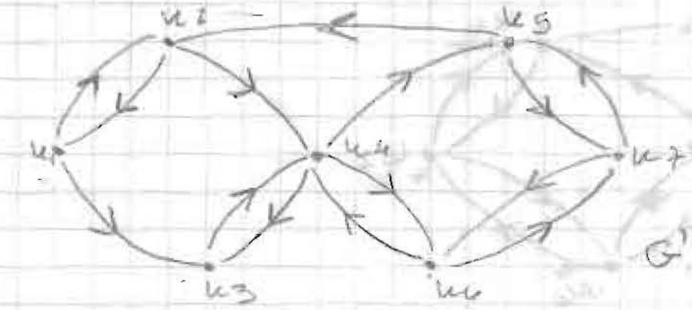


a) $n = 7$
$m = 13$

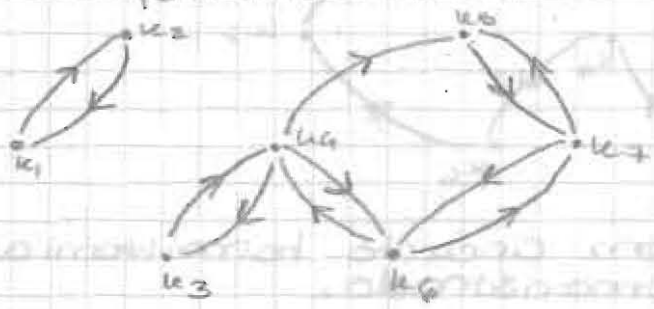
$(6, 4, 4, 3, 3, 3, 3)$

b) O grafo é conexo.

c)



G não é fortemente conexo, pois, por exemplo do vértice u_7 não se consegue chegar a u_2, tem componentes conexas:



G' é fortemente conexo, pois escolhendo dois vértices quaisquer existe um caminho a juntar os dois vértices.

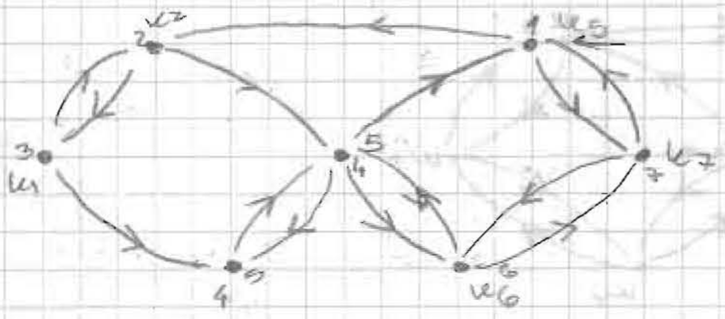
d)

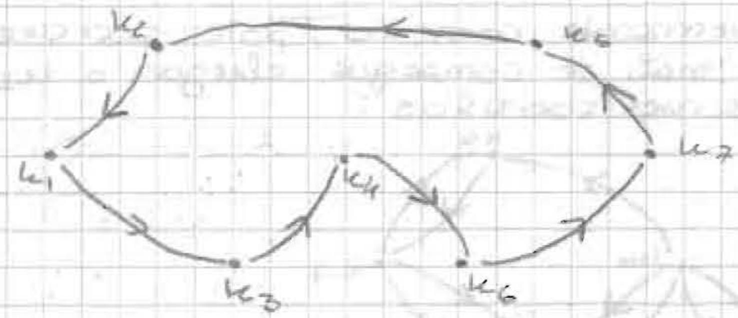
G		G'	
$d(u_1)^+ = 2$	$d(u_1)^- = 1$	$d(u_1)^+ = 2$	$d(u_1)^- = 1$
$d(u_2)^+ = 2$	$d(u_2)^- = 1$	$d(u_2)^+ = 2$	$d(u_2)^- = 2$
$d(u_3)^+ = 1$	$d(u_3)^- = 2$	$d(u_3)^+ = 1$	$d(u_3)^- = 2$
$d(u_4)^+ = 3$	$d(u_4)^- = 3$	$d(u_4)^+ = 3$	$d(u_4)^- = 3$
$d(u_5)^+ = 1$	$d(u_5)^- = 2$	$d(u_5)^+ = 2$	$d(u_5)^- = 2$
$d(u_6)^+ = 2$	$d(u_6)^- = 2$	$d(u_6)^+ = 2$	$d(u_6)^- = 2$
$d(u_7)^+ = 2$	$d(u_7)^- = 2$	$d(u_7)^+ = 2$	$d(u_7)^- = 2$

O G não tem caminhos eulerianos fechados nem abertos, porque os graus interiores e exteriores dos vértices são diferentes excepto em dois vértices.

O G' só tem caminhos eulerianos abertos porque tem os graus interiores e exteriores todos iguais, excepto dois vértices em que um, tem o grau interior igual ao grau exterior menos um, e o outro tem o grau exterior igual ao grau interior menos um.

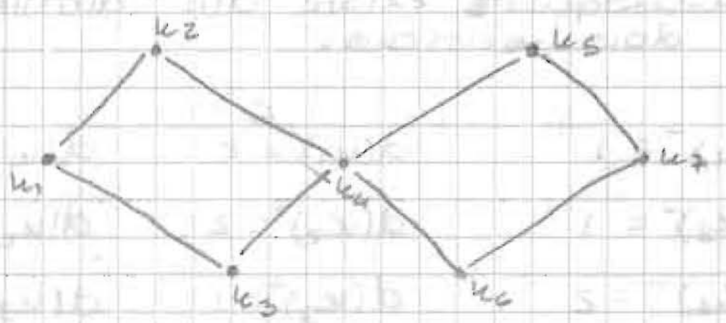
e)



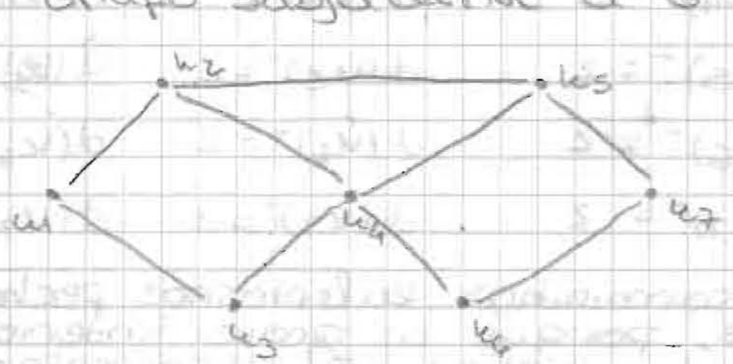


G' possui um circuito hamiltoniano como acima demonstrado.

F) Grafo subjacente a G



Grafo subjacente a G'

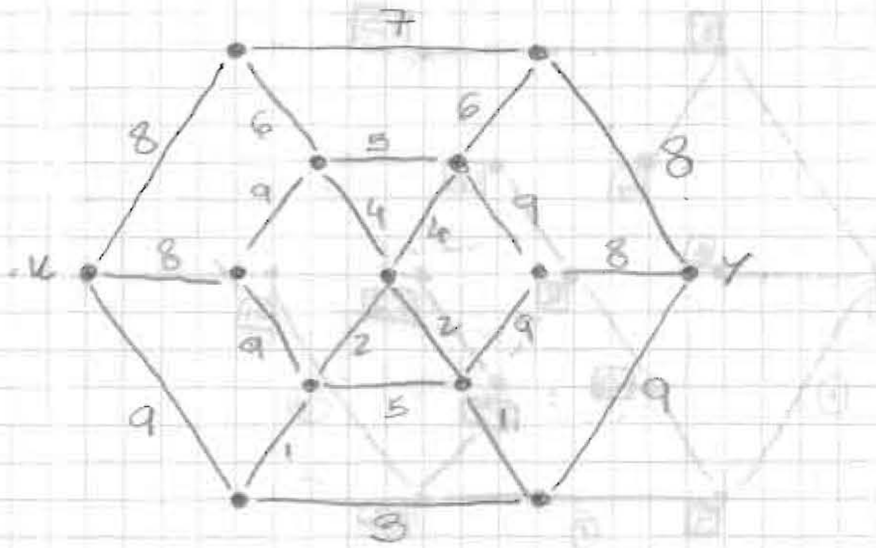


g) O grafo subjacente a G é euleriano e o grafo subjacente a G' é semi-euleriano.

h)

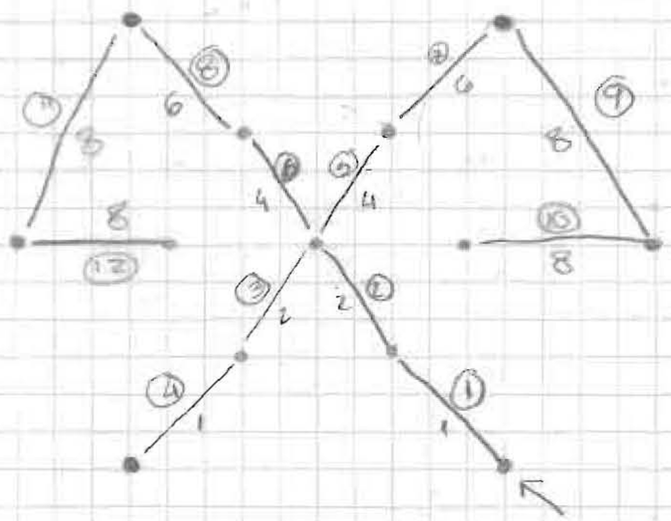
$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

6.



a) Kruskal

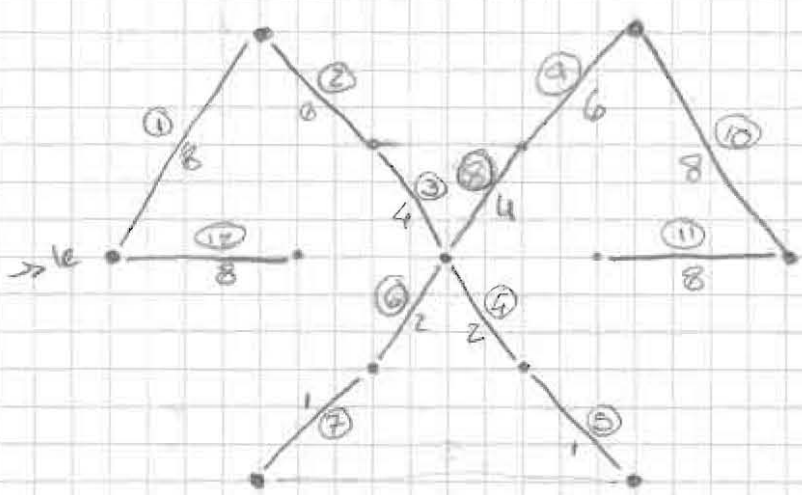
Árvore maximal de valor mínimo



$v(T) = 1 \times 2 + 2 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + 8 \times 4 = 58$

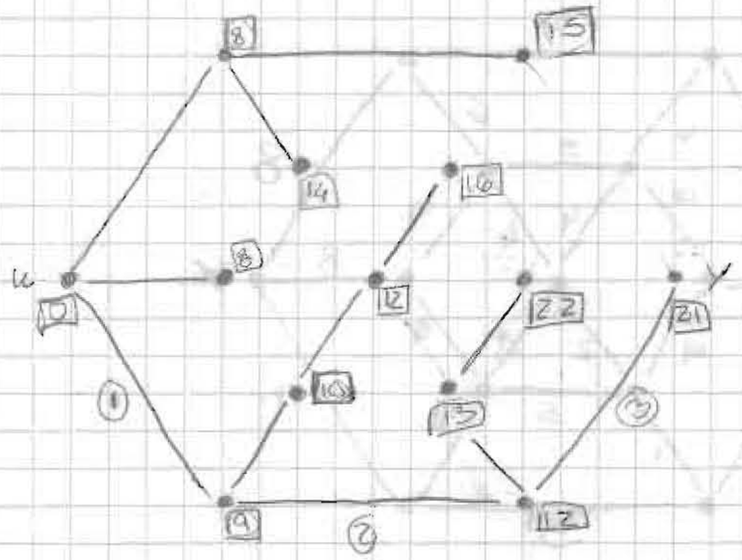
b) Prim

Árvore maximal de valor mínimo



$v(T) = 58$

c)



L = 21