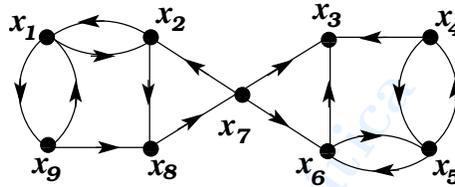


- [1.5] 1. Resolva a relação de recorrência  $a_n = -a_{n-1} + 42a_{n-2}$  sujeita às condições iniciais  $a_0 = 7$  e  $a_1 = 3$ .
- [1.5] 2. Represente geometricamente duas árvores não isomorfas de tamanho seis com exactamente dois vértices de grau dois. Justifique por que não são isomorfas.
- [2.0] 3. Verifique, usando o algoritmo estudado nas aulas, se  $(6, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2)$  é uma sequência gráfica. Em caso afirmativo, utilize o mesmo algoritmo para representar geometricamente um grafo simples que possua esta sequência de graus.

Mude de Folha

4. Considere o seguinte digrafo  $G = (X, \mathcal{U})$ :



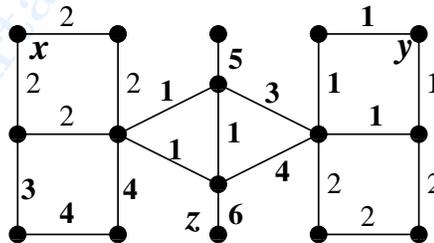
Sejam  $u = (x_8, x_9)$ ,  $Y = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ,  $G' = G - Y$  e  $G'' = G' + u$ .

Sejam  $a = \{x_2, x_3\}$ ,  $b = \{x_6, x_8\}$ ,  $G_0$  o grafo subjacente a  $G$ ,  $G_1 = G_0 + a$  e  $G_2 = G_1 + b$ .

- [1.0] (a) Indique a ordem, o tamanho, a sequência de graus exteriores, a sequência de graus interiores e a sequência de graus de  $G$ .
- [1.0] (b) Verifique se o digrafo  $G$  é fortemente conexo e indique as suas componentes fortemente conexas.
- [1.5] (c) Os digrafos  $G$ ,  $G'$  e  $G''$  têm caminhos eulerianos abertos ou fechados? Justifique.
- [1.0] (d) Indique a matriz  $A$  das adjacências de  $G'$  relativamente à marcação  $(x_1, x_2, x_7, x_8, x_9)$ .
- [1.0] (e) Utilize a matriz  $A$  para determinar o número de caminhos  $x_1 - x_7$  de comprimento 3 de  $G'$ .
- [1.5] (f) Caracterize os grafos  $G_0$ ,  $G_1$  e  $G_2$  quanto a serem eulerianos ou semi-eulerianos.

Mude de Folha

5. Considere o seguinte grafo ponderado:



- [2.0] (a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.
- [1.5] (b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice  $z$ , para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.
- [2.0] (c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia  $x - y$  mínima  $L$  entre os vértices  $x$  e  $y$ . Indique o valor de  $L$ .

Mude de Folha

- [1.0] 6. Justifique que, para qualquer número natural  $n$ , a sequência  $(2n + 1, 2n, 2n, 2n - 1, 2n - 1, \dots, 2, 2, 1, 1)$  não é uma sequência gráfica.
- [1.5] 7. Sejam  $G = (X, \mathcal{U})$  um grafo simples e  $u = \{x, y\} \in \mathcal{U}$ . Sejam  $z$  um elemento tal que  $z \notin X$  (novo vértice) e  $G \circ u$  o grafo simples de vértices  $X \cup \{z\}$  e arcos  $(\mathcal{U} \setminus \{u\}) \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\}$ .  
Mostre que  $G$  é conexo se e só se  $G \circ u$  for conexo.

