

Primeiro Teste  
**Matemática Discreta**

24 de Abril de 2012

- [3.0] 1. Considere os conjuntos  $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 5, 7, 12\}\}$  e  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$ .

Represente em extensão os seguintes conjuntos:

- (a)  $\cap \mathcal{A}$ ; (b)  $\cup \mathcal{A}$ ; (c)  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ; (d)  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ; (e)  $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ ; (f)  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ .

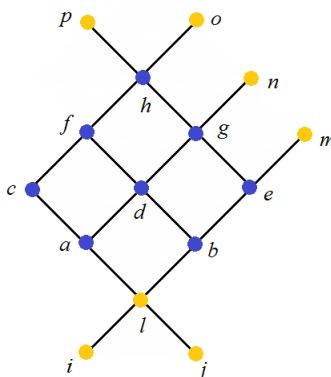
- [3.0] 2. Seja  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Considere a relação binária

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

e a relação de equivalência  $R$  determinada pelo conjunto quociente  $X/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ .

- (a) Determine  $S^{-1}$ , e indique todos os elementos de  $R$ .  
(b) Indique os elementos de  $S^{-1} \circ R$ .  
(c) Represente a relação  $S$  por meio de um diagrama e indique a matriz de adjacências de  $S$ .  
(d) Atendendo a que  $S^{-1} \circ R$  é uma relação transitiva, verifique se  $S^{-1} \circ R$  é uma relação de ordem parcial.

- [2.0] 3. Considere o conjunto  $X = \{a, b, \dots, o, p\}$  e a relação de ordem parcial  $\leq$  sobre  $X$  definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos mínimo, máximo, minimais, maximais, minorantes, majorantes, ínfimo e supremo do subconjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  (pontos escuros) do conjunto parcialmente ordenado  $(X, \leq)$ .

**Mudar de Folha**

- [2.0] 4. Considere a sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 7$  e  $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ , para  $n \geq 2$ . Usando o Princípio de Indução Completa, mostre que  $a_n = 7^n \cdot n$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- [3.0] 5. Considere os números inteiros  $a = 438$  e  $b = 204$ . Determine:

- (a)  $d = \text{mdc}\{a, b\}$ , usando o Algoritmo de Euclides;  
(b)  $u, v \in \mathbb{Z}$  tais que  $d = au + bv$ ;  
(c) A forma standard de  $b$ .

- [3.0] 6. (a) Determine todas as soluções da congruência linear  $14x \equiv 4 \pmod{16}$  no conjunto  $Z_{16} = \{0, 1, \dots, 15\}$ .  
(b) Atendendo a que  $\alpha_2 = 5$  é uma solução de  $5x \equiv 10 \pmod{15}$ , justifique que existe uma solução comum às congruências lineares  $14x \equiv 4 \pmod{16}$  e  $5x \equiv 10 \pmod{15}$ . Utilize a solução  $\alpha_2$  e uma das soluções encontradas em (a) para determinar uma solução do sistema.

**Mudar de Folha**

- [2.0] 7. Resolva a relação de recorrência  $u_n = 18u_{n-1} - 81u_{n-2}$  sujeita às condições iniciais  $u_0 = 1$  e  $u_1 = 9$ .

- [2.0] 8. Sejam  $f : X \rightarrow Y$  uma função e  $A \subseteq X$ . Mostre que  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ .

Dê um exemplo em que  $A \neq f^{-1}(f(A))$ .

Matemática Discreta  
Primeiro Teste – 24 de Abril de 2012

Departamento de Matemática

Uma resolução com notas explicativas

1. (a)  $\cap \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 5, 7, 12\} = \{1, 3\}$   
 (b)  $\cup \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2, 3, 5, 7, 12\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 12\}$   
 (c)  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 5, 7, 12\}\}$   
 (d)  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 5, 7, 12\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$   
 (e)  $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \{3\}$   
 (f)  $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \mathcal{B}, \{\{1, 2, 3\}\}, \{\{2, 3, 5, 7\}\}\}$

2. (a) Considerando que a relação binária  $S$  é dada por

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$

temos que a relação inversa será dada pela troca dos elementos nos pares ordenados que definem  $S$ . Assim temos

$$S^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Quando se afirma que a relação de equivalência  $R$  é determinada pelo conjunto quociente  $X/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ , estamos a dizer que em cada uma das classes de equivalência, dadas pelos conjuntos  $\{1, 2\}$  e  $\{3, 4\}$ , todos os seus elementos estão em relação. Desta forma a relação  $R$  é dada por:

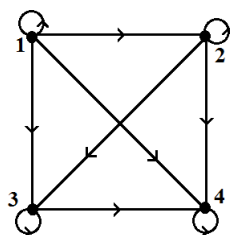
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

- (b) Construindo a seguinte tabela podemos obter os elementos da relação composta. Assim,

| $R$              | (1,1) | (1,2)       | (2,1) | (2,2)       | (3,3)             | (4,3)             | (3,4)                   | (4,4)                   |
|------------------|-------|-------------|-------|-------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| $S^{-1}$         | (1,1) | (2,1) (2,2) | (1,1) | (2,1) (2,2) | (3,1) (3,2) (3,3) | (3,1) (3,2) (3,3) | (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) | (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) |
| $S^{-1} \circ R$ | (1,1) | (1,1) (1,2) | (2,1) | (2,1) (2,2) | (3,1) (3,2) (3,3) | (4,1) (4,2) (4,3) | (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) | (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) |

Temos então  $S^{-1} \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$

- (c) O diagrama da relação  $S$  é:



A matriz de adjacências de  $S$  é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Para que  $S^{-1} \circ R$  fosse uma relação de ordem parcial, teria de ser reflexiva, anti-simétrica e transitiva. O enunciado garante-nos que a relação  $S^{-1} \circ R$  é transitiva.

Como  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in S^{-1} \circ R$ , isto é,  $\forall x \in X \quad (x, x) \in S^{-1} \circ R$ , a relação é reflexiva.

Por outro lado,  $(1, 2) \in S^{-1} \circ R$  e  $(2, 1) \in S^{-1} \circ R$  logo a relação não é anti-simétrica.

Desta forma podemos afirmar que a relação  $S^{-1} \circ R$  não é uma relação de ordem parcial.

3. Tendo em consideração o diagrama de Hasse do conjunto temos:

Mínimo - Não existe

Máximo -  $\{h\}$

Minimais -  $\{a, b\}$

Maximais -  $\{h\}$

Minorantes -  $\{i, l, j\}$

Majorantes -  $\{h, o, p\}$

Ínfimo -  $\{l\}$

Supremo -  $\{h\}$ .

4. Uma vez que queremos provar a propriedade para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$  consideramos

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : a_n = 7^n \cdot n\}.$$

1) Verifiquemos que  $a_0 \in S$ ,  $a_1 \in S$  e  $a_2 \in S$ .

$a_0 = 0$  por outro lado,  $a_0 = 7^0 \cdot 0 = 0$ , logo  $a_0 \in S$ .

$a_1 = 7$  por outro lado,  $a_1 = 7^1 \cdot 1 = 7$ , logo  $a_1 \in S$ .

$a_2 = 14 \times a_1 - 49 \times a_0 = 14 \times 7 - 49 \times 0 = 98$  por outro lado,  $a_2 = 7^2 \times 2 = 98$ , logo  $a_2 \in S$ .

2) HI: Suponhamos que para todo o  $k \in \mathbb{N}_0$  com  $k \leq n$  temos  $k \in S$ .

Verifiquemos então se  $n + 1 \in S$ .

Pela expressão dada,  $a_{n+1} = 14a_n - 49a_{n-1}$ . Como  $n \leq n$  e  $n - 1 \leq n$  temos, por hipótese de indução, que

$$a_{n+1} = 14(7^n \times n) - 49(7^{n-1} \times (n-1)) = 2 \times 7 \times 7^n \times n - 7 \times 7 \times 7^{n-1} \times (n-1) = 2 \times 7^{n+1} \times n - 7^{n+1} \times (n-1) = 7^{n+1}(2n - (n-1)) = 7^{n+1}(n+1).$$

Concluimos assim que  $n + 1 \in S$  e, pelo Princípio de Indução Matemática (completa) podemos afirmar que

$$a_n = 7^n \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

5. (a) Tomando os inteiros 438 e 204 e usando o Algoritmo de Euclides temos:

$$438 = 2 \times 204 + 30$$

$$204 = 6 \times 30 + 24$$

$$30 = 1 \times 24 + 6$$

$$24 = 4 \times 6 + 0.$$

Logo  $\text{mdc}\{438, 204\} = 6$ .

(b) O que se pretende é, determinando a igualdade de Bézout, encontrar inteiros  $u$  e  $v$  tais que

$$6 = u \times 438 + v \times 204.$$

Assim, atendendo aos vários passos do algoritmo de Euclides atrás utilizado tem-se:

$$\begin{aligned} 6 &= 30 - 1 \times 24 \\ &= 30 - 1 \times (204 - 6 \times 30) \\ &= 30 - 1 \times 204 + 6 \times 30 \\ &= -1 \times 204 + 7 \times 30 \\ &= -1 \times 204 + 7 \times (438 - 2 \times 204) \\ &= -1 \times 204 + 7 \times 438 - 14 \times 204 \\ &= 7 \times 438 - 15 \times 204 . \end{aligned}$$

Assim, e uma vez que a igualdade de Bézout encontrada é

$$6 = 7 \times 438 - 15 \times 204,$$

podemos afirmar que  $u = 7$  e  $v = -15$ .

- (c) Todo o número inteiro maior do que um pode ser escrito como um produto de números primos. Assim temos

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Podemos então dizer que a forma standard de 204 é  $2^2 \cdot 3 \cdot 17$ .

6. (a) Pretendemos encontrar as soluções da congruência linear  $14x \equiv 4 \pmod{16}$  no conjunto  $Z_{16}$ . Começemos por determinar o  $d = \text{mdc}\{a, n\} = \text{mdc}\{14, 16\}$ , usando o algoritmo de Euclides.

$$\begin{aligned} 16 &= 1 \times 14 + 2 \\ 14 &= 7 \times 2 + 0. \end{aligned}$$

Como  $d = 2$  e  $d|b$ , isto é  $2|4$ , podemos afirmar que a congruência tem 2 soluções em  $Z_{16}$ .

A igualdade de Bézout para o  $\text{mdc}$  encontrado é  $d = v \times b + u \times a$ , ou seja,  $2 = 1 \times 16 - 1 \times 14$ .

Assim, uma possível solução da congruência será

$$\alpha = \frac{b \cdot u}{d} = \frac{4 \times (-1)}{2} = -2 \notin Z_{16}.$$

Como a distância entre soluções consecutivas é dada por

$$m = \frac{n}{d} = \frac{16}{2} = 8,$$

as soluções desta congruência são da forma  $\alpha + km = (-2) + k \times 8$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

As soluções que pertencem a  $Z_{16}$  são, então,  $(-2) + 8$  e  $(-2) + 2 \times 8$ , ou seja, 6 e 14.

- (b) Para garantirmos a existência de uma solução comum às congruências lineares  $14x \equiv 4 \pmod{16}$  e  $5x \equiv 10 \pmod{15}$  é necessário que cada uma delas tenha solução, o que está garantido pela alínea anterior e pelo enunciado. No entanto, é ainda necessário que o  $\text{mdc}\{15, 16\} = 1$  o que também é verdade. Como ambas as condições se verificam podemos afirmar que existe uma solução comum às congruências lineares dadas.

A igualdade de Bézout para o  $\text{mdc}\{15, 16\}$  é  $1 = 1 \times 16 - 1 \times 15$ , sendo  $\alpha_1 = 6$  uma solução da congruência linear  $14x \equiv 4 \pmod{16}$  determinada na alínea anterior e, considerando, como pedido,  $\alpha_2 = 5$  uma solução da congruência linear  $5x \equiv 10 \pmod{15}$ , sabemos que uma solução  $\alpha$  comum às congruências será dada por

$$\alpha = \alpha_2 \times 1 \times 16 - \alpha_1 \times 1 \times 15 = 5 \times 1 \times 16 - 6 \times 1 \times 15 = -10.$$

7. Para resolvermos a relação de recorrência  $u_n = 18u_{n-1} - 81u_{n-2}$  sujeita às condições iniciais  $u_0 = 1$  e  $u_1 = 9$  vamos começar por considerar a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - 18x + 81 = 0.$$

Determinando as raízes desta equação obtemos

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{(18)^2 - 4 \times 81}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Uma vez que apenas existe a raiz dupla 9, sabemos que soluções da relação de recorrência serão da forma

$$u_n = b \times 9^n + d \times n \times 9^n.$$

Para que a solução verifique também as condições iniciais dadas, determinamos  $b$  e  $d$  de forma a que sejam soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_0 = 1 = b \\ u_1 = 9 = 9b + 9d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 9 \times 1 + 9d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Assim, a solução da relação de recorrência é

$$u_n = 1 \times 9^n + 0 \times n \times 9^n = 9^n.$$

8. Para mostrarmos que  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$  teremos de verificar que

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow (\text{pois } f(A) = \{f(x) : x \in A\}) \\ f(x) \in f(A) &\Rightarrow (\text{pois } f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\}) \\ x \in f^{-1}(f(A)). \end{aligned}$$

Consideremos  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$  e

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & a & b \end{pmatrix}.$$

Tomando  $A = \{1, 2\} \subseteq X$ , verificamos facilmente que  $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2, 3, 4\} \neq A$ .